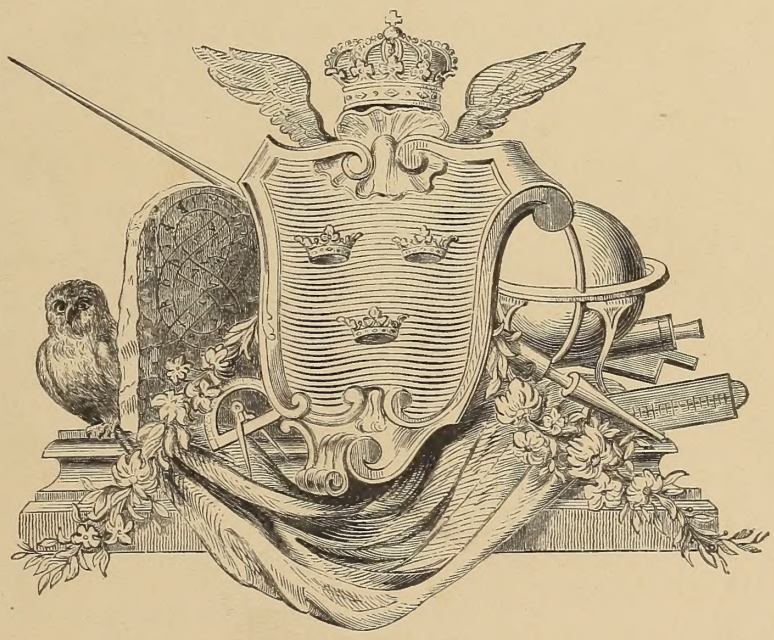
506.485
P.4
2
H 19632
Smith Inst
42

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.



Smithsonian Institution
316535
National Museum

SERIEI TERTIÆ VOL. XVII.

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXCVIII.

INDEX ACTORUM.

		Pag.	Tab.
	Introductio	I—XVII.	
	1. Sectio Physico-Mathematica:		
I.	Carlheim-Gyllenskôld, V.: Détermination des Eléments magnétiques dans la Suède méridionale pendant l'année 1892	1— 82.	
II.	Ångström, K.: Ueber eine einfache Methode zur photographischen Darstellung des ultrarothen Spektrums	1— 4.	I.
III.	Berger, A.: Recherches sur les Nombres Polygonaux	1— 38.	
IV.	Bohlin, K.: Formeln und Tafeln zur gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten	1—225.	
V.	Söderblom, A.: Sur la Fonction elliptique fondamentale $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$	1— 56.	
	2. Sectio Medica et Historiæ Naturalis:		
I.	Hammarberg, C.: Studien über Klinik und Pathologie der Idiotie nebst Untersuchungen über die normale Anatomie der Hirnrinde	1—126.	I—VII.
II.	Kjellman, F. R.: Zur Organographie und Systematik der Aegagropilen	1— 26.	I—III.

INTRODUCTIO.

I.

Proximo triennio, quod post Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis (Ser. III. Vol. XV) anno 1895 *) mense Majo edita præteriit,

hi **Socii mortui** sunt

Honorarii:

	Adscriptus.	Mortuus.
LOVÉN, Sveno, Professor et Musei Zoologici Holmiensis a. h. Præfectus	(1869) '89	1895.
DE GEER, Ludovicus, Lib. Baro, Summæ Rei Judiciariæ a. h. Præfectus, Universitatum Ups. et Lund. a. h. Cancellarius, Academiæ Svecanæ Octodecimvir	1883.	1896.
HAMILTON, Adolphus Ludovicus, Comes, a. h. Gubernator Uplandiarum, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1888—89*	1883.	1897.
DICKSON, Oscar, Lib. Baro, Negotiator Gothoburgensis. . . .	1876.	1897.

*) Qui factum sit, ut Actorum Reg. Soc. Sc. Ups. Vol. XVI a. 1893, superiore volumine nondum absoluto, ederetur, in introductione Vol. XV:i a. 1895 editi expositum est.

Ordinarii Svecani:

	Adscriptus.	Mortuus.
HEDENIUS, Petrus, Anatomiæ Pathologicæ Professor Upsaliensis emeritus, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1884—85*	1873.	1896.
HÄGGSTRÖM, Franciscus Vilelmus, Linguæ Litterarumque Latinarum Professor Upsaliensis emeritus	1887.	1896.
MÖLLER, Dietricus Magnus Axelius, Astronomiæ Professor Lundensis emeritus	1876.	1896.
GYLDÉN, Ioannes Augustus Hugo, Professor et Observatorii Astronomici Holmiensis Director	1872.	1896.
HOLMGREN, Alaricus Frithiof, Physiologiæ Professor Upsaliensis, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1887—88*	1873.	1897.
BLOMSTRAND, Christianus Vilelmus, Chemiæ Professor Lundensis emeritus	1878.	1897.

Ordinarii Exteri:

HUXLEY, Thomas Henricus, Anatomiæ et Physiologiæ Professor Londinensis	1875.	1895.
HOPPE-SEYLER, Ernestus Felix Immanuel, Chemiæ medicinalis Professor Argentoratensis	1890.	1895.
STEPHENS, Georgius, Linguarum Anglicar. Professor Hauniensis	1865.	1895.
GEFFROY, Augustus, Historiarum Professor Parisiensis et Instituti Paris. Membrum	1886.	1895.
PASTEUR, Ludovicus, Professor, Instituti Parisiensis Membrum	1882.	1895.
LANGE, Julius, Historiæ Artium Elegant. Professor Hauniensis .	1895.	1896.
FIZEAU, Hippol. Ludovicus, Physices Professor Paris., Instit. Paris. Membrum	1870.	1896.
TISSERAND, Felix, Observatorii Astronomici Parisiensis Director, Instituti Paris. Membrum	1892.	1896.
MÜLLER, Ferdinandus de, Lib. Baro, Horti Botanici Melbournensis Director	1887.	1896.
BAUMANN, Eugenius, Chemiæ Physiologicæ Professor Friburgensis	1896.	1896.
DU BOIS-REYMOND, Aemilius Henricus, Physiologiæ Professor Berolinensis	1876.	1897.
WEIERSTRASS, Carolus Vilelmus Theodorus, Mathesis Professor Berolinensis	1876.	1897.
STEENSTRUP, Ioannes Iapetus Smith, Zoologiæ Professor Hauniensis emeritus	1856.	1897.
DES CLOISEAUX, Alfredus Ludovicus Oliv., Instituti Paris. Membrum	1878.	1897.

	Adscriptus.	Mortuus.
MEYER. Victor, Chemiæ Professor Heidelbergensis	1894.	1897.
HEIDENHAIN, Rudolphus, Physiologiæ Professor Vratislaviensis	1897.	1897.
SCHERING, Ernestus Christianus Julius, Mathesis Professor Gottingensis	1875.	1897.
UNGER, Carolus Richardus, Linguarum Litterarumque Recent. Professor Christianiensis	1865.	1898.
LEUCKART, Rudolphus, Anatomiæ Comparatæ Professor Lipsiensis	1885.	1898.
TOPELIUS, Zacharias, Consilio Publico adscriptus, a. h. Historiarum Professor Helsingforsiensis	1894.	1898.
LANGE, Ioannes Henricus, Botanices a. h. Professor Hauniensis	1888.	1898.

Novi Socii adscripti sunt

Honorarius:

	Adscriptus.
BOSTRÖM, Ericus Gustavus, ex primoribus Regni Unus, Consilii Regis Princeps	1896.

Ordinarii Svecani:

ODENIUS, Maximilianus Victor, Medicinæ Professor Lundensis emeritus	1896.
DANIELSSON, Olavus Augustus, Litterarum Græcarum Professor Upsaliensis	1896.
ROSÉN, Petrus Gustavus, Astronomiæ Professor Holmiensis	1897.
BÄCKLUND, Albertus Victor, Mechanices Professor E. O. Lundensis .	1897.
HÖGBOM, Arvidus Gustavus, Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis	1898.

Ordinarii Exteri:

	Adscriptus.
SCHWARZ, Hermannus Amandus, Mathesis Professor Berolinensis . .	1895.
DIETRICHSEN, Laurentius Henricus Segelcke, Historiæ Artium elegant. Professor Christianiensis	1895.
BOLTZMANN, Ludovicus, Physices Professor Vindobonensis.	1895.
BEAUCHET, Ludovicus, Juris Professor Nancejensis	1895.
LANGE, Julius, Historiæ Artium Elegantiorum Professor Hauniensis . .	1895.
KRONECKER, Hugo, Physiologiæ Professor Bernensis	1896.
ROUX, Petrus Paulus Aemilius, Instituti 'Pasteur' vice-director Parisiensis	1896.
BAUMANN, Eugenius, Chemiæ Physiologicæ Professor Friburgensis . .	1896.
FOSTER, Michael, Physiologiæ Professor Cantabrigiensis	1896.
HOLM, Eduardus, Historiarum Professor Hauniensis	1896.
BERTRAND, Josephus, Mathesis Professor Parisiensis	1897.
WARMING, Eugenius, Botanices Professor Hauniensis	1897.
NENCKI, Marcellus de, ad Institutum medicinæ experimentalis Petropolit. Professor	1897.
LANGLEY, Samuel Pierpont, Secretarius Instituti Smithson. Washingtoniensis	1897.
HEIDENHAIN, Rudolphus, Physiologiæ Professor Vratislaviensis . . .	1897.
CROOKES, Vilelmus, Membrum Societatis Regiæ Londinensis	1897.
WISLICENUS, Ioannes, Chemiæ Professor Lipsiensis	1897.
WEBER, Henricus, Mathesis Professor Argentoratensis	1898.
PICARD, Aemilius, Mathesis Professor Parisiensis	1898.
STORM, Gustavus, Historiarum Professor Christianiensis	1898.
MECHELIN, Leopoldus Henricus Stanislaus, Senatus Fennici a. h. Membrum	1898.

II.

AUGUSTISSIMUS HUJUS SOCIETATIS

PATRONUS

OSCAR II

SVECORUM NORVEGORUM GOTHORUM
VANDALORUMQUE
REX.

PRÆSES ILLUSTRIS

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR GUSTAVUS ADOLPHUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS SUCCESSOR.

SOCII HONORARII PRIMARII

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR CAROLUS AUGUSTUS BERNADOTTE

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR CAROLUS VILELMUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS HEREDITARIUS.

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

EUGENIUS NAPOLEON NICOLAUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS HEREDITARIUS.

A. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum electionis ordinem

Honorarii:

SUNDBERG, Antonius Nicolaus, Ph., Jur. Utr., Th. Dr, Ecclesiæ Sviogothicæ Archiepiscopus, Acad. Upsaliensis Procancellarius, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Regg. Ordd. Commendator, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1885—86.*

NORDENSKIÖLD, Adolphus Ericus, Lib. Baro, Ph. Dr, Professor, Musei Mineralogici Holmiensis Præfectus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol c. m. Cr. Commendator, etc.

OLIVECRONA, Samuel Rudolphus Detlof Canutus, Ph. et Jur. Utr. Dr, Supremi Judicii Svecani a. h. Assessor, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

LILLJEBORG, Vilelmus, Ph. et Med. Dr, Zoologiæ Professor Upsaliensis emeritus, Ord St. Pol. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1880—81.*

SAHLIN, Carolus Yngve, Ph. et Jur. Utr. Dr, Philosophiæ practicæ Professor Upsaliensis emeritus, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et S. Ol. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1889—90.*

LJUNGGREN, Gustavus, Ph. Dr, Aesthetices et Literarum Artiumque Elegantium Historiæ Professor Lundensis emeritus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

AGARDH, Jacobus Georgius, Ph. et Med. Dr, Botanices Professor Lundensis emeritus, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

LINDHAGEN, Daniel Georgius, Ph. Dr, Professor, Reg. Academiæ Scient. Holm. Secretarius, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator, etc.

EHRENHEIM, Petrus Jacobus de, Jur. Utr. Dr, a. h. Consiliarius Regis, Universitatum Ups. et Lund. a h. Cancellarius, Regg. Ordd. Eques et Commendator, etc.

BOSTRÖM, Ericus Gustavus, ex Primoribus Regni unus, Consilii Regis Princeps, Regg. Ordd. Eques et Commendator, etc.

Ordinarii Svecani:

STYFFE, Carolus Gustavus, Ph. Dr, ad Reg. Academiam Upsaliensem a. h. Bibliothecarius, St. Pol Ord. adscriptus.

THALÉN, Tobias Robertus, Ph. Dr, Physices Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *Reg. Societatis Scient. Ups. Secretarius et Bibliothecarius.*

FRIES, Theodorus Magnus, Ph. Dr, Botanices Professor Upsaliensis, Reg. Academiæ Upsaliensis Rector Magnificus, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1882—83.*

THORELL, Thord Tamerlan Theodorus, Ph. Dr, Professor, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

ALMÉN, Augustus Theodorus, Ph. et Med. Dr, Collegii Med. a. h. Præses, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc., *R. Soc. Sc. Ups. a. h. Quæstor.*

LINDMAN, Christianus Fridericus, Ph. Dr, ad Scholam Strengnesiensem Mathesis Lector emeritus, St. Pol. Ord. adscriptus.

DILLNER, Georgius, Ph. Dr, Mathesis Professor E. O. Upsaliensis emeritus, St. Pol. Ord. adscriptus.

CLASON, Eduardus Claudius Hermannus, Med. Dr, Anatomiæ Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator, *Præses Reg. Societatis Scient. Ups. designatus.*

RUBENSON, Robertus, Ph. Dr, Professor et Instituti Meteorologici Svecani Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

CLEVE, Petrus Theodorus, Ph. Dr, Chemiæ Professor Upsaliensis, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *Præses R. Soc Sc. Ups. 1886—87.*

MALMSTRÖM, Carolus Gustavus, Ph. Dr, a. h. Consiliarius Regis, a h. Archivarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator et S. Ol. Ord. adscriptus, etc.

TEGNÉR, Esaias Henricus Vilelmus, Ph Dr, Linguarum Orientalium Professor Lundensis, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, St. Pol. Ord. adscriptus, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1891—92.*

LUNDQUIST, Carolus Gustavus, Ph. Dr, Mechanices Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Reg. Societatis Scient. Ups. Quæstor.*

HILDEBRANDSSON, Hugo Hildebrand, Ph. Dr, Meteorologiæ Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1890—91.*

WITTROCK, Veit Brecher, Ph. Dr, Professor et Musei Botanici Holmiensis Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

HAMMARSTEN, Olavus, Ph. et Med. Dr, Chemiæ Medicinalis et Physiologicæ Professor Upsaliensis, Ord. St. Pol. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1893—94.*

FALK, Mathias, Ph. Dr, Mathesis Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1894—95.*

KEY, Ernestus Axelius, Ph. et Med. Dr, Anatomiæ Pathologicæ Professor Holmiensis emeritus.

RETZIUS, Magnus Gustavus, Ph. et Med. Dr, a. h. Histologiæ Professor E. O. Holmiensis.

ODHNER, Claudius Theodorus, Ph. Dr, Archivarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St Pol. Commendator.

RYDIN, Hermannus Ludovicus, Ph. et Jur. Utr. Dr, Juris Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator et S. Ol. Ord. adscriptus, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1892—93.*

BLIX, Magnus Gustavus, Med. Dr, Physiologiæ Professor Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

ANNERSTEDT, Claudius, Ph. Dr, ad Reg. Academiam Upsaliensem Bibliothecarius, Regg. Ordd. a. h. Historiographus, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1895—96.*

NYRÉN, Magnus, Ph. Dr, ad Observatorium Pulkovense Astronomus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc

KJELLMAN, Franciscus Reinholdus, Ph. Dr, Botanices Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1896—97.*

TULLBERG, Tycho, Ph. Dr, Zoologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

MITTAG-LEFFLER, Gustavus, Ph. Dr, Mathesis Professor Holmiensis, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

ARESCHOUG, Fridericus Vilelmus Christianus, Ph. Dr, Botanices Professor Lundensis.

BJÖRLING, Carolus Fabianus Emanuel, Ph. Dr, Mathesis Professor Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

DUNÉR, Nicolaus Christophorus, Ph. Dr, Astronomiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. et Caroli XIII Ordd. adscriptus, etc.

FORSSELL, Ioannes Ludovicus, Ph. et Jur. Utr. Dr, Collegii Reg. Cameralis Præses, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

THÉEL, Ioannes Hjalmarus, Ph. Dr, Professor et Musei Zoologici Holmiensis Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus.

WARFVINGE, Franciscus Vilelmus, Med. Dr, Nosocomii Præfectus Holmiensis, Ord. St. Pol. et Was. Commendator.

ALIN, Oscar Josephus, Ph. et Jur. utr. Dr, Eloquentiæ et politices Professor Skytteanus Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

NILSON, Laurentius Fridericus, Ph. Dr, Chemiæ Agronomicæ Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

LINDSTRÖM, Gustavus, Ph. Dr, Palæontologiæ Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HILDEBRAND, Ioannes Olavus Hildebrand, Ph. Dr, Antiquarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

LUNDSTRÖM, Axelius Nicolaus, Ph. Dr, Phytobiologiæ Professor E. O. Upsaliensis, St. Was. Ord. adscriptus.

HASSELBERG, Claudius Bernhardus, Ph. Dr, Physices Professor Holmiensis, St. Pol Ord. adscriptus, etc.

WIDMAN, Oscar, Ph. Dr, Chemiæ Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Reg. Societatis Scient. Ups. p. t. Præses.*

SJÖGREN, Andreas Hjalmarus, Ph. Dr, a. h. Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HENSCHEN, Salomon Eberhardus, Med. Dr, Medicinæ practicæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

PETERSSON, Oscar Victor, Med. Dr, Pædiatrices et Medicinæ practicæ Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

LENNANDER, Carolus Gustavus, Med. Dr, Chirurgiæ Professor Upsaliensis.

ODENIUS, Maximilianus Victor, Ph. et Med. Dr, Medicinæ theoreticæ et forensis Professor Lundensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator.
DANIELSSON, Olavus Augustus, Ph. Dr, Litterarum Græcarum Professor Upsaliensis.
ROSÉN, Petrus Gustavus, Ph Dr, Astronomiæ Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
BÄCKLUND, Albertus Victor, Ph. Dr, Mechanices Professor E. O. Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
HÖGBOM, Arvidus Gustavus, Ph. Lic., Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis.

Ordinarii Exteri:

THOMSON, Vilelmus, Lib. Baro de KELVIN, Physices Professor Glasguensis.
BONSDORFF, Evert Julius, Anatomiæ et Physiologiæ Professor Helsingforsiensis emeritus.
BUNSEN, Robertus Vilelmus, Chemiæ Professor Heidelbergensis, Ord. St. Pol, Commendator.
STOKES, Georgius Gabriel, Mathesis Professor Cantabrigiensis.
HOOKER, Josephus Dalton, Horti Botanici Kevensis a. h. Director, St. Pol. Ord. adscriptus.
VIRCHOW, Rudolphus de, Anatomiæ Pathologicæ Professor Berolinensis, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et S. Ol. Commendator.
STRUVE, Otto Vilelmus, Observatorii Astronomici Pulkovensis a. h. Director, Ord. St. Pol. Commendator.
MÜLLER, Max, Professor Taylorianus Oxoniensis, Ord. St. Pol. Commendator.
BUGGE, Elseus Sophus, Linguarum Indo-Europæar. Professor E. O. Christianiensis, St. Pol. Ord. adscriptus et Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator
GÜNTHER, Albertus, ad Museum Britannicum Zoologiæ Præfectus.
RECHLINGHAUSEN, Fridericus de, Medicinæ Professor Argentoratensis.
HERMITE, Carolus, Mathesis Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.
HUGGINS, Vilelmus, Socius Reg. Societatis Londinensis.
HOPPE, Ernestus Reinholdus Eduardus, Mathesis Professor Berolinensis.
STEINTHAL, Henricus, Philologiæ Professor Berolinensis.
SARS, Georgius Ossian, Zoologiæ Professor Christianiensis, S. Ol. Ord. adscriptus.
WIEDEMANN, Gustavus, Physic. Chemiæ Professor Lipsiensis.
NEWCOMB, Simon, ad Observatorium Washingtoniense Mathesis Professor.
COHN, Ferdinandus, Botanices Professor Vratislaviensis.
SCHIAPARELLI, Ioannes Virginius, Director Observatorii Mediolanensis.
BUCHAN, Alexander, Societatis Meteorologicæ Scotorum Secretarius.
CORNU, Alfredus, Physices Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.

PARIS, Gaston, Professor, Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.
MAREY, Stephanus Julius, Historiæ naturalis Professor Parisiensis, Instit. Paris. Membrum.
MAURER, Conradus de, Hist. Juris Septentrionalis Professor Monacensis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator.
ASCHEHOUG, Torkil Halvorsen, Juris Professor Christianiensis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator.
MOHN, Henricus, Meteorologiæ Professor Cristianiensis, St. Pol. Ord. adscriptus et Ord S. Ol. Commendator.
BJERKNES, Carolus Antonius, Mathesis Professor Christianiensis, Ord. S. Ol. Commendator.
QUINCKE, Gustavus, Physices Professor Heidelbergensis.
BAEYER, Adolphus, Chemiæ Professor Monacensis.
HANN, Julius, Instituti Meteorologici Græcensis Præfectus.
PAGET, Jacobus, Medicinæ Professor Londinensis.
LISTER, Josephus, Chirurgiæ Professor Londinensis.
GEGENBAUR, Carolus, Anatomiæ Professor Heidelbergensis.
BAILLON, Henricus Ernestus, Naturalis Historiæ Medicinalis Professor Parisiensis.
THOMSEN, Julius, Chemiæ Professor Hauniensis.
FRANKLAND, Eduardus, Chemiæ Professor Londinensis.
POINCARÉ, Julius Henricus, Mathesis Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.
FICK, Adolphus, Physiologiæ Professor Virceburgensis.
HIS, Vilelmus, Anatomiæ Professor Lipsiensis.
KÖLLIKER, Albertus de, Anatomiæ Professor Virceburgensis.
MASCART, Eleutherus, Physices Professor et Instituti Meteorologici Parisiensis Præfectus, Instituti Paris. Membrum.
LÜTKEN, Christianus Fridericus, Zoologiæ Professor Hauniensis.
WIESNER, Julius, Botanices Professor Vindobonensis.
WIMMER, Ludovicus Franciscus Adalbertus, Linguarum Septentrionalium Professor Hauniensis.
AMIRA, Carolus de, Juris Professor Monacensis, St. Pol. ord. adscriptus.
DROYSEN, Gustavus, Historiarum Professor Halensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
SCHWENDENER, Simon, Botanices Professor Berolinensis.
BACKLUND, Ioannes Oscar, Academiæ imp. Scientiarum Petropol. membrum, Observatorii imp. Astronomici Pulkovensis Director, St. Pol. Ord. adscriptus.
BRÖGGER, Valdemar Christophorus, Geologiæ et Mineralogiæ Professor Christianiensis, S. Ol. Ord. adscriptus.
GROTH, Paulus, Mineralogiæ Professor Monacensis.
DELISLE, Leopoldus, Bibliothecæ Parisiensis Præfectus, Ord. St. Pol. Commendator.
ZIEMSSEN, Hugo de, Medicinæ Professor Monacensis.
ENGLER, Adolphus, Botanices Professor Berolinensis.
VOGEL, Hugo Carolus, Observatorii Astrophysici Postampiensis Præfectus.

ESTLANDER, Carolus Gustavus, Aesthetices Professor Helsingforsiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
BORNET, Eduardus, Med. Dr, Instituti Paris. Membrum.
THOMSEN, Vilelmus Ludovicus Petrus, ad Universitatem Hauniensem Grammaticæ Indo-Europæarum Linguarum comparatæ Professor.
RAYLEIGH, Ioannes Vilelmus de, Lib. Baro, ad Institutum regium Magnæ Britanniæ Physices Professor Londinensis.
PICKERING, Eduardus Carolus, Astronomiæ Professor Harvardensis.
FUCHS, Lazarus, Mathesis Professor Berolinensis.
FISCHER, Aemilius, Chemiæ Professor Berolinensis.
KÜHNE, Vilelmus, Physiologiæ Professor Heidelbergensis.
KERNER de MARILAUN, Antonius, Botanices Professor Vindobonensis.
WALLACE, Alfredus Russel, Societatis Linnæanæ Londinensis Membrum.
TREUB, Melchior, Horti Botanici Præfectus Javanensis.
DAAE, Ludovicus, Historiarum Professor Christianiensis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. adscriptus.
ERDMANNSDÖRFFER, Bernhardus, Historiarum Professor Heidelbergensis.
GARDINER, Samuel Rawson, Historiarum a. h. Professor Londinensis.
TAIT, Petrus Guthrie, Physices Professor Edinburgensis.
KOCH, Robertus, Medicinæ Professor Berolinensis.
HJELT, Otto Eduardus Augustus, Anatomiæ Pathologicæ Professor emeritus Helsingforsiensis, Ord. St. Pol. Commendator.
KOCHER, Theodorus, Chirurgiæ Professor Bernensis.
LIEBERMANN, Carolus, Chemiæ Professor Berolinensis.
BOUCHARD, Carolus Jacobus, Pathologiæ Professor Parisiensis.
KOHLRAUSCH, Fridericus, Instituti Reg. Physico-Techn. Germanici Director Berolinensis.
LACAZE-DUTHIERS, Felix Josephus Henricus de, Zoologiæ et Anatomiæ Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.
PFEFFER, Vilelmus, Botanices Professor Lipsiensis.
SCHWARZ, Hermannus Amandus, Mathesis Professor Berolinensis.
DIETRICHSEN, Laurentius Henricus Segelcke, Historiæ Artium elegant. Professor Christianiensis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. adscriptus.
BOLTZMANN, Ludovicus, Physices Professor Vindobonensis.
BEAUCHET, Ludovicus, Juris Professor Nancejensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
KRONECKER, Hugo, Physiologiæ Professor Bernensis.
ROUX, Petrus Paulus Aemilius, Instituti 'Pasteur' Vice-director Parisiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.
FOSTER, Michael, Physiologiæ Professor Cantabrigiensis.
HOLM, Eduardus, Historiarum Professor Hauniensis.
BERTRAND, Josephus, Mathesis Professor Parisiensis, Academiæ Scient. Paris. Membrum et Secretarius, Ord. St. Pol. Commendator.
WARMING, Eugenius, Botanices Professor Hauniensis.
NENCKI, Marcellus de, ad Institutum Medicinæ experimentalis Petropolit. Professor.

LANGLEY, Samuel Pierpont, Secretarius Instituti Smithson. Washingtoniensis.
CROOKES, Vilelmus, Membrum Societatis Regiæ Londinensis.
WISLICENUS, Ioannes, Chemiæ Professor Lipsiensis.
WEBER, Henricus, Mathesis Professor Argentoratensis.
PICARD, Aemilius, Mathesis Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.
STORM, Gustavus, Historiarum Professor Christianiensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.
MECHELIN, Leopoldus Henricus Stanislaus, Senatus Fennici a. h. Membrum Ord. St. Pol. Commendator.

B. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum disciplinas

Ordinarii Svecani

I. In Classe

Physico-Mathematica:

THALÉN, T. R. . . . 1863.
ALMÉN, A. T. . . . . 1870.
LINDMAN, C. F. . . 1873.
DILLNER, G. . . . . 1873.
RUBENSON, R. . . . 1875.
CLEVE, P. T. . . . . 1875.
LUNDQUIST, C. G. . 1876.
HILDEBRANDSSON, H. 1876.
FALK, M. . . . . 1878.
NYRÉN, M. . . . . 1885.
MITTAG-LEFFLER, G. 1886.
BJÖRLING, C. F. E. 1888.
DUNÉR, N. CH. . . . 1888.
NILSON, L. F. . . . . 1889.
HASSELBERG, C. B. . 1890.
WIDMAN, O. . . . . 1890.
SJÖGREN, H. . . . . 1892.
ROSÉN, P. G. . . . . 1897.
BÄCKLUND, A. V. . 1897.
HÖGBOM, A. G. . . . 1898.

II. In Classe

Medica et Historiæ Naturalis:

FRIES, T. M. . . . . 1866.
THORELL, T. T. T. . 1866.
CLASON, E. C. H. . 1873.
WITTROCK, V. B. . . 1877.
HAMMARSTEN, O. . . 1878.
KEY, E. A. . . . . 1880.
RETZIUS, M. G. . . . 1882.
BLIX, M. G. . . . . 1883.
KJELLMAN, F. R. . . 1885.
TULLBERG, T. . . . . 1885.
ARESCHOUG, F. V. CH. 1887.
THÉEL, J. H. . . . . 1889.
WARFVINGE, F. V. 1889.
LINDSTRÖM, G. . . . 1889.
LUNDSTRÖM, A. N. . 1889.
HENSCHEN, S. E. . . 1892.
PETERSSON, O. V. . 1893.
LENNANDER, C. G. . 1894.
ODENIUS, M. V. . . 1896.
. . . . . .

III. In Classe

Historico-Archæologica:

STYFFE, C. G. . . . 1863.
MALMSTRÖM, C. G. . 1876.
TEGNÉR, E. H. V. . 1876.
ODHNER, C. T. . . . 1882.
RYDIN, H. L. . . . . 1882.
ANNERSTEDT, C. . . 1884.
FORSSELL, J. L. . . 1889.
ALIN, O. J. . . . . 1889.
HILDEBRAND, J. O. H. 1890.
DANIELSSON, O. A. 1896.

Ordinarii Exteri

I. In Classe

Physico-Mathematica:

THOMSON, V. (KELVIN) 1852.
BUNSEN, R. V. . . . 1856.
STOKES, G. G. . . . 1865.
STRUVE, O. V. . . . 1868.
HERMITE, C. . . . . 1874.
HUGGINS, V. . . . . 1875.
HOPPE, E. R. E. . . 1875.
WIEDEMANN, G. . . . 1877.
NEWCOMB, S. . . . . 1877.
SCHIAPARELLI, I. V. 1878.
BUCHAN, A. . . . . 1878.
CORNU, A. . . . . 1878.
MOHN, H. . . . . 1879.
BJERKNES, C. A. . . 1879.
QUINCKE, G. . . . . 1879.
BAEYER, A. . . . . 1879.
HANN, J. . . . . 1881.
THOMSEN, J. . . . . 1885.
FRANKLAND, E. . . . 1885.
POINCARÉ, J. H. . . 1885.
MASCART, E. . . . . 1886.
BACKLUND, I. O. . . 1888.
BRÖGGER, V. CH. . 1889.
GROTH, P. . . . . 1889.
VOGEL, H. C. . . . . 1889.
RAYLEIGH, I. V. . . 1891.
PICKERING, E. C. . 1892.
FUCHS, L. . . . . 1892.
FISCHER, E. . . . . 1892.
TAIT, P. G. . . . . 1894.
LIEBERMANN, C. . . 1894.
KOHLRAUSCH, F. . . 1894.
SCHWARZ, H. A. . . 1895.
BOLTZMANN, L. . . . 1895.
BERTRAND, J. . . . . 1897.
LANGLEY, S. P. . . 1897.
CROOKES, V. . . . . 1897.
WISLICENUS, I. . . . 1897.
WEBER, H. . . . . 1898.
PICARD, A. . . . . 1898.

II. In Classe

Medica et Historiæ Naturalis:

BONSDORFF, E. J. . . 1856.
HOOKER, J. D. . . . 1865.
VIRCHOW, R. . . . . 1867.
GÜNTHER, A. . . . . 1873.
RECHLINGHAUSEN, F. 1873.
SARS, G. O. . . . . 1875.
COHN, F. . . . . 1877.
MAREY, S. J. . . . . 1878.
PAGET, J. . . . . 1882.
LISTER, J. . . . . 1884.
GEGENBAUR, C. . . . 1884.
BAILLON, H. E. . . 1884.
FICK, A. . . . . 1885.
HIS, V. . . . . 1885.
KÖLLIKER, A. . . . . 1885.
LÜTKEN, C. F. . . . 1886.
WIESNER, J. . . . . 1886.
SCHWENDENER, S. . 1888.
ZIEMSSEN, H. . . . . 1889.
ENGLER, A. . . . . 1889.
BORNET, E. . . . . 1891.
KÜHNE, V. . . . . 1892.
KERNER, A. . . . . 1892.
WALLACE, A. R. . . 1893.
TREUB, M. . . . . 1893.
KOCH, R. . . . . 1894.
HJELT, O. E. A. . . 1894.
KOCHER, T. . . . . 1894.
BOUCHARD, C. . . . 1894.
LACAZE-DUTHIERS, F. 1894.
PFEFFER, V. . . . . 1894.
KRONECKER, H. . . 1896.
ROUX, P. P. A. . . . 1896.
FOSTER, M. . . . . 1896.
WARMING, E. . . . . 1897.
NENCKI, M. . . . . 1897.
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

III. In Classe

Historico-Archæologica:

MÜLLER MAX . . . 1869.
BUGGE, E. S. . . . . 1872.
STEINTHAL, H. . . . 1875.
PARIS, G. . . . . 1878.
MAURER, C. . . . . 1878.
ASCHEHOUG, T. H. . 1879.
WIMMER, L. F. . . . 1886.
AMIRA, C. . . . . 1887.
DROYSEN, G. . . . . 1887.
DELISLE, L. . . . . 1889.
ESTLANDER, C. G. . 1890.
THOMSEN, V. L. P. 1891.
DAAE, L. . . . . 1893.
ERDMANNSDÖRFFER, B 1893.
GARDINER, S. R. . . 1893.
DIETRICHSEN, L. H. S. 1895.
BEAUCHET, L. . . . 1895.
HOLM, E. . . . . 1896.
STORM, G. . . . . 1898.
MECHELIN, L. H. S. 1898.

III.

Academiæ et Societatis, cum quibus Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis communicantur.

In **Africa**:

Alger, ... Société de Climatologie

In **America**:

Boston, ... American Academy of Arts and Sciences.
» Society of Natural History.
Buenos Aires, . . Musée de la Plata.
Buffalo, ... Society of Natural Sciences.
Cambridge, . . . Museum of Comparative Zoology.
Córdoba, ... Academia Nacional de Cienciias de la Républica Argentina.
Davenport, . . . Academy of Natural Siences.
Granville, ... Denison University.
Madison, ... Wisconsin State Agricultural Society.
New-Haven, . . Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-York, . . . Academy of Sciences.
» American Geographical and Statistical Society.
Philadelphia, . . Academy of Natural Sciences.
» American Philosophical Society.
» Entomological Society.
» Second Geological Survey of Pennsylvania.
Saint-Louis, . . Academy of Science.
Salem, ... American Association for the Advancement of Science.
» Essex Institute.
San-Francisco, . California Academy of Natural Sciences.
› Lick Observatory.
Washington, . . Departement of Agriculture.
» National Academy.
» Naval Observatory.
Washington, . . U. S. Geological Survey.
» Smithsonian Institution.
» U. S. Chief Signal Office.

In **Asia**:

Batavia, ... Magnetical and Meteorological Observatory.
Tokio, ... University.

In **Australia**:

Melbourne, . . . Roy. Society of Victoria.
Sidney, ... Linnean Society of New-South Wales.
» Royal Society.

In **Europa**:

Aberdeen, ... University.
Cambridge, . . . Observatory.
» Philosophical Society.
Dublin, ... Roy. Dublin Geological Society.
» Roy. Irish Academy.
Edinburgh, . . . Botanical Society.
› Geological Society.
» Physical Society.
› Roy. Observatory.
› Royal. Society.
Greenwich, . . . Roy. Observatory.
Liverpool, ... Biological Society.
London, ... Linnean Society.
» Natural History Museum.
› Roy. Astronomical Society.
» Roy. Institution of Great Britain.
» Roy. Microscopical Society.
» Royal Society.
» Zoological Society.
Manchester, . . . Literary and Philosoph. Society.

Amsterdam, . . . Kon. Akademie van Wetenschappen.
» Kon. Zoologisch Genootschap (Natura Artis Magistra).
Delft, ... Ecole Polytechnique.
Harlem, ... Société Teyler.
» Société Hollandaise des Sciences.

Bruxelles, ... Académie Roy. des Sciences, des Lettres etc.
» Observatoire Royal.
» Societé Entomologique de Belgique.
» Societé Malacologique de Belgique.
» Societé Roy. de Botanique.

Bordeaux, ... Société des Sciences physiques et naturelles.
Caën, ... Société Linnéenne de Normandie
Cherbourg, . . . Société des Sciences naturelles.
Dijon, ... Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Lyon, ... Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
» Société d'Agriculture, d'Histoire naturelle etc.
» Société Linnéenne.
Marseille, ... Faculté des Sciences.
Montpellier . . . Academie des Sciences et Lettres
Nancy, ... Société des Sciences naturelles.
Paris, ... Académie des Sciences.
» Ecole Polytechnique.
» Musée Guimet.
» Observatoire Astronomique.
» Société Mathématique de France.

Bern, ... Société Helvétique des Sciences naturelles.
Genève, ... Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Lausanne, ... Société Vaudoise des Sciences naturelles.
Zürich, ... Naturforschende Gesellschaft.

Barcelona, . . . Real Academia de Ciencias y Artes.

Bologna, ... R. Accademia delle Scienze.
Genova, ... Museo civico di Storia Naturale.
Milano, ... Reale Instituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Modena, ... R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.
Napoli, ... R. Accademia delle Scienze.
Palermo, ... Società di Scienze Naturali ed Economiche.
Pisa, ... Società Toscana di Scienze Naturali.
Roma, ... R. Accademia dei Lincei.
Torino, ... R. Accademia delle Scienze.

Helsingfors, . . Finska Vetenskaps Societeten.
» Societas Pro Fauna et Flora Fennica.
Jurjew (= Dorpat) Meteorologisches Observatorium.
» Naturforscher Gesellschaft.
» Observatoire impérial.
Kiev, ... Université imp. de St. Wladimir.
Moscou, ... Société imp. des Naturalistes.
Pulcowa, . . . Observatoire impérial.
St Pétersbourg, Académie imp. des Sciences.
» K. Botanischer Garten.
» Observatoire physique central de Russie.

Berlin, ... K. Preuss. Akademie der Wissenschaften.
» Physikalische Gesellschaft.
» Physikalisch-technische Reichsanstalt.
» Redaktion des Archiv der Mathematik und Physik.
Braunschweig, . Verein für Naturwissenschaft.
Bremen, ... Naturwissenschaftlicher Verein.

Breslau, ... Schlessische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Brünn, ... Naturforschender Verein.
Buda-Pest, . . Société Roy. Hongroise des Sciences naturelles.
Cracovie, ... Académie des Sciences.
Dürkheim, . . . Naturwissenchaftlicher Verein. »Pollichia».
Frankfurt am Main, Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.
Frankfurt a.Oder. Naturwissenschaftlicher Verein.
Giessen, ... Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Greifswald, . . Naturwissenschaftlicher Verein von Neu-Vorpommern und Rügen.
Göttingen, . . . K. Gesellchaft der Wissenschaften.
Halle, ... K. Leopold. Carol. Academie der naturforscher.
» Naturforschende Gesellschaft.
Hamburg, . . . Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung.
Heidelberg, . . Naturhistorich-medicinischer Verein.
Innsbruck, . . . Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein.
Jena, ... Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.
Kassel, ... Verein für Naturkunde
Kiel, ... Naturwissenschaftlicher Verein.
Königsberg, . . K. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Leipzig, ... Astronomische Gesellschaft.
» Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.
» K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
München, . . . K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.
» Hof- u. Staats-Bibliothek.
Osnabrück . . . Naturwissenschaftlicher Verein.
Prag, ... K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Presburg, . . . Verein für Naturkunde.
Regensburg, . . K. Bayerische botanische Gesellschaft.
Stuttgart, . . . Verein für vaterländische Naturkunde in Würtenberg.
Ulm, ... Verein für Kunst und Alterthum.
Wien, ... K. k. Akademie der Wissenschaften.
» K. k. Geologische Reichsanstalt.
» K. k. Naturhistorisches Hofmuseum.
» K. k. Sternwarte.
» K. k. zoologisch-botanische Gesellschaft.
» Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kentnisse.
Wiesbaden, . . Verein für Naturkunde in Nassau.

Kjöbenhavn, . . Carlsberg Laboratoriet.
» K. Danske Vidensk abernes Selskab.
» K. Nordiske Oldskrift-Selskab.
» Naturhistoriske Forening.
» Universitets Bibliotheket.
Reykjavik, . . . Islands Stifts-Bibliothek.

Bergen, ... Museum.
» Observatorium.
Christiania, . . Observatorium.
» Universitets Bibliotheket.
» Videnskabs-Selskabet.
Tromsö, ... Museum.
Trondhjem, . . K. Norske Videnskabers Selskab.

Göteborg, . . . K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhället.
Lund, ... K. Fysiografiska Sälllskapet.
Stockholm, . . . Geologiska Byrån.
» K. Vetenskaps-Akademien.
» K. Vitterhets-, Historie- och Antiqvitets-Akademien.

Upsaliæ, die 21 mensis Maji anni MDCCCXCVIII.

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ

VOL. XVII

FASC. I.

1896.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUN 4 1928
NATIONAL MUSEUM

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ

VOL. XVII

FASC. I

1896.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUN 4 1928
NATIONAL MUSEUM

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXCVI.

INDEX

HUJUS FASCICULI.

1. Sectio Physico-Mathematica:

		Pag.	Tab.
I.	V. Carlheim-Gyllensköld: Détermination des Eléments magnétiques dans la Suède méridionale pendant l'année 1892	1—82.	
II.	K. Ångström: Ueber eine einfache Methode zur photographischen Darstellung des ultrarothen Spektrums	1—4.	I.

2. Sectio Medica et Historiæ Naturalis:

I.	C. Hammarberg: Studien über Klinik und Pathologie der Idiotie nebst Untersuchungen über die normale Anatomie der Hirnrinde	1—126.	I—VII.

SECTIO PHYSICO-MATHEMATICA.

DÉTERMINATION

DES

ÉLÉMENTS MAGNÉTIQUES

DANS LA SUÈDE MÉRIDIONALE

PENDANT L'ANNÉE 1892

PAR

V. CARLHEIM-GYLLENSKÖLD.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 20 Octobre 1894).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1896.

Préface.

Le Mémoire qui suit contient les résultats d'un voyage entrepris dans l'année 1892 dans le but de déterminer les éléments magnétiques dans la Suède méridionale. Déjà six ans plus tôt, en 1886, j'avais commencé mes études de la distribution du magnétisme terrestre en Suède, et j'ai consigné les résultats de ce voyage dans un Mémoire qui a été inséré au XXIIIe tome des Mémoires de l'Académie de Stockholm.

On sait qu'un grand nombre d'observations magnétiques avaient été effectuées en Suède avant moi par Ångström, *par* Arwidsson, *par* Forssman, *par M.* Lundquist, *et surtout par M.* Thalén. *Pour la construction des cartes magnétiques de la Suède méridionale, j'ai voulu tirer parti des observations antérieures.*

La réduction des anciennes observations à une époque commune est un travail long et pénible; j'y ai consacré un Mémoire spécial, portant le titre **Mémoire sur le magnétisme terrestre dans la Suède méridionale** *qui a été publié dans le Tome XXVII, n° 7, des Mémoires de l'Académie des Sciences de Stockholm; cependant, pour permettre au lecteur de juger de la valeur des résultats obtenus, j'ai cru devoir donner quelques détails sur les observations; c'est à quoi sera consacré le présent Mémoire.*

Table des matières.

I. — Instruments et méthodes d'observations . . . . . p. 1.

§ 1. Déterminations du temps. — § 2. Détermination du méridien géographique. — § 3. Détermination du méridien magnétique. — § 4. Déterminations de la composante horizontale. — § 5. Détermination de l'inclinaison. — § 6. Réduction des observations au 1er septembre 1892.

II. — Description des lieux d'observations . . . . . p. 14.

III. — Observations faites pour déterminer les éléments du magnétisme terrestre . . . . . » 35.

Tableau I. Marche du chronomètre Linderoth nº 22 . . . . . » 36.

» II. Observations de l'azimut du soleil. (Ce tableau est accompagné d'une liste des mires choisies pour l'observation du soleil) . . . . . » 37.

» III. Observations de la déclinaison magnétique . . . . . » 55.

» IV—V. Détermination des coefficients constants log *C* . . . . . » 59.

» VI—VII. Observations de la composante horizontale faites avec les aimants nos 1 et 2. (Observations complètes) . . . . . » 60.

» VIII—IX. Observations de la composante horizontale faites avec les aimants nos 1 et 2. (Observations de déviation ou d'oscillation) . . . . . p. 61, 63.

» X—XI. Détermination du log *C* des déflecteurs *A* et *B* . . . . . » 65, 66.

» XII—XIII. Observations de la composante horizontale faites avec les déflecteurs *A* et *B* . . . . . » 67, 69.

» XIV. Détermination des corrections des aiguilles d'inclinaison dues au défaut d'équilibration . . . . . » 71.

» XV. Observations de l'inclinaison magnétique . . . . . » 73.

» XVI. Valeurs absolues des éléments magnétiques au 1er juillet 1892 . . . . » 79.

Errata.

P. 7, l. 11 en remontant *au lieu de* T, *lisez* τ.

P. 8. Une erreur s'est glissée dans l'indication des aimants employés par MM. Thalén et Solander, pour leurs déterminations absolues de l'intensité. M. Thalén s'est servi de l'aimant n° 1 appartenant au théodolite de voyage de Lamont (*Mémoires de l'Académie de Stockholm*, t. X, n. 12), tandis que l'aimant employé par M. Solander appartient au grand théodolite de Lamont; il est marqué par le chiffre 1. (*Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, t. XIV, 2e fasc., n° VII).

P. 12, l. 12 en remontant *ajouter* dans la dernière colonne du tableau $+2'.5$.

P. 13, l. 11 *au lieu de* $+0.015$, *lisez* -0.015.

I. — Instruments et méthodes d'observations.

Les Appareils employés pour les déterminations magnétiques ont été décrits précédemment, ainsi que les méthodes d'observation et de réduction[1]); nous n'y reviendrons pas ici. Deux points seulement méritent un examen plus détaillé: c'est la détermination de l'état du chronomètre qui a été faite à l'aide du télégraphe, et la détermination de l'inclinaison magnétique qui a toujours été faite à l'aide de la boussole d'inclinaison de Dover, sans renverser les pôles de l'aiguille.

§ 1. **Déterminations du temps.** — Pour noter le temps j'ai employé le chronomètre Linderoth n° 22 loué à l'Atelier de M. Linderoth.

L'administration des télégraphes avait bien voulu mettre les lignes télégraphiques et téléphoniques de l'Etat à ma disposition, ce qui m'a dispensé de faire des déterminations du temps. Toutes les comparaisons télégraphiques ont été faites avec le chronomètre Frodsham n° 3194 de l'Observatoire de Stockholm réglé d'après le temps moyen. En prenant le soin de transmettre les signaux dans les deux directions et d'observer les coïncidences aux deux extrémités de la ligne, nous avons pu déterminer le temps d'armature, qui est égal à la demi-différence des résultats obtenues dans les deux directions. Voici les différences obtenues:

	Diff.
28 juill., entre Kristianstad et Stockholm	$-0^s.15$
10 août, entre Strömstad et Stockholm	$+0.05$;

Pour le téléphone le temps d'armature parait être un peu plus long, comme on peut le voir par le petit tableau suivant:

[1]) *Mémoires de l'Académie de Stockholm*, t. XXIII, n. 6, 1889.

	Diff.
22 juin, à Stockholm	+ 0^s.2
16 juill., entre Hildesborg et Lund	+ 0.2
20 sept., à Stockholm	0.0
26 sept., »	+ 0.25
10 oct., à Upsal	+ 0.2

La moyenne donne un temps d'armature de + 0^s.08, quantité très petite qui peut encore être négligée.

Le tableau I inséré à la fin du Mémoire contient les résultats de toutes les déterminations du temps. La dernière colonne du tableau indique le pendule qui a servi aux comparaisons, et la méthode suivie dans l'observation.

§ 2. **Détermination du méridien géographique.** — L'azimut de la mire a été déterminé le plus souvent par l'observation du soleil, au moyen du petit instrument de passage appartenant au théodolite. Quelquefois quand le soleil s'était déjà couché ou qu'il ne s'était pas encore élevé au moment des observations, j'ai eu recours à la lune ou aux autres astres convenables pour la détermination du méridien.

A l'occasion de mon premier voyage, l'oculaire de la lunette de passage était muni de cinq fils d'araignée irrégulièrement disposés, ce qui a nécessité une réduction au fil du milieu du temps de passage observé à chaque fil. J'y ai substitué un micromètre oculaire photographié sur verre, sorti des Ateliers de M. Duboscq et que M. Gyldén avait bien voulu mettre à ma disposition. Les divisions de ce micromètre sont sensiblement équidistantes, ce qui m'a permis de prendre simplement la moyenne des temps de passage observés à des divisions placées symétriquement d'un côté et de l'autre de la division du milieu. Les distances des divisions au milieu de l'échelle ont été déterminées par M. Ekholm [1]); en multipliant les nombres trouvés par lui avec le facteur 2,84, déduit de l'observation des passages de 10 étoiles au méridien dans notre lunette, on trouve les distances au milieu de l'échelle (div. 50) que voici:

40^d	− 55^s.88	47^d	− 16^s.73	54^d	+ 22^s.35
41	− 50.34	48	− 11.22	55	+ 28.06
42	− 44.69	49	− 5.57	56	+ 33.80
43	− 39.10	50	0.00	57	+ 39.37
44	− 33.48	51	+ 5.77	58	+ 44.85
45	− 27.80	52	+ 11.34	59	+ 50.16
46	− 22.21	53	+ 16.76	60	+ 55.67

[1]) *Observations faites au Cap Thordsen*, t. I, n. 2, p. 20, 1891.

Lorsque l'état du temps l'a permis, j'ai toujours observé le passage des deux bords du soleil aux divisions suivantes: 46, 48, 50, 52, 54.

Les mêmes méthodes de réduction ont été adoptées que dans mon premier Mémoire. Soient L_0 et L les lectures du cercle qui correspondent au méridien et à l'azimut A, b l'inclinaison de l'axe horizontal par rapport à l'horizon, positive si le côté de l'axe à gauche est le plus élevé, c l'erreur de collimation, positive si l'angle que l'axe optique fait avec la portion de l'axe du côté de la lunette est plus petit que 90°; on aura en désignant par z la distance zénithale de l'astre,

$$A = -(L - L_0) \pm c \operatorname{cosec} z - b \cot z ,$$

où il faut prendre: le signe supérieur quand la lunette est à droite, le signe inférieur, quand la lunette est à gauche (il y a une faute d'impression dans mon premier Mémoire; toutefois, c'est la formule exacte qui a été employée pour les réductions effectuées.)

Le tableau II qu'on trouvera inséré à la fin du Mémoire donne les résultats de toutes mes déterminations de l'azimut.

La première colonne contient les lieux d'observations et leurs coordonnées géographiques déduites de la Carte de l'état-major.

La deuxième et la troisième colonne donnent le temps de passage de l'astre observé au milieu de l'échelle du micromètre, correspondant à la division 50; la colonne suivante indique le nombre des passages aux divisions spéciales qui a servi à former la moyenne.

La sixième colonne indique l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette, déterminée à l'aide du niveau. En prenant la précaution de retourner l'instrument sans enlever la lunette de ses coussinets, je suis parvenu à éviter presque toujours les très grandes inclinaisons.

La huitième colonne indique la position de la lunette, L. D. signifie lunette à droite, L. G., lunette à gauche; dans les cas, peu nombreux du reste, où les circonstances n'ont pas permis d'observer le soleil ou que l'observation en a été incomplète, on a ajouté l'indication de l'astre et du bord observé, I désignant le premier bord, II le deuxième bord.

La dernière colonne du tableau indique la correction du chronomètre u par rapport au temps local, et l'erreur de collimation de la lunette de passage c, qui a toujours été déterminée à chaque observation, en observant le même objet terrestre dans différentes positions de la lunette.

L'erreur probable de mes déterminations de l'azimut absolu est en général comprise entre 0′.2 et 0′.6.

Azimuts déterminés indirectement. — Dans deux ou trois cas, l'état du temps n'a pas permis de déterminer directement l'azimut par des observations astronomiques: à Bäckviken sur l'île de Hveen et à Billesholms grufva; enfin à Kattarp le ciel était très voilé et le soleil apparaissait en forme d'une tache blanchâtre à peine appréciable.

En se reportant aux cartes de l'état-major en trouve approximativement:

Azimut de la mire, à Bäckviken . . . . . $A = 300°.0$ [1])
» à Billesholms grufva . . . » = 273.7,

Enfin, à Kattarp, je trouve d'après la Carte, en faisant usage de la mire n. 42, $A = 244°.8$, et à l'aide de la mire n. 43, $A = 248°.3$, soit en moyenne $A = 246°.6$. Cette valeur s'accorde bien avec la valeur déduite des observations du soleil, soit $A = 244°.5$, qui a été employée pour le calcul de la déclinaison.

L'azimut de la mire à Stockholm a été déterminé deux fois, le 2 juillet 1886 et le 19 mars 1889. On a trouvé:

2 juill. 1886 . . . . . $A = 324° 0'.4$,
19 mars 1889 . . . . . » = 323 58.6 ,

dont je prends la moyenne $A = 323° 59'.5$.

A un certain nombre de points secondaires, l'azimut a été déduit indirectement en se reportant à un point voisin où l'azimut absolu était connu par les observations du soleil. C'est le cas à Klippan, Åstorp, Grefvie, Laholm, Skallinge, Bolmen, Åsa et Marstrand.

Soit A' l'azimut de la mire, vu du premier point, A'' l'azimut cherché, ϖ l'angle de la parallaxe $A'' - A'$, en sorte que

$$A'' = A' + \varpi \ .$$

L'angle ϖ se déduit de la formule

$$\varpi = \frac{1}{\sin 1'} \frac{e}{d} \sin (A'' - A) \ ,$$

où d désigne la distance de la mire, e la distance mutuelle des deux stations, A l'azimut de la première station vu de la seconde. En confondant les angles A' et A'' sensiblement égaux, on peut écrire

[1]) La carte de la ville de Landskrona, publiée par G. Ljunggren en 1853, donne le même résultat.

$$\varpi = \frac{1}{\sin 1'} \frac{e}{d} \sin (A' - A) ,$$

ou encore

$$\varpi = \frac{e}{d} (A' - A) ,$$

en exprimant $A' - A$ en minutes d'arc.

Je trouve la correction $A'' - A'$ à appliquer à l'azimut A' de la première station:

	$A'' - A'$
Klippan II	+ 6'.2
Laholm II	— 10.4

Dans tous les autres cas, la correction n'a pas atteint le dixème d'une minute et peut être négligée.

§ 3. **Détermination du méridien magnétique.** — L'erreur de collimation du miroir de l'aimant mobile a été déterminée deux fois: à l'Observatoire magnétique de Copenhague[1]), le 11 juillet 1892; à l'Observatoire magnétique d'Upsal, le 11 novembre même année.

M. HJORT a bien voulu me communiquer la valeur absolue de la déclinaison à l'Observatoire de Copenhague ainsi que l'azimut de la mire employée, qui sont:

Azimut de la mire . . . . . N. 16° 53'.5 E .
Déclinaison absolue . . . . . $\delta = 11° 0'.4 + 1'.2 (d - 595.0)$,

d étant le nombre de divisions lu sur l'échelle des variations.

La valeur absolue de la déclinaison à l'Observatoire magnétique d'Upsal résulte d'une détermination faite par moi-même le 10 novembre 1892 avec un théodolite de LAMONT portant le n° 14 et appartenant au Bureau général des Cartes et des plans. (*K. Sjökarteverket*). Cette détermination, dont nous renverrons la publication détaillée à une autre occasion, à donné $\delta = 7°52'.8$, correspondant à la division 190 de l'échelle des variations. La formule de variation devient, en adoptant le facteur de M. THALÉN,

$$\delta = 7°52'.8 + 0'.677 (d - 190) .$$

L'azimut de la mire était $A = 51°31'.3$.

---

[1]) Je saisis cette occasion pour remercier M. PAULSEN pour la bienveillance avec laquelle il a mis l'Observatoire à ma disposition.

Les observations ont donné les résultats suivants:

Date. 1892.	Heure T. de Copenh.	Lecture du repère.	Lecture de l'aiguille.	Torsion. ϑ.	Erreur prob. de ϑ.	Variat. de la déclinais.	Erreur de collimation conclue.
11 juill.	9^h17^mm.*	79° 53′.4	107° 0′.7	+ 6′.8	± 0′.7	590d.2	+ 34′.0
	T. civil.						
11 nov.	0 41 s.**	159 34.0	38 11.7	+ 9.8	± 0.6	186.3	+ 33.9
	3 5 s.		38 12.2			186.6	

* Cette observation est la moyenne de 13 pointés.

** Chaque série résulte de dix pointés.

J'ai adopté pour la réduction des observations la valeur $c = + 34'.0$.

Les résultats des observations de déclinaison sont consignés dans le tableau III inséré à la fin du Mémoire.

§ 4. **Déterminations de la composante horizontale.** — La composante horizontale a été déduite le plus souvent des observations de déviations seulement; à un nombre limité de stations principales on a fait des déterminations complètes de l'intensité, comprenant des observations de déviations et d'oscillations de l'aimant déviant.

L'aimant n° 1 de LAMONT dont j'ai fait usage dans mon premier voyage n'était pas des meilleurs: en effet, son magnétisme était très inégalement distribué, en sorte que la correction due au défaut de centrage du barreau acquérait une valeur considérable. Je n'en ai pas fait usage dans mon présent voyage, où je me suis servi d'un nouvel aimant fabriqué par M. EDELMANN à Munich, que j'appellerai désormais l'aimant n° 1.

Le coefficient de température du nouvel aimant a été déterminé à l'Observatoire magnétique d'Upsal, en observant les déviations α_0, α_1 ... correspondant aux températures t_0, t_1, ...

Les expériences ont donné les résultats suivants:

Détermination du coefficient de température de l'aimant n. 1. d'EDELMANN.

11 juin 1892.

Méridien corrigé des variations . . . . . 278° 7′1″

Heures des lectures.	Lectures corrigés des variat.	Tempér. centigr.	Coefficient A
0^h14^ms.	255° 35′.22″	+ 6°.42	
0 30	50 19	52.15	0.000232
0 45	36 11	9.58	232
0 59	53 34	62.75	223
1 9	35 23	3.38	222
1 20	52 25	56.12	216
1 31	23 24	7.18	218
1 39	33 43	59.85	

Coefficient moyen = 0.000224.

Voici les formules qui ont servi au calcul de la composante horizontale d'après les observations complètes:

$$\log H = \log C_1 - \frac{1}{2}\log \sin \alpha_1 - \log T_1 - 53.2\,(t - t') - 7.6\,t\ ,$$

$$\log H = \log C_2 - \frac{1}{2}\log \sin \alpha_2 - \log T_2 - 48.6\,(t - t') - 7.6\,t\ ;$$

d'après les observations de deviations:

$$\log H = \log C_1 + \log \mu_1 - \log \sin \alpha_1 - 121.6\,t\ ,$$

$$\log H = \log C_2 + \log \mu_2 - \log \sin \alpha_2 - 112.4\,t\ ;$$

enfin, d'après les observations d'oscillations:

$$\log H = \log C_1 - \log \mu_1 - 2\log T_1 + 106.4\,t'\ ,$$

$$\log H = \log C_2 - \log \mu_2 - 2\log T_2 + 97.2\,t'\ ;$$

α désignant l'angle de déviation corrigé du défaut de centrage du barreau, T la durée d'une oscillation ramenée à des arcs très petits et corrigée de la marche du chronomètre, t et t' les températures centigrades correspondant aux expériences de déviation et d'oscillations. C et μ enfin désignent les quantités

$$C = \pi K \sqrt{\frac{2\left(1+\frac{a}{R^2}\right)}{R^3}}\left(1-\frac{T}{2}\right)\ ,\quad \mu = \frac{M}{\pi K}\sqrt{\frac{2\left(1+\frac{a}{R^2}\right)}{R^3}}\left(1+\frac{T}{2}\right)\ ;$$

les indices 1 et 2 se rapportent aux deux aimants de la boussole.

La valeur du coefficient $\log C$ pour chacun des aimants a été déterminée dans les Observatoires magnétiques d'Upsal et de Copenhague, où l'intensité absolue est connue par les travaux de MM. THALÉN, SOLANDER et PAULSEN.

On sait que la valeur absolue de l'intensité dépend de l'instrument employé. Toutes les valeurs de l'intensité données dans ce Mémoire ont été ramenées à la valeur obtenue par M. THALÉN avec le grand théodolite de LAMONT appartenant à l'Institut de Physique de l'Université d'Upsal; M. THALÉN s'est servi pour cette détermination de l'ai-

mant n. 1 du théodolite. (*Mémoires de l'Académie de Stockholm*, t. X, n. 12, 1872.)

Les comparaisons faites par M. SOLANDER permettent de ramener à ce »standard» les observations faites par lui-même à Upsal et à l'Observatoire de Copenhague. (*Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis*, 3e série, t. XV, 2e fasc., n. III.)

L'intensité absolue à l'Observatoire d'Upsal est donnée par les observations de M. THALÉN et de M. SOLANDER.

Les observations de M. SOLANDER avec le grand théodolite de LAMONT appartenant à l'Université (aimant n. 2) ont donné, en employant les constantes de M. SOLANDER,

	U
1892 avril 13	0.16208
» » 19	0.16211
» mai 8	0.16207
» » 11	0.16210

Soit en moyenne $H = 0.16209.0$ rapporté à la division 180 de l'échelle des variations.

Une seconde détermination faite en juin même année dans le but d'obtenir une comparaison avec M. THALÉN a donné:

1892 juin 1	0.16237	0.16235.5
» » »	0.16238	
» » 3	0.16233	
» » »	0.16234	

Les observations simultanées de M. THALÉN avec l'aimant n. 1 du grand théodolite ont donné, le 2 juin,

$$H = 0.16294 ,$$

et une détermination avec le théodolite de voyage, le même jour,

$$H = 0.16313 .$$

On en tire

Différence: Théodolite de voyage de M. THALÉN — SOLANDER $+ 78.10^{-5}$ unités C.G.S.
» Grand théodolite, aimant n. 1 — SOLANDER $+ 59.10^{-5}$ »

Une nouvelle détermination absolue faite par M. SOLANDER le 18 octobre 1892 avec l'aimant n. 2 du grand théodolite de LAMONT a donné:

Heure.	α	t	ε	Heure.	T	t'	ε'	H	$\log \mu$
1^h50^m s.	$38^0 28' 52''$	$4^0.6$	$172^d.0$	0^h57^m s.	$7^s.80922$	$3^0.8$	$175^d.8$	0.16218	3.377164
2 15 s.	38 26 38	4.2	178.3	3.30 s.	7.80140	3.7	189.0	0.16221	3.377216

En moyenne $H = 0.16219.5$.

En appliquant à cette observation la correction trouvée plus haut, on aura pour le grand théodolite de LAMONT, aimant n. 1, $H = 0{,}16278$.

La valeur absolue de la composante horizontale à Copenhague est donnée par la formule suivante qui m'a été communiquée par M. HJORT:

$$H = 0.17345 + 0.000035\,(d - h - 50),$$

d et h désignant les lectures faites au déclinomètre et à l'unifilaire.

Une comparaison faite par M. SOLANDER avec un petit théodolite de voyage (employé sur l'expédition de la Frégate Eugénie en 1853) a donné

Différence: SOLANDER — Copenhague . . . . . $-\ 8.10^{-5}$ unités C.G.S.
» SOLANDER — Grand théodolite de LAMONT, aim. 1 $-\ 59.10^{-5}$ »

d'où l'on déduit

Différence: Grand théodolite de LAMONT — Copenhague . . $+\ 51.10^{-5}$ »

Cette correction a été appliquée à la valeur de H telle qu'elle résulte de la formule de M. HJORT.

Ces valeurs de l'intensité absolue ont servi à calculer les valeurs de la constante $\log C$ par chacun des aimants qu'on trouvera réunis dans le tableau IV inséré à la fin du Mémoire. Les moyennes adoptées sont les suivantes:

$$\log C_1 = \bar{1}.562258\,,$$

$$\log C_2 = \bar{1}.606516\,.$$

Observations complètes faites pendant le voyage. — Les moments magnétiques des aimants pendant le voyage ont été déterminés de temps en temps par des observations complètes.

Les résultats de ces déterminations sont consignés dans les tableaux V et VI.

Le moment de l'aimant n. 1 est assez bien représenté par la formule

$$\log \mu_1 = \bar{1}.407492 - 50.1\,(T - \text{Août } 8.4)\,,$$

où le terme variable est donné en unités du sixième ordre décimal.

Le moment de l'aimant n. 2 paraît avoir été sensiblement constant jusqu'au 4 juillet; je trouve avant cette date en moyenne

$$\log \mu_2 = \bar{1}.387516\,.$$

Après le 4 juillet, je représente la diminution par la formule

$$\log \mu_2 = \bar{1}.386528 - 18.9\ (T - \text{Août } 24.4)\ .$$

Déflecteurs de comparaisons. — A plusieurs occasions nous avons fait usage des deux déflecteurs de comparaisons A et B, en calculant l'intensité absolue d'après les formules:

$$\text{Déflecteur } A \quad . \quad . \quad \log H = \log C - \log \sin \alpha - 14.5\, t - 4.34 \frac{\varepsilon}{H}\ ,$$

$$\text{Déflecteur } B \quad . \quad . \quad \log H = \log C - \log \sin \alpha - 149.0\, t - 4.34 \frac{\varepsilon}{H}\ ,$$

où ε est exprimé en unités du cinquième ordre décimal. (Voir mon premier Mémoire, p. 22.)

Le facteur constant C est déduit de comparaisons avec les mesures absolues faites avec les aimants.

Les tableaux X et XI reproduisent les résultats de toutes les observations faites pour déterminer les constantes C.

Dans la colonne 7 on trouvera $\log C$ calculé en employant les H fournies par les observations avec les aimants, et corrigées des variations indiquées par les observations de Copenhague.

Ces nombres sont assez bien représentés par les formules:

$$\text{Déflecteur } A \quad . \quad . \quad . \quad \log C = \bar{2}.782626 - 29.7\ (T - \text{juill. } 19.0)\ ,$$

$$\text{Déflecteur } B \quad . \quad . \quad . \quad \log C = \bar{2}.917738 - 23.9\ (T - \text{juill. } 19.0)\ ;$$

où le terme variable est exprimé en unités du sixième ordre décimal.

Les écarts entre les valeurs observées et calculées sont présentés dans la dernière colonne des tableaux cités.

Il faut remarquer que le moment magnétique ne paraît pas avoir diminué aussi régulièrement que le supposent les formules; ainsi, en particulier depuis le 27 jusqu'au 30 juillet, le déflecteur A donne des valeurs de la composante inférieures à celles de l'autre déflecteur de 33 unités du cinquième ordre decimal; après le 22 août jusqu'à la fin du voyage les résultats obtenus avec le déflecteur A sont plus élevés d'environ 27 unités du cinquième ordre. Or les observations faites pendant le voyage ne sont pas assez précises pour justifier l'emploi d'une formule plus compliquée.

§ 5. **Détermination de l'inclinaison.** — Pour observer l'inclinaison je m'étais servi dans mes premiers voyages de la méthode indirecte, en observant la déviation produite par deux barreaux de fer doux. Or, les résultats de mon second voyage ne s'accordant pas suffisamment avec ceux de la première, j'ai dû abandonner cette méthode, qui ne paraît guère susceptible que d'une grossière approximation, et me tenir exclusivement à la boussole d'inclinaison.

Pour corriger l'erreur qui provient d'une suspension mal équilibrée, on a recours ordinairement au procédé connu qui consiste à désaimanter l'aiguille et à la réaimanter en sens opposé après quoi on recommence toutes les mesures.

Cette méthode exige un temps double de celui d'une seule observation; j'y ai renoncé entièrement en observant l'aiguille dans un état seulement et en déterminant une fois pour toutes l'erreur provenant d'une suspension défecteuse par une série de plusieurs désaimantations et réaimantations de l'aiguille.

Soit J l'inclinaison vraie dans le plan où se meut l'aiguille, J' l'inclinaison apparente donnée par la ligne des pointes de l'aiguille; F la composante du champ terrestre dans le plan de l'aiguille; p le poids de l'aiguille, M son moment magnétique, enfin d la distance du centre de gravité de l'aiguille à son point de suspension. Les angles de la ligne des pointes avec l'axe magnétique et la ligne d étant supposés très petits, la condition d'équilibre est

$$pd \cos J' = FM \sin (J - J') .$$

Les observations préliminaires font connaître la correction $J - J'$ à appliquer à l'inclinaison apparente J' pour une valeur déterminée J_1 de l'angle J. En supposant que l'état de l'aiguille reste le même, on pourra déterminer une fois pour toutes la correction

$$J - J' = \frac{pd}{M} \cdot \frac{\cos J'}{F} .$$

La correction étant fonction de la force totale F et l'inclinaison apparente J', il y a lieu d'étudier les changements qu'elle subit quand on se transporte d'un lieu où ces quantités ont les valeurs F_1, J_1 à un autre lieu où elles acquièrent les valeurs F_2, J_2.

En divisant membre à membre les équations d'équilibre correspondant à ces deux cas et confondant les sinus des angles très petits $J - J'$ aux arcs, on a:

$$J_2 - J_2' = \frac{F_1 \cos J_2}{F_2 \cos J_1}(J_1 - J_1') = \frac{H_1 \cos^2 J_2}{H_2 \cos^2 J_1}(J_1 - J_1') .$$

La plus grande valeur de $J_1 - J_1'$ dont on fera usage est $-4.'4$, obtenue pour l'aiguille n. 1 à Upsal le 12 juin. Je cherche quelle sera la valeur de cette correction à Copenhague? Les valeurs de la composante et de l'inclinaison sont $H_1 = 0.16298$, $J_1 = 70°50.'3$ à Upsal, et $H_2 = 0.17336$, $J_2 = 68°50.'4$ à Copenhague; on en tire $J_2 - J_2' = -5.'0$.

L'erreur qu'on commet en appliquant la correction trouvée à Upsal sans altération aux observations de Copenhague est donc de l'ordre des erreurs d'observation, même dans ce cas, extrêmement défavorable; dans la plupart des cas elle sera de deux ou trois dixièmes d'une minute seulement.

La correction que nous venons de considérer ne reste pas constante: elle subit des altérations lentes et doit être altérée de temps en temps.

Nous avons déterminé cette correction, que nous désignerons par $\Delta\theta$, à cinq stations pendant le voyage. Les résultats de ces observations se trouvent réunis dans le tableau XIV qu'on trouvera plus loin.

En résumé je trouve:

Corrections à appliquer aux indications des aiguilles d'inclinaison.

		Aiguille n. 1.		Aiguille n. 2.	
Lieux.	Date.	Heure. T. civil.	$\Delta\theta$	Heure. T. civil.	$\Delta\theta$
Upsal	juin 12	$2^h.0$ s.	$-4.'4$	$5^h.2$ s.	$+0.'6$
Lund	juill. 18	11.4 m.	$+2.1$	1.5 s.	-1.0
»	» »	»	$+0.3$	»	
Qviinge backe	» 30	6.8 s.	$+1.7$	8.0 s.	$+2.0$
»	» »	»	$+1.5$	»	$+1.5$
Fröslida	août 19	3.8 s.	$+4.0$	»	»
»	» »	»	$+3.0$	»	»
Getinge	» 21	»	»	10.2 m.	$+2.9$
»	» »	»	»	»	$+2.9$
Upsal	oct. 24	7.8 s.	$+3.3$	oct. 25.11.3 m.	$+1.8$
»	» »	»	-3.0		-2.1

Dans l'intervalle de ces observations la différence entre les aiguilles a varié linéairement par rapport au temps: il doit en être de même des corrections de chacune des aiguilles. J'ai posé en conséquence:

Pour l'aiguille n. 1:

12 juin—18 juill. . . . . $\Delta\theta = -4.'4 + 0.'18\ (T - 12\ \text{juin})$;
18—30 juill. . . . . $\Delta\theta = +0.3 + 0.115\,(T - 18\ \text{juill.})$;
30 juill.—19 août . . . . $\Delta\theta = +1.5 + 0.125\,(T - 30\ \text{juill.})$;
19 août—24 oct. . . . . $\Delta\theta = +3.0 + 0.005\,(T - 19\ \text{août})$;
Après le 24 oct. . . . . $\Delta\theta = -3.0$.

Pour l'aiguille n. 2:

12 juin—18 juill. . . . . $\Delta\theta = +0.'6 - 0.'045\,(T - 12\ \text{juin})$;
18—30 juill. . . . . $\Delta\theta = +2.5 - 0.04\ (T - 18\ \text{juill.})$;
30 juill.—21 août . . . . $\Delta\theta = +1.5 + 0.065\,(T - 30\ \text{juill.})$;
21 août—24 oct. . . . . $\Delta\theta = +2.9 + 0.015\,(T - 21\ \text{août})$;
Après le 24 oct. . . . . $\Delta\theta = -2.1$.

Ces formules ont servi au calcul des corrections $\Delta\theta$ à chacune des observations en campagne, qu'on trouvera inscrites dans la cinquième colonne des tables des observations de l'inclinaison. (Tableau XV.)

§ 6. **Réduction des observations au 1er septembre 1892.** — Toutes les observations faites en campagne ont été ramenées au 1er septembre 1892 en se reportant aux indications des magnétographes de l'Observatoire de Copenhague, que M. PAULSEN avait eu l'obligeance de me communiquer.

Les tables mensuelles de l'Observatoire de Copenhague ne donnant pas directement les variations de l'inclinaison, on a calculé les variations de cet élément au moyen de la relation connue

$$d\theta = \frac{H\,dZ - Z\,dH}{F^2} ,$$

ou en réduisant en nombres

$$d\theta = 0.0258\,dZ - 0.0668\,dH ,$$

où $d\theta$ est exprimée en minutes d'arc, dZ et dH en unités du cinquième ordre décimal.

Les valeurs des éléments magnétiques à Copenhague au 1er septembre 1892 sont déduites de la demi-somme des valeurs moyennes horaires obtenues pendant les mois d'août et de septembre:

Valeurs des éléments magnétiques à Copenhague au 1er septembre 1891.

	Déclinaison.	Composante horizontale.	Inclinaison.
Mois d'août	10°53.'3	0.17333	68°50.'4
» de septembre . .	10 53.2	0.17338	68 50.4
Au 1er septembre . .	10 53.2	0.17336[1])	68 50.4

[1]) Ces nombres sont rapportés à la valeur normale de l'intensité trouvée par M. THALÉN avec l'aimant n° 1 du grand théodolite de LAMONT.

II. — Description des lieux d'observations.

Les renseignements détaillés qui suivent, permettront, j'espère, de retrouver exactement les divers points où je me suis placé dans mes opérations.

Dans la liste qui suit, les stations ont été classées d'après l'ordre alphabétique. Le nom de chacune des stations est suivi de la date de l'observation faite en ce lieu.

I. **Alfvestad.** (15 août). — Le point d'observation a été choisi dans un champ cultivé, sur le terrain qui domine à l'ouest le bourg; on s'est installé sur un chemin qui passe dans la direction du sud-sud-ouest au nord-nord-est, à 185^{m} à l'ouest du chemin de fer, vis-à-vis la gare, à 100^{m} au sud du point de bifurcation du dit chemin près d'une petite colline surmontée de quelques arbres. — Le point choisi par M. LUNDQVIST en 1869 est à 400^{m} environ dans la direction du nord-nord-ouest.

II. **Alingsås.** (27 août.) — Les observations ont été faites au sud de la ville près d'une ferme appelée Lyckan; on s'est placé dans un champ cultivé à 5^{m} à l'ouest du chemin qui conduit à la ville, à 170^{m} de la route qui suit le bord sud-ouest du chemin de fer, à 50^{m} au nord-est du corps-de-logis, à 10^{m} au sud-ouest d'un grenier en bordure du chemin. — M. LUNDQVIST, vingt-trois années plus tôt, a opéré dans la partie nord de la ville.

III. **Backa.** (23 août.) — On s'est établi dans un champ cultivé en bordure de la route de Gothembourg passant à 135^{m} du chemin de fer en suivant la même direction. Le pied des appareils a été placé près du bord ouest de la route à 120^{m} à l'est de la gare, à 7^{m} au nord de l'avenue qui frappe le côté nord de la propriété appelé Backa n. 3.

IV. **Billesholms grufva.** (9 août.) — Les observations ont été faites à l'est du chemin de fer sur la route de Södra Vram: 1° Dans un champ cultivé, à 15^{m} au sud de la route, à 220^{m} à l'est du chemin de fer, à 145^{m} de l'Hôtel, à 40^{m} à l'est d'une maison d'habitation; 2° Sur la route même à 80^{m} plus loin vers l'est à 25^{m} à l'ouest du point où la route tourne vers le nord et du point de contour d'un petit chemin traversant les champs. — Le ciel est resté couvert toute la matinée du 9 août, et il n'a pas été possible d'observer le soleil. — Les expériences faites à Billesholms grufva n'accusent aucune influence locale du sol; la station est située dans le voisinage immédiat de Söderåsen.

V. **Björketorp.** (25 août.) — Le point d'observation a été choisi vis-à-vis de la gare, sur un chemin qui partant de la gare et traversant les champs cultivés, conduit à une ferme située à 200^{m} environ à l'ouest du chemin de fer. Le pied a été installé à 150^{m} à l'ouest de la gare, à 85^{m} à l'ouest d'une maison d'habitation du service de la gare, à 40^{m} à l'est du chemin qui traverse la ferme en suivant la direction du chemin de fer. — Pendant les observations faites au matin le 25 août, les environs étaient enveloppés par une brume épaisse, qui laissait à peine entrevoir, par moments, la mire choisie pour les observations du méridien géographique. Les observations d'inclinaison, la deuxième surtout, ont été faites un peu à la hâte.

VI. **Bolmen.** (13 août.) — Les observations ont été faites à 200^{m} au nord-est de la gare, vers la limite d'un marais tourbeux. Je me suis établi en deux points: 1° Sur le chemin qui part de la route d'Angelstad à 300^{m} au sud de la gare, dans la direction du nord, à 150^{m} au nord-nord-est de la route d'Angelstad, à 25^{m} au sud d'une barrière, à 15^{m} au nord-est d'un hangar, au point où aboutit le chemin de traverse qui passe la route d'Angelstad à 150^{m} au sud de la gare; 2° A 50^{m} plus loin vers l'ouest-sud-ouest, dans une direction opposée à celle de la mire. (S. 77° O.), à 4^{m} de distance d'un mur de clôture. — Le ciel était très-chargé de nuages; en profitant de quelques éclaircies on a pu prendre 5 pointés de l'astre. L'observation d'inclinaison à la deuxième station à été faite en grande hâte.

VII. **Borgstena.** (26 août.) — On s'est établi à 150^{m} à l'ouest-nord-ouest de la gare (Azimut N. 70° O.), dans un champ cultivé. Les observations d'inclinaison ont été faites à la hâte.

VIII. **Borås öfre.** (25 août.) — Le point choisi se trouve à 250^{m} environ au sud-ouest de la gare, sur le plateau qui domine à l'ouest la ville et la vallée de Viskan; on s'est placé dans un champ moissonné, sur un petit chemin qui, partant de la route de Mejeriet à 175^{m} de distance du pont jeté sur Viskan, conduit dans la direction de l'ouest; à 30^{m} à l'ouest de la route de Mejeriet, à 10^{m} au sud du petit chemin, à 30^{m} au nord d'un rang de magasins. — M. LUNDQVIST avait choisi en 1869 un point situé à 150^{m} environ au nord-ouest du nouveau point.

IX. **Brålanda.** (9 sept.) — Les observations ont été faites à l'est de la gare, dans un champ récolté en bordure du chemin qui partant de la gare conduit à la grand'route d'Åmål à Venersborg. Je me suis établi en deux points: 1° à 130^{m} de la gare à 8^{m} au sud du chemin à 130^{m} de la gare dans la direction d'E. 40° S., à7^{m} à l'est du chemin conduisant à Höga; 2° à 125^{m} plus loin vers le sud, à 70^{m} au sud-ouest de l'avenue de la gare, à 20^{m} à l'ouest d'un ravin où coule un petit ruisseau, à 40^{m} au nord du point où se réunissent trois brauches de ruisseau. — Le ciel étant très chargé de nuages au commencement des observations, ce n'est qu'à travers une éclaircie de courte durée qu'on a pu entrevoir le soleil pendant 4 ou 5 secondes, ce qui a suffi pour prendre un pointé isolé de l'astre. Les observations à la deuxième station ont toutes été faites à la hâte.

X. **Bullerö.** (23 sept.) — Le point choisi se trouve à 80^{m} environ au sud du corps-de-logis; on s'est établi sur la pointe rocheuse à l'ouest du petit port, à 8^{m} au nord de la pointe extrême, à 8^{m} au sud-ouest du pied du pont, à 4^{m} au nord-nord-ouest d'un anneau de fer enfoui dans le rocher.

XI. **Bäckefors.** (7 sept.) — Le point d'observation a été choisi au nord-est de la gare, au bord méridional du chemin qui, traversant la ligne ferrée à 240^{m} au nord de la gare, conduit à Bäckefors bruk et Billingsfors; à 175^{m} à l'est de la voie ferrée, à 5^{m} à l'ouest d'un échalier, en face d'un chemin conduisant au débarcadère. — Le soleil étant très près de l'horizon on n'a pu prendre que deux pointés de l'astre. Les observations d'inclinaison ont été faites un peu dans l'obscurité, le soleil s'étant déjà couché derrière les sommets de la forêt.

XII. **Bäckviken.** (15 juill.) — Le port de Bäckviken est situé sur la côte est de l'île de Hveen. Les observations faites à Bäckviken ont eu pour objet le contrôle de celles d'Uranibourg, où l'on pourrait craindre la présence d'outils de fer dans le sol. Le trépied a été installé au pied du môle nord. A cause du peu de temps dont nous disposions, on n'a pas fait de mesure d'inclinaison.

XIII. **Cimbrishamn.** (22 juill.) — Le point d'observation a été choisi au sud de la ville, près de la gare, dans la rue Södra Esplanadgatan, à 75^{m} au nord-est de la gare, à 30^{m} au nord-ouest du chemin de fer, à 3^{m} au nord-ouest de la rangée d'arbres la plus voisine de la ville.

XIV. **Copenhague.** (11 juill.) — Les constantes de chacun des aimants, et l'erreur de collimation de l'aiguille libre du théodolite, ont été vérifiées à l'Observatoire magnétique de Copenhague; l'instrument était placé sur le pilier d'une petite maisonnette octogone, appelée »*det absolute Hus*». M. Hjort, et M. Henrik Block, ont bien voulu nous assister dans ces opérations.

XV. **Dalarö.** (23 juin.) — On s'est établi au coin de Strandvägen et de Berghamns backe. Les observations ont été contrariées par un vent fort du sud-ouest; la détermination de la torsion du fil suspenseur se ressent de ces conditions défavorables.

XVI. **Efveröd.** (28 juill.) — En allant de Hörby à Åhus, nous avons mis à profit, pour une mesure des composantes horizontales à Efveröd, le peu de temps (une demi-heure) dont nous disposions. L'observation a été faite à une petite distance (40^{m}) du chemin de fer, vis-à-vis de l'église, au point où se réunit l'avenue de la gare avec la grand'route conduisant à Christinelund.

XVII. **Eldsberga.** (11 août.) — Les observations ont été faites au nord-est de la gare, près du chemin conduisant à l'église d'Eldsberga, à 110^{m} à l'est du point où ce chemin traverse le chemin de fer, sur un petit sentier conduisant à la gare, à 20^{m} au sud du dit chemin, à 80^{m} au nord de la gare.

XVIII. **Elfängen.** (10 sept.) — Les observations ont été faites près du chemin qui venant de »Mejeriet» et traversant le chemin de fer à 100^{m} à l'est de la gare, conduit à la grand'route de Gothembourg; on s'est établi à 6^{m} à l'est du chemin, dans un champ cultivé, à 150^{m} au sud du chemin de fer. — Le ciel étant très chargé de nuages, ce n'est qu'en profitant de quelques éclaircies très éparses qu'on a pu prendre 4 pointés de l'astre.

XIX. **Elmhult.** (1 juill.) — Le point choisi se trouve à 210^{m} à l'est de la gare, à l'entrée de la forêt, à 20^{m} à l'est de la route qui passe dans la même direction, dans

le prolongement de la rue qui suit le bord sud du champ ouvert en face de la gare. — Les observations ont été contrariées par un vent fort qui a fait osciller le pied des appareils. — Le point choisi par M. Lundquist pour ses observations faites en 1869, était probablement à une centaine de mètres plus loin vers l'est.

XX. **Engelholm.** (10 août.) — On s'est installé dans le parc qui borde »Engelholms å», à 90^{m} au sud du pont traversé par la route qui conduit de la gare à la ville, à 5^{m} de la rive gauche de la rivière, à 15^{m} à l'est d'une allée sablée dans le parc, à 15^{m} au sud-ouest d'une barrière. — Le chemin de fer passe à 100 ou 200^{m} à l'ouest; un train passe pendant les observations sans altérer sensiblement la position de l'aiguille. — Le fil suspenseur de l'aiguille libre du théodolite s'étant allongé à cause de l'humidité, le vent frais jette à chaque instant l'aiguille contre le verre; on a remédié à cet inconvénient en relevant le crochet de suspension de quelques millimètres; cependant les premières observations se ressentent de ces conditions défavorables.

XXI. **Engelholms hamn.** (10 août.) — Le point choisi se trouve sur la rive gauche de l'embouchure d'Engelholms å, contre la pointe de laquelle s'appuie le môle sud; le pied a été installé à 25^{m} au sud du pont en bateau; le chemin de fer passe à 100^{m} environ au nord. Terrain: dunes. — Le fil suspenseur s'étant raccourci, le crochet de suspension fut abaissé de nouveau. Un petit bateau à vapeur, passant à 15^{m} environ à l'est de l'appareil, fait dévier l'aiguille de 30′ d'un côté et d'autre de sa position d'équilibre.

XXII. **Eslöf.** (27 juill.) — Des observations de la composante horizontale avaient été faites à Eslöf par M. Thalén, vingt ans plus tôt, »entre les maisons d'habitation qui s'appellent 'Husared'». — Je n'ai pas réussi à retrouver exactement le point où M. Thalén s'était placé. Un vieillard me dit qu'il y avait autrefois deux rangées de maisons appelées *Norra* et *Södra Husaraden*; ces maisons ont disparu, à l'exception de *Nya Stenhuggeriet* qui appartenait à *Norra Husaraden*. Cet établissement est situé sur la route allant de Grydby à l'église Sallerup, à 330^{m} à l'ouest du point de croisement de cette route avec le chemin de fer. Je me suis établi à 60^{m} au sud du coin de Nya Stenhuggeriet, à 30^{m} à l'ouest de la route conduisant à la Nouvelle Eglise, à 15^{m} au sud d'une petite maison nouvellement construite. Les points *A* et *B* choisis par M. Thalén sont très rapprochés de ce point. — Les éléments du magnétisme terrestre ont été un peu agités pendant les observations faites à Eslöf: les variations de la déclinaison pendant les 47^{m} qu'ont duré les observations ont été de 8.′3. Les observations d'oscillations ont été contrariées par des bruits étrangers, et par le vent frais qui rendait un peu irrégulier le décroissement de l'amplitude.

XXIII. **Falkenberg.** (21 août.) — On s'est établi dans un champ cultivé à l'ouest du chemin de fer, dans le prolongement du pignon nord de la maison de la gare, à 105^{m} de distance, à 50^{m} du chemin qui suit le bord ouest du chemin de fer. — Les éléments du magnétisme terrestre ont subi une légère agitation pendant les observations faites à Falkenberg le 21 août.

XXIV. **Falköping.** (14 sept.) — Deux séries d'observations magnétiques avaient été faites à Falköping par M. THALÉN, la première (station A) »sur le chemin du 'Stenbrottet' à 65 pas au sud de la route conduisant à la ville de Falköping»; la seconde (station B) »dans un pré vis-à-vis de la gare au sud-est d'Uggleboet. La remise de locomotives est exactement dans la direction nord du point B». Je me suis établi cette fois dans le voisinage de la station B, à 16^{m} au sud-est de *Gamla Uggleboet*, vis-à-vis de la maison. Cette maison et une autre avoisinante appelée *Nya Uggleboet*, sont les maisons les plus anciennement construites à Ranten; elles sont situées vis-à-vis de la gare, à 255^{m} à l'est du chemin de fer, à 185^{m} à l'est de la grand'route conduisant à la ville de Falköping. La remise de locomotives est éloignée de 290^{m} dans la direction du nord. La station A de M. THALÉN est à 320^{m} dans la direction de S.O. $^{1}/_{4}$ S.

XXV. **Fiskebäckskil.** (31 août, 1er sept.) — Les observations ont été faites dans le voisinage du port des bateaux à vapeur. Le nord géographique a été conclu d'une observation du soleil faite le 31 août; à une seconde visite à Fiskebäckskil faite le jour suivant on a tiré profit du résultat obtenu. La déclinaison a été observée sur le rocher à l'ouest de *Societetshuset*, 20^{m} au sud-ouest du coin sud-ouest de la maison, 40^{m} au sud-ouest du pont qui conduit à la débarcadère, à 10^{m} au nord-est du pont d'une petite maison de bain. — Un vent très fort rendant les observations en ce lieu très difficiles, les autres éléments ont été observés dans un point situé à environ 100^{m} de plus vers l'est, dans une cour entre des maison très resserrées, à 45^{m} à l'est du pied des ponts des bateaux à vapeur, à 15^{m} au nord du chemin qui traverse la ville dans la direction de l'est, à 20^{m} au sud-est de la partie extérieure du port.

XXVI. **Fjellbacka.** (4 sept.) — On s'est installé au-delà du bourg, sur la route de Qvilla, à 140^{m} au sud-est du point où se réunissent les routes venant du port et de l'église. — L'observation du soleil a été faite dans d'excellentes conditions atmosphériques.

XXVII. **Fredrikshald.** (6 sept.) — Le point d'observation a été choisi sur le marché appelé Hæstepladsen; le pied a été installé à 180^{m} au S. 4° O. de la gare, à 65^{m} au nord du quai, à 50^{m} au sud de la route qui passe à 100^{m} au sud du chemin de fer, en suivant la même direction, à 6^{m} au nord d'un point situé au milieu entre deux magasins de port. — Terrain vague (boues?), le piétinement de l'observateur autour de l'instrument fait vibrer sensiblement l'aiguille; malgré ces circonstances défavorables les résultats sont très satisfaisants en raison du temps magnifique.

XXVIII. **Fritsla.** (25 août.) — Les observations ont été faites au sud-est de la gare, dans le voisinage de l'église; on s'est installé en deux points: 1° près de la route de Borås, à 110^{m} à l'est-nord-est du point de rencontre de trois voies à l'ouest de l'église, dans un champ cultivé, à 30^{m} au nord-nord-ouest de la route; 2° sur un rocher élevé (gneiss) à 16^{m} au sud-est de l'école primaire, à 160^{m} environ au sud du point précédent. — Le soleil a été observé par un très beau temps. — Les observations faites à Fritsla ont mis en évidence l'action locale du sol, l'inclinaison à la deuxième station étant plus élevé de 15′ à celle de la première. La composante subit une diminution correspondante de 130 unités du cinquième ordre décimal.

XXIX. **Fröslida.** (19 août.) — Le point d'observations a été choisi sur la route d'Oskarström, à 180^{m} au sud de la gare, à 25^{m} au sud de la cabane de paysan, située au point de contour du chemin traversant Nissaân. Le chemin de fer passe à 85^{m} à l'est.

XXX. **Getinge.** (21 août.) — On s'est établi sur la route de Halmstad à Varberg qui passe à 160^{m} à l'est du chemin de fer en suivant la même direction; le pied des appareils a été installé dans un pré, à 25^{m} au sud du point de rencontre de l'avenue de la gare et de la route, à 10^{m} à l'est de la route, à 50^{m} à l'ouest d'une rivière (*Suse å*). — Le ciel était très nuageux, la matinée du 21 août; on a profité de quelques instants favorables pour observer le soleil, à travers la couche nuageuse, sans le secours du verre rouge devant l'oculaire de la lunette.

XXXI. **Godegård.** (19 sept.) — Le point d'observation a été choisi à l'est de la gare, dans un champ récolté, à 100^{m} à l'est de la route qui suit le bord oriental du chemin de fer, à 60^{m} au nord de la gare, à 50^{m} environ à l'ouest d'une petite rivière coulant dans la même direction, à 10^{m} à l'ouest du bord du bassin traversé par la rivière. — L'état du ciel n'a permis de faire qu'un seul pointé approximatif du centre du soleil.

XXXII. **Grebbestad.** (3—4 sept.) — Trois séries d'observations magnétiques ont été faites à Grebbestad; les deux premières ont été faites le 3 septembre au sud du bourg, près de la route qui conduit dans la direction du sud-est: 1° à 55^{m} au sud de la route, à 20^{m} à l'ouest du chemin conduisant à Stenbrottet, à 35^{m} à l'ouest d'une maison d'habitation en bordure de la route, non loin de l'extrémité nord de la montagne escarpée qui domine le port et les établissements de bain; 2° à 145^{m} au nord du point précédent, à 90^{m} au nord de la grand'route, à 90^{m} au nord-est de la rue traversant le bourg qui forme la continuation de la route, à 20^{m} au nord-est d'une grange à foin. L'observation du 4 septembre a été faite dans la partie nord du bourg: on s'est établi cette fois dans la propriété du capitaine Carlsson, à 110^{m} au sud du point où se bifurque la route venant de l'église en deux branches, l'une, conduisant au port, l'autre, traversant le bourg et se continuant dans la route où ont été faites les premières observations. Ce point est situé à 250^{m} environ au nord des points précédents. — Le ciel était très voilé le matin du 3 septembre; néanmoins on a pu deviner le soleil derrière les nuages et prendre cinq pointés de l'astre.

XXXIII. **Grefvie.** (11 août.) — Les observations ont été faites à l'ouest du chemin de fer près du chemin conduisant à l'église de Grefvie. On s'est établi en deux points: 1° à 20^{m} au nord du chemin, à 155^{m} à l'ouest de la route qui suit le bord ouest du chemin de fer, sur une des collines de bruyère; 2° à 50^{m} plus loin dans la direction E. 6^{0} N, à 10^{m} au nord du même chemin.

XXXIV. **Gustafsberg.** (20 juin.) — On s'est établi vis-à-vis l'Hôtel à l'est sur le bord même du chemin qui suit la rive de la baie. — Le terrain me paraît assez suspect: le sol est composé de remblai contenant des scories. — L'observateur a été gêné par la présence d'une quantité d'enfants, d'ouvriers, etc.

XXXV. **Hallsberg.** (19 sept.) — On a choisi le point d'observation sur un champ cultivé au nord du chemin de fer, près du chemin qui passe dans la direction du nord en suivant le bord ouest de *Mejeriet*. Le pied des appareils a été installé à 200^{m} du point de contour du chemin, à quelques mètres du pignon nord d'une maisonnette (buanderie), à 100^{m} à l'ouest d'une vacherie. — Ce point coïncide, à 20 ou 30^{m} près avec le point où M. THALÉN a opéré en 1872; — malheureusement les changements apportés au terrain ne m'ont pas permis de retrouver exactement le point de M. THALÉN. — L'observation du soleil a été faite par un ciel très voilé qui laisse deviner l'astre en forme d'une tache nébuleuse mal définie.

XXXVI. **Halmstad.** (20 août.) — Les observations ont été faites au sud-est de la ville et du chemin de fer de Vislanda et de Bolmen. On s'est installé sur un sentier traversant les champs cultivés de la gare à l'Ecole primaire supérieure, à 130^{m} au nord-est de la gare, à 40^{m} au sud-ouest du coin le plus rapproché de la maison de l'Ecole, à 50^{m} au sud-est du chemin de fer. — Temps menaçant.

XXXVII. **Herrljunga.** (26—27 août.) — Les observations ont été faites au nord du chemin de fer sur un chemin qui traversant les champs cultivés, part d'un groupe de maisons situées à 140^{m} à l'ouest de la gare, à 115^{m} au nord de l'échalier en bordure du chemin de fer, à 6^{m} au nord d'un fossé en plein champ. — Le soleil a été observé au moment même de son coucher; le disque solaire était très déformé, son bord fortement ondulant. Néanmoins l'observation donne à peu près le même résultat que les observations de la lune faites plus tard.

XXXVIII. **Hessleholm.** (4 août.) — Les observations faites à Hessleholm le 4 août ont été entreprises dans le but de compléter celles faites par M. LUNDQVIST en 1869. On s'est installé à 350^{m} de la gare dans la direction de l'est-nord-est, sur le champ de la foire, en face du mât et de la rue conduisant à la gare. La station choisie par M. LUNDQVIST paraît située de l'autre côté du chemin de fer à 400^{m} á l'ouest-nord-ouest de la gare.

XXXIX. **Hildesborg.** (16 juill.) — Le château de Hildesborg est situé sur le bord d'Öresund à 5^{km} environ au nord de Landskrona. Les observations ont été faites dans un champ cultivé à 80^{m} à l'est du corps-de-logis à 20^{m} au sud de l'avenue du château, à 140^{m} à l'ouest de la route de Landskrona à Helsingborg. — Les expériences de Hildesborg correspondent à une situation magnétique troublée: les variations de la déclinaison pendant la durée des observations surpassent 16′.

XL. **Hook.** (16 août.) — On s'est installé à 80^{m} à l'est du chemin de fer, au sud et à petite distance d'une propriété, à 9^{m} au sud d'une cave, près de la descente escarpée de la vallée traversée par *Hooksån*. — Les observations ont été difficiles à cause du vent fort. En raison du peu de temps dont je disposais, les observations d'inclinaison, la dernière surtout, ont été faites un peu à la hâte.

XLI. **Hufvudskär.** (24 sept.) — Hufvudskär, station de pilotes dans le Skärgård, est un rocher isolé situé en pleine mer. — Le point choisi se trouve derrière

la maison de M. SJÖBLOM, surveillant de pilotes, sur le sentier conduisant au port, à 20^{m} au sud-sud-est du coin sud-est de la maison. — Le soleil a été observé par un ciel voilé. — Les éléments du magnétisme terrestre ont été un peu agités pendant les observations faites à Hufvudskär le 24 septembre.

XLII. **Håkantorp.** (11 sept.) — Les observations ont été faites près du chemin qui traversant le chemin de fer à 100^{m} au nord de la gare, conduit dans la direction de l'ouest à Rylanda et à Ryda, à 70^{m} à l'ouest de la route qui suit le bord ouest du chemin de fer. Le pied a été installé dans une propriété appelée Rylanda, sur l'avenue conduisant à l'écurie. Les observations d'inclinaison ont été faites à 6^{h} 30^{m} à 5^{m} plus au nord, sur le bord même de la route de Ryda, où la lumière du crépuscule me permettait encore de faire les pointés de l'aiguille.

XLIII. **Hållö.** (31 août—1 sept.) — La phare de Hållö est situé à 2.5^{km} au sud de la pêcherie de Smögen en Bohuslän, à 15^{km} au nord-ouest de Lysekil. Le point choisi est situé sur la côte est de l'île, à l'est du phare, près d'un détroit appelé *Strömhålet* qui sépare les îlots *Hållö tangar* de l'île même; le trépied a été installé à 20^{m} de la rive, vis-à-vis l'extrémité sud du plus grand des Hållö tangar, à 100—150^{m} au nord-nord-ouest d'une grosse pierre située au port des bateaux. — Les observations ont été contrariées par un vent frais qui changea bientôt en tempête.

XLIV. **Hästveda.** (3 août.) — Le point choisi est identique à celui où M. LUNDQVIST avait opéré vingt-quatre ans avant nous. Ce point est situé sous un bouquet de hêtres, à 1^{km} environ à l'est de la gare, à 100^{m} au nord d'un hameau. Le chemin qui conduit à ce lieu après avoir coupé le chemin de fer à 200^{m} environ au sud de la gare, traverse des collines de bruyère, atteint une petite rivière; on suit ensuite un sentier qui contourne vers la gauche, sur un champ de bruyère, on passe un échalier, traverse un pâturage et arrive au hameau. — Les expériences du 3 août ont eu lieu en temps de calme magnétique.

XLV. **Höganäs nedre.** (9 juill.) — Les observations ont été faites à 130^{m} à l'ouest de la gare, dans un champ cultivé, à 70^{m} à l'ouest de la route qui, croisant le chemin de fer près de la gare, conduit à la ville, à 15^{m} au nord d'un chemin qui coupe la voie ferrée vis-à-vis quelques petites maisons d'habitation pour les ouvriers. — Le temps étant très pluvieux, il n'a pas été possible d'observer le soleil.

XLVI. **Hökedalen.** (7 sept.) — On a choisi le point des observations à 140^{m} au sud-est de la gare, dans un champ récolté, à 5^{m} au sud-est du coin sud-est d'une grange, sur le bord est d'un étang. — Les observations de Hökedalen ont été faites dans d'excellentes conditions.

XLVII. **Hör.** (27 juill.) — Le point choisi est situé en face de la gare, à 255^{m} au sud-ouest, sur une colline sablonneuse, dans un sentier conduisant à un moulin à vent, à égale distance (50^{m}) du moulin à vent et du chemin conduisant à la gare, à 35^{m} au sud-ouest d'une maison d'habitation située près du moulin à vent. — Pendant les observations faites à Hör, les éléments du magnétisme terrestre ont subi des variations grandes et irrégulières.

XLVIII. **Hörby**. (28 juill.) — Les observations ont été faites à 180^{m} au nord-ouest de la gare, dans un pré, à 20^{m} à l'ouest de la route de Slagtofta, à 145^{m} au nord du point de croisée de la route et du chemin de fer, à 5^{m} au sud d'un mur de clôture.

XLIX. **Jutholmen**. (23 juin.) — Jutholmen est une petite île située vis-à-vis de Dalarö. On s'est installé sur un rocher élevé à 25^{m} à l'est de la debarcadère, à 10^{m} au nord du pont, dans une cour. — Les observations de la composante concordent avec celles de Dalarö.

L. **Kattarp**. (9 août.) — Les observations ont été faites sur un chemin qui passe à 110^{m} au nord du chemin de fer en suivant la même direction, à 115^{m} à l'ouest du chemin qui conduit de la gare à la ferme de Kattarp. On s'est établi à 4^{m} au sud du chemin, dans un champ cultivé. — Une pluie accompagnée de rafales étant survenue pendant les observations, l'inclinaison a été observée avec l'aiguille n^{0} 1 seulement. — Un train composé de 12 vagons s'éloigne de la gare pendant les observations ne changeant que de quelques dixièmes de minute, au plus, la position de l'aiguille.

LI. **Kettilstorp.** (14 sept.) — On s'est établi en deux points situés l'un à droite, l'autre à gauche du chemin de fer de Stenstorp à Nässjö: 1° au nord-est de la gare, dans la forêt de sapin, sur le chemin conduisant à *Långa backe*, hameau d'un indelta (*Soldattorp*), à 105^{m} de la barrière placée à l'entrée de la forêt, en face d'un fossé qui en coupant à angle droit le chemin de fer, passe une cave, à 40^{m} du point choisi; le chemin de fer passe à 100^{m} au sud; 2° à l'ouest du chemin de fer, dans un sentier conduisant à la ferme de Kettilstorp, à 115^{m} du chemin de fer, et à 80^{m} de la route qui le traverse un peu au nord de la gare. — Les observations faites à la deuxième station correspondent à un état légèrement agité de l'aiguille.

LII. **Kilsmo**. (19 sept.) — On s'est installé à 12^{m} au nord de la route de Bustad à Brefvens bruk, vis-à-vis de la gare, qui se trouve à 125^{m} de distance au sud. — Le ciel est resté couvert pendant toutes nos observations à Kilsmo, et il n'a pas été possible d'observer la déclinaison. L'intensité a été observée seulement avec l'aimant n^{0} 1 de la boussole à cause des tenèbres menaçantes.

LIII. **Kinnared**. (18—19 août.) — Les observations ont été faites sur la route de l'église de Kinnared à Amol, qui traverse le chemin de fer à 85^{m} au nord de la gare. On s'est établi en deux points: 1° à 170^{m} à l'ouest du chemin de fer, à 30^{m} à l'ouest du pont jeté sur Österån (Kilaån), à 5^{m} au sud de la route, dans un champ récolté; 2° à 105^{m} à l'est du chemin de fer, au point où la route se sépare en deux branches, en face d'une ferme. — Les observations faites à la deuxième station le 19 août ont été faites très vite. — Les observations faites à Kinnared ne révèlent aucune influence locale du sol bien que la valeur de l'inclinaison y subisse une augmentation très importante par rapport à la région environnante.

LIV. **Kjeflinge**. (12—13 juill.) — On a choisi le point d'observation près du chemin qui traverse le chemin de fer à 200^{m} au sud de la gare, à 205^{m} à l'ouest du chemin de fer, à 90^{m} à l'ouest du chemin qui suit son bord ouest, dans un champ cultivé, à 35^{m} au nord du chemin susdit.

LV. **Klagstorp.** (21 juill.) — Les observations ont été faites dans le voisinage d'une ferme, à 135^{m} à l'ouest du chemin de fer, à 10^{m} au sud d'un étang, à 30^{m} à l'est d'un magasin près du poulailler. — Chaleur étouffante annonçant un orage. Les éléments du magnétisme terrestre ont subi, pendant les observations d'intensité faites à Klagstorp, des troubles très importants.

LVI. **Klefshult.** (16 août) — On a choisi le point d'observation dans un terrain ouvert, anciennement une forêt. Les appareils ont été installés vis-à-vis de la gare, près de la hutte d'un charbonnier, à 185^{m} au nord-ouest du chemin de fer, sur un sentier qui traverse le chemin de fer à 30^{m} au sud de la gare, à 8^{m} au nord d'un échalier limitant la forêt de sapins au sud du champ ouvert. — Les observations d'oscillation ont été contrariées par un vent fort.

LVII. **Klippan.** (7 août.) — Les observations ont été faites au nord du chemin de fer, près de la route conduisant au hameau d'Åby; on s'est établi en deux points: 1° à 90^{m} à l'ouest du chemin sur un sentier traversant le champ d'avoine; 2° à 40^{m} plus loin vers l'ouest, sur le même sentier. — En raison du temps menaçant, les observations à la deuxième station ont été faites un peu à la hâte.

LVIII. **Kongsbacka.** (23 août.) — On s'est établi dans un champ cultivé en face de la gare, à un point situé exactement dans le prolongement du bord nord de la maison de la gare, à 180^{m} de distance, à 10^{m} à l'est de Norderå, vis-à-vis d'une allée sablée d'un parc appelé *Kyrkogårdspromenaden* qui occupe la rive opposée de la rivière.

LIX. **Kornsö.** (6 sept.) — Le point d'observation a été choisi sur une presqu'île du lac Kornsjön, à 200^{m} au sud-ouest de la gare de l'autre côté de la scierie. Le trépied a été installé sur un rocher plat vers la limite nord de la presqu'île, dans le bois de pins même, à 90^{m} au nord-ouest de la scierie, à 15^{m} au nord-nord-ouest de la langue de terre qui réunit la presqu'île à la terre.

LX. **Kristianstad.** (29 juill.) — On s'est établi dans la partie nord du parc du Tivoli, au point de croisée de deux allées sablées dont la principale passe à 30^{m} au sud de l'établissement de blanchissage et aboutit au chemin qui suit le bord gauche de Helgeå à 70^{m} au sud du point où ce chemin tourne vers l'est; à 70^{m} à l'est du chemin, à 80^{m} au sud du port des bateaux formé par une échancrure de Helgeå.

LXI. **Kärda.** (17 août.) — Le point d'observation a été choisi sur la route conduisant à Källunda et Åminne, à 125^{m} au sud-ouest du chemin de fer, à 12^{m} au nord-ouest du chemin, à 10^{m} au nord-est d'un échalier, sur un sentier conduisant à la gare. — Le soleil a été observé par un ciel très-voilé; après une heure d'attente infructueux, le soleil apparaît indistinctement pendant dix ou douze secondes, ce qui a suffi pour observer le temps de passage de son bord à deux des divisions du micromètre. — Les observations d'oscillations ont été contrariées par la pluie qui commençait à tomber, et par une locomotive qui m'empêcha de bien apprécier les battements du chronomètre.

LXII. **Lagmansholm.** (27 août.) — Le point d'observation a été choisi à 125^{m} au nord de la gare sur le bord de la rivière *Säfveån*, à 4^{m} de la rive, à 30^{m} au sud-sud-ouest du lavoir situé au point où la rivière fait une serpentation entre deux îlots, à 45^{m} au nord de la grille entourant le jardin de la gare. Le chemin de fer passe à 100^{m} au sud. — Les observations ont été contrariées par des rafales qui ont fait balancer l'aimant libre de la boussole.

LXIII. **Laholm.** (11 août.) — Les observations ont été faites à l'ouest de la gare, dans un champ qui longe le chemin de fer, près du chemin conduisant à Tivoli. On s'est établi en deux points: 1° à 15^{m} à l'est du chemin, au point où se réunissent les voies allant de la gare et de Tivoli pour se continuer dans la rue Storgatan; 2° à 80^{m} du point précédent dans la direction de la mire (N. 58° E.), à 35^{m} au sud d'une maisonnette située au bord du chemin qui conduit à la gare, à 35^{m} à l'ouest de la rue Östertullgatan supposée prolongée vers le sud. — Le sol où ont eu lieu les observations consiste en un remblai: on y trouve des morceaux de briques, de poêles, de la ferraille, etc. Néanmoins, les observations faites à Laholm n'accusent aucune influence locale du sol.

LXIV. **Lamhult.** (15 août.) — On s'est installé à 250^{m} au sud-ouest de la gare, sur la route de Skärshult, à 125^{m} au sud-ouest d'une petite rivière, à 35^{m} à l'est d'une forge, à 10^{m} au sud de la route, sur un ancien chemin planté d'arbres. Le chemin de fer passe à 180^{m} à l'est. — Le point choisi par M. Lundqvist est situé sur la même route à 300^{m} environ plus loin vers l'ouest.

LXV. **Landskrona.** (13 juill.) — On s'est installé à 140^{m} au sud du chemin de fer, au bord même d'Öresund, à 200^{m} ou 300^{m} à l'est du port, à 65^{m} à l'est d'une fabrique de soude. — Le fil d'arraignée de la lunette du théodolite s'étant brisé, il a été remplacé par un fil de cocon occupant une largeur de 2′.2; au moyen de celui-ci il a été possible de faire des pointés approximatifs de l'aiguille de déclinaison. — La valeur de la composante a été déduite de deux séries d'oscillations pour chacun des barreaux. Une pluie d'orage est survenue pendant les observations d'oscillation.

LXVI. **Lerbäck.** (19 sept.) — Les observations ont été faites à 140^{m} à l'est-nord-est de la gare, près de la route conduisant à l'auberge de Lerbäck (*Gästgifvaregården*), à 50^{m} à l'ouest d'une maison d'habitation du service de la gare, à 8^{m} au sud de la route, dans un champ cultivé, à 60^{m} au nord-ouest du chemin de fer spécial conduisant à une tourbière située dans la direction de l'est. — En raison du temps pluvieux, l'inclinaison a été observée seulement avec l'aiguille n° 1.

LXVII. **Lerum.** (27—28 août.) — On a choisi le point d'observation sur le bord gauche de Säfvaån, près de la grand'route de Gothembourg, à 140^{m} à l'ouest de la gare; le trépied a été installé sur le chemin conduisant à une fabrique, à 35^{m} au nord-est de la route, à 15^{m} au sud de la rive, vis-à-vis d'un borne en pierre portant les lettres: *№* 116 $\frac{3}{32}$ *JES B.* — Les éléments du magnétisme terrestre ont subi une legère agitation pendant les observations faites à Lerum.

LXVIII. **Liatorp.** (1er juill.) — Des observations de la composante et de l'inclinaison avaient déjà été faites à Liatorp par M. LUNDQVIST. J'avais l'intention de m'installer au même point; malheureusement l'indication précise des distances fait défaut, et il ne m'a pas été possible de retrouver exactement son point. — Je me suis installé dans un bois de bouleaux à 330m à l'est de la gare, sur un chemin passant dans la direction de l'est en laissant à sa gauche l'Hôtel de Liatorp; il est propable que le point choisi par mon prédécesseur était à 15m plus loin vers l'ouest. Une seconde observation a été faite ensuite au nord et à petite distance de l'Hôtel. Un orage étant survenu vers 4h, il n'a pas été possible d'observer la déclinaison et l'inclinaison à la deuxième station.

LXIX. **Lidhult.** (12—13 août.) — On s'est installé à 190m au nord de la gare, au point où se réunissent les voies venant de l'église d'Yxhult, de l'église de Lidhult et de la gare, à 12m au sud du chemin d'Yxhult et de Lidhult. — Une perturbation très importante s'est produite pendant les observations d'intensité faites le 12 août au soir: la composante horizontale se trouvait augmentée de 130 unités du 5e ordre, l'inclinaison était diminuée de 10′. Les observations faites le matin du jour suivant sont plus concordantes et paraissent plus exactes.

LXX. **Lidköping.** (12 sept.) — Le point d'observation a été choisi sur le terrain marécageux qui longe le Venern, au pied du môle est, à égale distance (145m) du chemin de fer de Skara et de la côte, à 6m à l'est du mur en pierre en bordure du canal qui forme l'entrée du port.

LXXI. **Ljungby.** (13 août.) — Le point des observations a été choisi sur la rive nord d'une rivière qui passe au sud de la gare, à 65m au sud-sud-ouest du chemin qui aboutit à la gare de marchandises, à 12m au nord-nord-est de la rivière, dans le prolongement d'une rue qui traverse le chemin de fer au même point que la rue venant du Marché. Distance du chemin de fer: 165m.

LXXII. **Lund.** (18—20 juill.) — Les observations ont été faites à l'Observatoire astronomique: 1° dans la maisonnette construite en bois qui a servi aux observations magnétiques faites pendant l'exploration internationale des régions arctiques en 1882—1883; les instruments furent établis sur le pilier en pierre qui occupe la partie sud de la maison, en face de l'entrée; 2° dans le parc de l'Observatoire, à 30m au sud-ouest du coin le plus voisin de la chambre du premier vertical. — Le point *b* de M. LUNDQVIST, ainsi que le point *B* de M. THALÉN sont très rapprochés de ce point. — Une perturbation magnétique s'est produite pendant les observations faites à Lund le 20 juillet.

LXXIII. **Lysekil.** (1er sept.) — La station a été choisie dans la partie sud du bourg, dans une cour à l'est du chemin conduisant au casino (*Societetshuset*); à 90m au sud du pied de la débarcadère, à vapeurs, à 55m au nord de la maison de bains des dames, à 10m à l'ouest de l'extrémité est de la cour et du pied d'un pont en bois. — Le ciel était très chargé de nuages, toutefois en profitant de quelques éclaircies de courte durée on a pu prendre plusieurs pointés de l'astre. — Les éléments du magnétisme terrestre ont été légèrement agités pendant les observations faites à Lysekil.

LXXIV. **Löberöd.** (26 juill.) — Les expériences ont eu lieu à 265^{m} au sud-ouest de la gare. L'appareil a été installé dans un pré, sur le bord nord d'un chemin qui passe dans la direction de l'ouest en traversant le chemin de fer à 150^{m} au sud de la gare. Un petit étang se trouve à 30^{m} au sud du point choisi. — Les expériences de Löberöd ont été faites en temps de calme magnétique parfait.

LXXV. **Malmö.** (11 juill.) — On s'est installé dans la partie nord de la ville près du pied du môle nord, à 15^{m} au sud du pont qui y amène, à 85^{m} au sud du pont de l'établissement de bains de mer, à 40^{m} au nord de la maison de bains chauds, sur le bord même du canal intérieur au brise-lames.

LXXVI. **Marstrand.** (30 août.) — La station a été choisie à l'ouest de la ville, au nord et à petite distance de la forteresse; on s'est installé en deux points: 1° à 33^{m} au nord de l'avant-fossé du côté nord, à 100^{m} du coin nord-ouest du fossé; 2° à 140^{m} à l'ouest-nord-ouest du point précédent dans la direction de la mire (N. 81° O.), à 26^{m} au sud d'un sentier rocheux. — Une pluie, faible d'abord, devenu forte ensuite, a rendu impossible toutes observations ultérieures. Les observations faites à la deuxième station ont été difficiles à cause des ténèbres. — Les observations faites à Marstrand correspondent à une époque de calme magnétique parfait.

LXXVII. **Mellerud.** (8 sept.) — La station a été choisie sur la route qui passe à l'ouest du chemin de fer, à 200^{m} au nord de la gare, en face d'une grange au bord est de la route, à 20^{m} au sud d'un sentier conduisant à une cabane de paysan, située du côté opposé de la route. Le chemin de fer passe à 140^{m} à l'est de la station choisie. — Le ciel étant très voilé, le soleil a été observé à travers la couche nuageuse sans le secours du verre rouge devant l'oculaire de la lunette. — Les observations ont été difficiles à cause du vent frais.

LXXVIII. **Moheda.** (15 août.) — Les observations ont été faites dans le bois de sapins même, à 80^{m} à l'est de la gare, sur le chemin traversant le terrain marécageux. — Il pleuvait pendant toutes les observations faites à Moheda et il n'a pas été possible d'observer le soleil.

LXXIX. **Motala.** (18 sept.) — Le point choisi se trouve à l'est de la ville sur la route conduisant à Motala verkstad, en face de la gare, à 210^{m} au nord du chemin de fer, au point où la rue Bergsätersgatan tourne vers l'est pour reprendre tout de suite sa direction antérieure.

LXXX. **Mullsjö.** (15 sept.) — Les observations ont été faites sur le chemin conduisant à Gunnarsbo, qui traverse le chemin de fer à 235^{m} au sud de la gare; on s'est installé en deux points: 1° à 33^{m} au sud-ouest d'une barrière, à 240^{m} au nord du point de croisée du chemin et de la voie ferrée, en face du point de contour du chemin de Bosebo; cette première station est très voisine du point choisi par M. Lundqvist, qui n'a toutefois pu être retrouvé exactement; 2° sur le même chemin, à 80^{m} au nord du chemin de fer, à 75^{m} au sud du premier point, à 5^{m} à l'ouest du chemin, à 15^{m} au sud d'une barrière. — Les opérations de Mullsjö correspondent à une situation magnétique troublée.

LXXXI. **Nord-Koster**. (5 sept.) — La station a été choisie à Vettnet, sur la pente dominant les magasins du port, vis-à-vis de l'îlot Gåsaskär, à 25^{m} au sud-ouest de la rive, 7^{m} au sud-est du sentier conduisant au hameau de pilotes.

LXXXII. **Norrköping**. (25 juin.) — Les observations ont été faites dans un parc appelé Norra promenaden, à 140^{m} au sud de la gare; on s'est installé sur une allée sablée dans la partie ouest du parc, à 5^{m} à l'est de Garfvaregatan, à 17^{m} au sud d'une borne-fontaine à 35^{m} au nord de Slottsgatan. La situation peut laisser soupçonner la présence de tuyaux de fer dans le sol. — La station où M. THALÉN avait opéré en 1871 paraît avoir été située dans le voisinage du mien. (*Mémoires de l'Académie de Stockholm*, t. X, n. 3, p. 69.) — En raison du temps pluvieux, on s'est borné à observer l'inclinaison.

LXXXIII. **Nässjö**. (16 août.) — On s'est placé à l'est de la gare, à 275^{m} de distance, à 90^{m} du marché, à 15^{m} au sud de la ligne moyenne de la rue qui passe de la gare dans la direction de l'est. Le lac Ingsbergssjön se trouve à 160 ou 170^{m} plus loin vers l'est.

LXXXIV. **Partilled**. (29 août.) — J'ai eu beaucoup de peine à retrouver le point choisi par M. LUNDQVIST, sans toutefois y réussir parfaitement. La situation choisie se trouve entre les collines dominant à l'ouest la vallée où passe le chemin de fer, dans une autre vallée resserrée au dessus de *Första svenska Rashundstuteriet*. On y arrive par un sentier passant une villa appelée Matildehem et située vis-à-vis de la gare sur la route de Gothembourg. On s'est installé sur le chemin conduisant à *Buret*, à 160^{m} au nord d'une sablière, à 500^{m} environ au nord-ouest de la gare. Le point choisi par M. LUNDQVIST paraît être à 80^{m} au sud-ouest du mien. — Les observations ont été très difficiles à cause du temps défavorable; de fortes rafales accompagnées de pluie ont fait balancer l'aiguille libre de la boussole.

LXXXV. **Perstorp**. (6 août.) — Le point choisi se trouve au nord du chemin de fer, à 130^{m} de la gare, à 75^{m} au nord du point où la route de Torup tourne vers l'est, sur un sentier traversant un champ cultivé, à 10^{m} au nord du coin nord-est d'un mur de clôture. — Des coups de vent annonçant un orage ont interrumpu les observations de la composante. L'observation de l'inclinaison a été discontinuée pendant trois minutes, à cause d'une rafale accompagnée d'une pluie torrentielle.

LXXXVI. **Qviinge backe**. (30 juill.) — Les observations ont été faites à l'auberge de Qviinge backe, à l'est du chemin de fer; on s'est placé dans un pré à 80^{m} à l'ouest du corps-de-logis, à 25^{m} au nord de la route conduisant à la gare, à 8^{m} à l'ouest du coin nord-ouest d'une grange. — Les expériences faites à Qviinge backe correspondent à une époque de calme magnétique.

LXXXVII. **Refteled öfre**. (18 août.) — On s'est installé dans un terrain marécageux parsemé de pins, au nord de la voie ferrée, sur la route conduisant à Dye et à Annerstad, à 145^{m} au nord du chemin de fer, à 25^{m} au sud d'une barrière. — Le soleil a été observé à travers les nuages (Nimbus), sans le secours du verre rouge devant l'oculaire de la lunette.

LXXXVIII. **Rydsgård.** (22 juill.) — Les observations ont été faites au nord-ouest de l'Hôtel du Rydsgård, sur un sentier conduisant à la gare, à 30^{m} de distance de l'Hôtel, à 30^{m} au nord-est de la route de Torsjö, Skurup et Solberga. — Les observations de déclinaison montrent un peu d'agitation pendant les observations faites à Rydsgård: la déclinaison a varié de 9′ environ pendant la durée des observations.

LXXXIX. **Rödesund.** (17 sept.) — Les observations ont été faites à l'auberge située dans la partie sud du bourg; on s'est installé à 55^{m} au nord du milieu de l'auberge (*Gästgifvaregården*), vis-à-vis de la maison terminus de Storgatan, au nord de la boutique d'épiceries, à 25^{m} à l'est de la barrière, à 65^{m} à l'ouest du bord du lac Vettern, au milieu de deux bosquets ronds.

XC. **Salstad.** (11 sept.) — On a choisi le point d'observation dans un champ le long de la route de l'église de Flå passant à 140^{m} au sud du chemin de fer en suivant la même direction. Le trépied a été installé à 4^{m} au nord de la route, à 20^{m} à l'est du chemin conduisant à la gare. Le point où M. Lundqvist a opéré en 1869 se trouve à 675^{m} au nord de la gare. — La déclinaison a subi une légère agitation (4′) pendant les expériences faites à Salstad.

XCI. **Sandhamn.** (25 sept.) — Le point d'observation a été choisi dans la partie ouest du village, tout près du pied de l'*ås*, à l'ouest d'une sablière, à 20^{m} au nord du trottoir de planches qui conduit à Dansberget, à 25^{m} à l'ouest d'un pont appelé Ballastbron, à 75^{m} à l'est de Dansbanan.

XCII. **Sennan.** (20 août.) — Les observations ont été faites dans un champ cultivé, à 180^{m} à l'ouest-nord-ouest de la gare, à 50^{m} à l'est de la rive gauche de Nissaân. Le chemin de fer passe à 135^{m} de distance. — Un train de marchandises de 20 à 30 vagons passe pendant l'observation de la composante sans influencer sensiblement l'appareil.

XCIII. **Skallinge.** (12 août.) — Les observations ont été faites sur les collines situées au nord-ouest de la gare: 1° à 90^{m} au nord-ouest de la gare, sur un sentier conduisant à la forêt, à 7^{m} au nord-est d'un mur de clôture; 2° à 40^{m} de distance du premier point dans une direction opposée à celle de la mire, soit dans la direction de N. 73° O., sur un chemin traversant la forêt, à 35^{m} de distance d'un ruisseau traversé par le chemin. — Les observations ont été difficiles à cause du vent frais du sud-ouest. — La composante horizontale et l'inclinaison subissent à Skallinge des modifications notables par suite des actions locales.

XCIV. **Skara.** (12 sept.) — Le point d'observation a été choisi au sud de la ville, un peu au-delà des dernières maisons, à 160^{m} au sud du chemin de fer, dans le prolongement d'une rue qui le traverse à 50^{m} à l'ouest de la gare. — Les observations ont eu lieu pendant une époque de calme magnétique.

XCV. **Sköfde.** (15 sept.) — On s'est efforcé à retrouver le point où M. Thalén avait opéré en 1871. Ce point est situé sur la route de Skara, dans le prolongement de la rue Kungsgatan, à 140^{m} à l'ouest de Staketgatan, au point où se réunissent les

routes de Skara et de Varpfabriken et Brandstorp. Une forge est située au sud de la route vis-à-vis le point d'observation et distant d'environ 20^{m}. — Les éléments du magnétisme terrestre ont subi, pendant les observations faites à Sköfde, des modifications qui rendent l'observation de la torsion très incertaine.

XCVI. **Smålandsstenar.** (18 août.) — Les expériences ont été faites dans la forêt derrière la gare, à 130^{m} au nord-ouest de la gare, en un point situé dans le prolongement de l'avenue de la gare, à 10^{m} au nord-ouest de la route de Halmstad. — L'observation du soleil a été faite dans d'excellentes conditions atmosphériques.

XCVII. **Stenstorp.** (13 sept.) — Les observations ont été faites sur la route de Sköfde, qui passe à 140^{m} au sud-est du chemin de fer, vis-à-vis de la gare, à 55^{m} au nord-est du chemin traversant le ruisseau Pösa å, à 6^{m} au nord-est d'une buanderie, à 12^{m} de la rive, à 20^{m} au sud-est de la route. — De fortes rafales ont rendu très difficiles les observations de la composante et de la déclinaison.

XCVIII. **Stockholm.** (28 sept.) — Les expériences ont été faites à l'Observatoire situé sur une colline qui domine la ville au nord. Le trépied a été installé à 20^{m} à l'est du pavillon spécial destiné aux mesures magnétiques, au point désigné par n. 1 dans mon premier voyage. — On n'a pas fait d'observation du soleil; on a pris le point qui a servi de repère en 1886 et 1889; l'azimut de ce point est déduit des observations faites en 1886 et en 1889, dont on prend la moyenne.

XCIX. **Strömstad.** (5 sept.) — Les observations ont été faites dans la partie nord-ouest de la ville, sur l'îlot Laholmen. Le pied a été installé sur une petite plaine herbeuse, juste au sud de la route supérieure conduisant du port tout autour de l'îlot, vis-à-vis le pignon du Restaurant Laholmen. Ce point est situé à 100^{m} environ à l'ouest de l'extrémité ouest du port des bateaux à vapeurs. -- Les observations d'oscillation ont été gênées par des bruits différents, le tintement des cloches de l'église, le bruit des pas des gens qui se promenaient, etc.

C. **Svedala.** (21 juill.) — On s'est établi sur la route entre Aggarp et l'église de Svedala, dans un champ cultivé, à 15^{m} au nord-est de la route, à 15^{m} au nord-ouest d'un boucherie et fabrique de saucisses, à 65^{m} au nord-ouest de l'avenue de la gare; le chemin de fer passe à 100^{m} environ au sud-est.

CI. **Svenljunga.** (25 août.) — Le point d'observation a été choisi sur un terrain plat qui longe l'Ätran, située en-dessous du jardin appartenant à l'Hôtel de Svenljunga, à 200^{m} environ au sud-est de la gare; le pied a été installé à 8^{m} de la rive droite d'Ätran, à 35^{m} au nord de l'établissement de bains chauds, à 40^{m} à l'est d'une cave placée sur le versant est de la colline où est situé l'Hôtel. — L'observation de la composante a été faite dans l'obscurité, en éclairant le cercle horizontal avec des allumettes; au moment où les observations s'achevaient à 8^{h} 8^{m}, l'étoile α de la Couronne s'aperçoit déjà au zénith. Les observations d'inclinaison ont été faites en grande hâte, à cause des tenèbres qui nous menaçaient.

CII. **Säfsjö.** (15 août.) — Des observations de l'intensité et de l'inclinaison avaient été faites à Säfsjö par M. LUNDQVIST, en 1869; les observations du 15 août ont eu pour objet de compléter ses observations en y ajoutant la déclinaison. On s'est installé à l'est de la gare, à 140^{m} à l'est du chemin de fer, à 10^{m} au-dessus du point de croisée des rues qui se croisent à l'école primaire supérieure. — Le ciel étant uniformément couvert de nuages, ce n'est qu'en profitant d'une éclaircie de durée très courte (5^{s}), qu'on a réussi, après deux heures d'attente, de déterminer le nord géographique.

CIII. **Sölvesborg.** (29 juill.) — On s'est installé à 180^{m} à l'ouest de la gare, dans un champ d'orge, sur un sentier traversant le champ, au point de rencontre de trois murs de clôture. — La déclinaison a subi, pendant les observations faites à Sölvesborg une légère agitation (2'.4).

CIV. **Teckomatorp.** (13 juill.) — Le point d'observation a été choisi sur un champ cultivé au nord du chemin de fer de Lund à Landskrona, sur un chemin qui passe dans la direction du chemin de fer à 120^{m} de distance, à 40^{m} de la route qui conduit à Nöbbelöf et à Skräflinge.

CV. **Tibro.** (16 sept.) — Les observations ont été faites au nord de la gare, à 95^{m} au nord-nord-ouest du chemin spécial conduisant de la gare à la route de l'auberge, à 45^{m} à l'ouest de la gare, à 25^{m} à l'ouest-sud-ouest d'un puits, à 8^{m} au sud d'un échalier. — L'observation du soleil a eu lieu dans d'excellentes conditions atmosphériques. — Les observations faites à Tibro le 16 septembre correspondent à une époque de calme magnétique absolue.

CVI. **Tollarp.** (28 juill.) — La station a été choisie en face de la gare, à 270^{m} de distance dans la direction du nord, à 5^{m} à l'ouest du chemin conduisant à la propriété de M. GÖRANSSON et à la forêt.

CVII. **Tomelilla.** (26 juill.) — On s'est installé au nord-ouest de la gare, sur la route conduisant à Tryde et à Ramsåsa, dans un champ de seigle, à 80^{m} au nord-ouest de la gare, à 30^{m} au sud-ouest de la route, en face d'une maison d'habitation. Le chemin de fer passe à 150^{m} de distance à l'est. — Les observations de Tomelilla correspondent à une époque de calme magnétique.

CVIII. **Trelleborg.** (21 juill.) — On s'est installé au point où aboutit la rue Stora Nygatan, à 225^{m} au nord-ouest de la gare, au point de croisée de la 2de rue de traverse après Storgatan. — Les éléments magnétiques ont été un peu troublés pendant les observations faites à Trelleborg.

CIX. **Tutaryd.** (14 août.) — On s'est établi en face de la gare, à 70^{m} de distance, sur la route de Knutstorp. Le chemin de fer est à 85^{m} de distance.

CX. **Tyringe.** (4—5 août.) — L'observation a été faite dans un pré au nord du chemin de fer, sur un sentier conduisant à l'auberge (*Gästgifvaregården*) en continuation du chemin qui traverse le chemin de fer à 100^{m} à l'est de la gare: 1° à 100^{m} au nord du chemin de fer, à 15^{m} à l'est d'un champ cultivé; 2° à 70^{m} plus loin vers

le nord, à 8^{m} à l'est du même champ, près du coin nord-est du mur de clôture qui le renferme. — Les observations d'inclinaison de la deuxième station ont été faites à la hâte, en raison des tenèbres qui nous menaçaient. — Les observations faites à Tyringe ont révélé une attraction locale très importante.

CXI. **Udden.** (21 juin.) — Les observations faites à Udden, ont eu pour objet le contrôle de celles faites à Gustafsberg. La station a été choisie près d'une maison de campagne appartenant au professeur ROSSANDER, à l'est du corps-de-logis, sur une allée sablée, non loin de la pointe qui regarde les fabriques de Gustafsberg. — La valeur de l'inclinaison trouvée à Udden diffère de celle qu'on a obtenu à la station voisine de Gustafsberg. Bien qu'à ce dernier lieu la station d'observation n'était pas bien éloignée des fabriques, il ne me paraît pas probable que la divergence signalée dépende des masses de fer contenues dans les machines; il paraît plus probable de les attribuer à l'action propre du sol.

CXII. **Uddevalla.** (10 sept.) — La station a été choisie sur le champ de foire situé en face de la gare de l'autre côté du canal, à 30^{m} à l'ouest du théâtre, à 15^{m} au sud de la rue qui passe le côté nord du théâtre. Le chemin de fer passe à 150^{m} de distance au nord. — Le temps étant pluvieux, il n'a pas été possible d'observer le soleil.

CXIII. **Upphärad.** (9 sept.) — On s'est installé sur la montagne qui domine la gare à l'est, à 80^{m} de distance de la gare, à 12^{m} à l'est d'un chemin qui suit la direction du chemin de fer, à 10^{m} au nord-ouest d'un poteau télégraphique, à 10^{m} au nord d'une clôture renfermant un groupe de maisons. — D'épais nuages s'étant amoncelés vers 5^{h} 30^{m} ont interrompu l'observation du soleil; une pluie torrentielle a commencé au moment où les observations s'achevaient. L'observation de l'inclinaison a été difficile à cause des tenèbres.

CXIV. **Upsal.** (13, 19—22, 24—25 oct., 3, 5, 10—12 nov.) — Les observations faites à Upsal ont eu lieu dans le voisinage de l'Observatoire magnétique appartenant à l'Institut de physique de l'Université: 1° dans l'Observatoire magnétique même, sur le pilier placé au milieu de la maison qui sert habituellement aux déterminations absolues de l'intensité; 2° en avant de la maison, à 0^{m}.9 du bord extérieur de la marche (du seuil), c'est-à-dire à 4^{m}.9 du centre du pilier au milieu de la maison. L'instrument était placé sur un trépied en bois à 1^{m}.1 de hauteur au-dessus du sol; 3° au nord de l'Observatoire à 20 ou 30^{m} de distance, dans un champ cultivé. 4° Une quatrième observation à été faite dans la maisonnette magnétique appartenant à l'Observatoire astronomique. Ce point est situé à 150^{m} au nord de l'Observatoire, tandis que l'Observatoire magnétique est à 500^{m} de distance dans la direction du S. 37° E.

CXV. **Uranibourg.** (15 juill.) — Les observations ont été faites dans le voisinage du fameux Observatoire de Tycho-Brahé située sur l'île de Hveen. On s'est installé au point où était situé jadis l'Observatoire annexe appelé par Tycho *Stelleburg*, construit en 1584, à 100^{m} au sud-ouest de l'Observatoire principal. Il n'en reste plus rien: un mur de clôture en forme d'ellipse dont les diamètres principaux sont de 18^{m} et de 25^{m} indiquent seulement le lieu; je me suis placé à l'intérieur tout près du bord ouest, au milieu d'un amas d'orties.

CXVI. **Varberg**. (21 août.) — On s'est installé sur un terrain ouvert à l'est de la gare, au point de croisée de deux rues dont l'une passe parallèlement au chemin de fer à 75^{m} de distance à l'est, l'autre dans une direction perpendiculaire à 80^{m} au nord de la gare. Le trépied a été installé au coin nord-est du même terrain, à 4^{m} de distance des deux rues supposées prolongées jusqu'à ce point.

CXVII. **Veddige**. (24 août.) — La station a été choisie à 200^{m} environ au nord-est du chemin de fer de Varberg à Herrljunga, dans un champ cultivé, à 80^{m} au nord-nord-ouest de la route qui suit la direction du chemin de fer à 110^{m} de distance, à 15^{m} au sud-ouest de l'avenue de la gare supposée prolongée vers l'ouest.

CXVIII. **Venersborg**. (10 sept.) — On a choisi le point d'observation à l'ouest de la ville, sur le bord ouest du canal, à 155^{m} au nord du pont du chemin de fer, à 50^{m} au sud d'une grande maison située vis-à-vis du marché. — L'observation du soleil a été interrompue par d'épais nuages qui approchaient. — Les observations de Venersborg correspondent à un état de trouble magnétique: les variations de la déclinaison pendant la durée des observations ont surpassé 2'.

CXIX. **Vestra Ed**. (7 sept.) — On s'est établi à 140^{m} environ au sud de la gare, près du chemin conduisant à l'église d'Ed; sur un champ cultivé, à 35^{m} au sud de la route, à 75^{m} à l'est du point de bifurcation du chemin venant de la gare, à 10^{m} à l'est d'une clôture renfermant une maison avec un jardin. — L'observation du soleil a été faite dans de bonnes conditions atmosphériques.

CXX. **Vingåker**. (20 sept.) — Le point d'observation a été choisi sur la route de Katrineholm, au point de contour du chemin conduisant à Bondestad, à 265^{m} de la gare. Le chemin de fer passe à 250^{m} au sud.

CXXI. **Vislanda**. (1er juill.) — On s'est établi à l'est de la gare, sur le chemin conduisant à l'auberge de Gottåsa (*Gästgifvaregård*), à 470^{m} de la gare, au point de contour d'un petit chemin de traverse, à 265^{m} de la limite est du champ de foire. La station choisie par M. Lundqvist en 1869 paraît avoir été située à 30^{m} au sud de ce point; or, les données précises faisant défaut, sa position n'a pu être appréciée qu'avec une approximation de cent pas environ. — L'installation de l'instrument a été très difficile à cause de l'instabilité du sol.

CXXII. **Vittsjö**. (4 août.) — Les observations ont été faites sur le champ de foire à l'est du chemin de fer, à 160^{m} au sud de la gare, à 10^{m} à l'ouest de la rive d'une petite baie du lac Vittsjön, à 45^{m} au nord de la route conduisant à Åkarp, à 105^{m} à l'est des baraques de la foire. Le chemin de fer passe à 160^{m} à l'ouest de la station.

CXXIII. **Vollsjö**. (26 juill.) — On s'est établi sur la route de Vollsjö, à 185^{m} au sud de la gare, à 10^{m} à l'ouest de la route, sur le sommet d'une colline; aux environs de la station, le sol était couvert de bloc granitiques, contenant sans doute du fer oxydulé. — Les observations de la composante ont été contrariées par un vent frais.

CXXIV. **Ystad.** (22 juill.) — Le point d'observation a été choisi à l'ouest de la ville dans le parc du cimetière (*Kyrkogårdsplanteringen*), non loin de la limite nord du parc, sur une allée sablée, à 50^{m} à l'est du pavillon, à 20^{m} au sud de la route qui longe le parc. — Ce point coïncide avec le point n. 2 de M. LUNDQVIST.

CXXV. **Åhus.** (28 juill.) — On s'est installé sur la pente d'une colline sablonneuse, à 90^{m} au sud du chemin de fer d'Åhus à Hör, à 90^{m} à l'ouest de la gare, à 70^{m} au sud d'un mur de clôture, à 90^{m} à l'ouest du chemin conduisant à la ville.

CXXVI. **Åmål.** (8 sept.) — On s'est installé au nord de l'Hôtel du chemin de fer, à 6^{m} à l'ouest d'une maison spéciale destinée au jeu de quilles, à 8^{m} au sud de son coin nord. Distance au chemin de fer, 90^{m}.

CXXVII. **Ånimskog.** (8 sept.) — Le point d'observation a été choisi au nord de la gare, dans un champ cultivé, près du chemin conduisant à Kusebo, à 3^{m} à l'ouest du chemin, à 75^{m} au nord du chemin conduisant à Ånimskog. Le point est situé à 100^{m} environ à l'ouest du chemin de fer. — Le temps étant pluvieux, il n'a pas été possible d'observer le soleil.

CXXVIII. **Åsa.** (23 août.) — Les expériences ont été faites dans un champ cultivé près du chemin de fer à l'ouest, dans le voisinage d'un large fossé, passant à 165^{m} de la route qui suit le bord ouest du chemin de fer, à 10^{m} à l'ouest du fossé: 1° en face de la gare, à 50^{m} au nord d'un sentier conduisant à une ferme, située à 280^{m} à l'ouest du chemin de fer; 2° à 15^{m} au sud du même sentier.

CXXIX. **Åstorp.** (7 août.) — Le point d'observation a été choisi dans un champ cultivé au nord de la gare, à 90^{m} à l'est du chemin de Björnekulla, à 170^{m} au nord de la gare; 2° à 55^{m} du point précédent dans la direction opposée à celle de la mire (S. 25° O.). — A 250^{m} environ au sud-ouest de la gare est situé un rocher escarpé appelé Björnekulla Klint, formant le point terminus de Söderåsen vers le nord. Ce rocher est composé de gneiss.

CXXX. **Ätran.** (19 août.) — Les observations ont été faites à 155^{m} à l'est de la gare, sur le chemin conduisant à une ferme, au point de croisée du chemin susdit et d'une route qui suit la direction du chemin de fer; le pied a été installé à 115^{m} à l'ouest de la vacherie de la ferme, à 60^{m} au sud de l'avenue du corps-de-logis. — Comme je suis arrivé à Ätran très tard dans la soirée du 18 août et que je suis retourné de bonne heure (6^{h}) le matin suivant, Vénus et la Lune ont servi à déterminer le méridien géographique.

III. — Observations faites pour déterminer les éléments du magnétisme terrestre.

Tableau I. — Marche du chronomètre Linderoth n° 22.

Date astronomique			Etat du chronomètre (T. de Stockh.)	Marche diurne	Pendule et méthode de comparaison
1892	Juin	5.10	+ 12^{m}11^s.7	− 4^s.3	
		7.02	+ 12 3.5	+ 1.5	
		10.85	+ 12 9.3	+ 1.0	
		13.98	+ 12 12.5	+ 2.8	
		14.34	+ 12 13.5	+ 1.8	Upsal (comp. directe).
		14.91	+ 12 14.5	+ 0.9	
		15.14	+ 12 14.7	+ 0.7	
		16.18	+ 12 15.4	+ 1.2	
		17.33	+ 12 16.8	+ 2.6	
		22.01	+ 12 29.1	+ 1.0	Stockholm (téléphone).
	Juill.	3.94	+ 12 40.9	+ 1.7	
		4.92	+ 12 42.6	+ 1.4	
		5.90	+ 12 44.0	+ 1.6	Copenhague (comp. dir.).
		7.89	+ 12 47.3	+ 1.8	
		10.90	+ 12 52.6	+ 2.3	
		15 43	+ 13 2.2	+ 3.4	Stockholm (télégraphe).
		15.98	+ 13 4.1	+ 2.5	Lund (téléphone).
		18.22	+ 13 9.7	+ 2.5	Lund (comp. dir.).
		19.10	+ 13 11.9	+ 2.5	
		19.94	+ 13 14.0	+ 4.7	
		25.42	+ 13 39.9	+ 5.8	
		28.44	+ 13 57 5	+ 3.3	
	Août	8.39	+ 14 33.4	+ 3.9	
		20.40	+ 15 20.5	+ 5.8	
		22.39	+ 15 32.0	+ 6.0	Stockholm (télégraphe).
		30.40	+ 16 19.9	+ 5.0	
	Sept.	4.39	+ 16 45.0	+ 4.8	
		10.40	+ 17 14.1	+ 3.7	
		15.39	+ 17 32.5	+ 3.9	
		20.03	+ 17 50 7	+ 3.4	
		25.91	+ 18 10.4	+ 7.7	Stockholm (téléphone).
		27.97	+ 18 26.2	+ 8.6	
	Oct.	5.32	+ 19 29.2	+ 4.1	Stockholm (comp. dir.).
		10.04	+ 19 48.4	+ 9.7	Upsal (comp. dir.).
		12.93	+ 20 16.4		
		16.06	+ 1 29.8	+ 11.9	
		18.99	+ 2 4.7	+ 1.0	
		24.02	+ 2 9.6	+ 3.7	Upsal (comp. dir.).
	Nov.	1.10	+ 2 39.9	+ 3.4	
		2.98	+ 2 46.7	− 11.4	
		3.20	+ 2 44.2	+ 4.6	
		8.21	+ 3 7.4		

La barre horizontale placé dans la colonne des États du chronomètre indique que la montre s'est arrêtée dans l'intervalle.

Tableau II. — Observations de l'azimut.

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Upsal II	Repère[1])				60°19′.2					
$\varphi = 59^0 51'.2$	14 juin	$23^h 11^m 35^s.0$	10	+ 1′.7	299 34.5	L.D.		$44^0 40'.2$		
$k = 0^0 25'.6$	» »	23 18 18.2	10	+ 2.0	297 2.2	»		44 39.9		
	» »	23 23 35.8	10	+ 2.1	295 2.1	»		44 40.5	$44^0 42'.2$	$u = +10^m 31^s.4$
	» »	23 31 8.3	10	+ 1.2	112 18.9	L.G		44 43.0	± 0.6	$c = +2'.6$
	» »	23 35 50.8	10	+ 0.5	110 30.3	»		44 44.0		
	» »	23 40 40.2	10	+ 0.5	108 39.8	»		44 44.8		
Gustafsberg	Repère[2])				33 21.1					
$\varphi = 59^0 19'.6$	20 juin	4 44 0.4	10	− 4.0	189 19.8	L.D.		65 13.5		
$k = -0^0 19'.7$	» »	4 50 9.2	10	− 4.2	188 0.7	»		65 13.7	65 12.8	$u = +13^m 43^s.1$
	» »	4 57 26.0	10	+ 0.5	6 35.8	L.G.		65 12.1	± 0.3	$c = +2'.2$
	» »	5 4 26.8	10	+ 0.2	5 6.3	»		65 12.1		
Udden	Repère[3])				251 56.1					
$\varphi = 59^0 19'.5$	21 juin	0 48 37.9	10	− 0.6	139 49.4	L.G.		271 7.2	271 4.4	$u = +13^m 40^s.9$
$k = -0^0 18'.6$	» »	0 54 40.6	10	− 2.0	317 23.1	L.D.		271 1.5	± 1.9	$c = +2'.0$
Dalarö	Repère[4])				290 15.3					
$\varphi = 59^0 7'.8$	22 juin	23 53 25.4	10	− 1.2	313 38.1	L.G.		25 25.2		
$k = -0^0 20'.8$	» »	23 57 51.4	10	− 1.1	311 53.8	»		25 25.2	25 24.0	$u = +13^m 53^s.3$
	23 juin	0 4 30.8	10	− 0.1	129 8.5	L.D.		25 22.7	± 0.5	$c = +2'.1$
	» »	0 9 5.8	10	− 0.5	127 21.2	»		25 23.0		
Jutholmen	Repère[5])				198 2.3					
$\varphi = 59^0 7'.5$	23 juin	3 28 57.4	10	− 0.4	19 28.8	L.D.		73 27.6	73 29.2	$u = +13^m 55^s.4$
$k = -0^0 21'.3$	» »	3 35 21.6	10	− 0.4	198 4.4	L.G.		73 30.8	± 1.1	$c = +2'.3$
Vislanda	Repère[6])				265 57.5					
$\varphi = 56^0 47'.1$	30 juin	17 49 23.2	10	−11.8	287 19.8	L.D.		95 9.8	95 9.7	$u = -1^m 45^s.1$
$k = 3^0 35'.6$	» »	17 54 26.0	10	−15.4	286 19.8	»		95 10.8	± 0.4	$c = +2'.6$
	» »	18 2 48.4	10	−13.7	104 43.5	L.G.		95 8.5		
Liatorp	Repère[7])				120 26.1					
$\varphi = 56^0 39'.7$	30 juin	21 9 21.5	10	− 0.8	159 9.2	L.G.		336 19.2		
$k = 3^0 46'.9$	» »	21 15 13.3	10	− 0.5	157 33.5	»		336 19.2	336 19.1	$u = -2^m 29'.2$
	» »	21 23 24.3	10	− 0.2	335 14.4	L.D.		336 19.0	± 0.0	$c = +1'.2$
	» »	21 28 27.0	10	0.0	333 48.8	»		336 19.1		
Elmhult	Repère[8])				64 16.2					
$\varphi = 56^0 33'.3$	1er juill	4 44 21.5	10	− 0.1	269 7.7	L.D.		111 18.6	111 18.3	$u = -3^m 1^s.3$
$k = 3^0 54'.9$	» »	4 50 4.6	10	− 0.6	267 54.2	»		111 18.2	± 0.1	$c = +2'.5$
	» »	4 58 15.2	9	+ 0.7	86 17.2	L.G.		111 18.2		
Malmö	Repère[9])				228 2.5					
$\varphi = 55^0 36'.9$	11 juill.	6 28 42.6	10	− 3.6	335 39.2	L.G.		213 34.6	213 34.1	$u = -7^m 21^s.3$
$k = 5^0 3'.7$	» »	6 37 9.8	10	+ 0.8	153 56.3	L.D.		213 34.0	± 0.2	$c = +2'.2$
	» »	6 42 20.2	10	+ 1.0	152 55.7	»		213 33.8		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Kjeflinge	Repère[10])				20°12′.3					
$\varphi = 55^0 47'.6$	12 juill.	$7^h 43^m 9^s.6$	10	− 1′.5	111 47.4	L.G.		212° 7′.5		
$k = 4^0 57'.0$	» »	7 48 7.3	10	− 1.6	110 47.8	»		212 7.2	212° 6′.9	$u = -6^m 52^s.1$
	» »	7 54 15.0	10	+ 0.3	289 30.6	L.D.		212 5.9	± 0.3	$c = +1'.2$
Teckomatorp	Repère[11])				13 36.2					
$\varphi = 55^0 52'.3$	12 juill.	20 55 41.0	10	+ 0.7	239 19.4	L.G.		158 23.7	158 22.6	$u = -6^m 54^s.8$
$k = 4^0 58'.0$	» »	21 2 1.7	10	− 1.2	57 33.2	L.D.		158 21.5	± 0.7	$c = +1'.9$
Landskrona	Repère[12])				39 0.7					
$\varphi = 55^0 51'.9$	13 juill.	2 1 20.7	10	− 1.8	237 57.6	L.G.		240 20.7	240 19.8	$u = -7^m 56^s.3$
$k = 5^0 13'.5$	» »	2 6 52.9	5	− 1.1	55 34.0	L.D.	Soleil I	240 19.0	± 0.6	$c = +2'.1$
Uranibourg	Repère[13])				190 45.8					
$\varphi = 55^0 54'.4$	15 juill.	1 22 27.4	9	+ 1.2	60 39.6	L.D.		77 6.8		
$k = 5^0 21'.4$	» »	1 27 55.3	10	+ 1.6	58 38.2	»		77 6.4	77 5.6	$u = -8^m 23^s.4$
	» »	1 33 34.1	10	− 2.7	236 32.8	L.G.		77 4.7	± 0.4	$c = +1'.8$
	» »	1 38 4.2	10	− 3.0	234 54.8	»		77 4.6		
Hildesborg	Repère[14])				70 28.4					
$\varphi = 55^0 55'.1$	16 juill.	0 47 18.7	10	− 0.3	47 25.8	L.G.		350 32.9		
$k = 5^0 14'.6$	» »	0 51 37.4	8	− 0.2	45 42.3	»		350 32.4	350 34.2	$u = -7^m 52^s.7$
	» »	0 59 24.9	10	+ 0.2	222 33.8	L.D.		350 35.9	± 0.6	$c = +2'.3$
	» »	1 7 46.3	10	+ 0.4	219 18.8	»		350 35.5		
Lund II	Repère[15])				52 8.4					
$\varphi = 55^0 41'.9$	19 juill.	23 46 9.7	10	+ 0.1	277 1.7	L.G.		214 59.6	214 59.2	$u = -6^m 13^s.8$
$k = 4^0 52'.0$	» »	23 49 47.3	5	− 3.2	94 56.7	L.D.	Soleil I	214 58.8	± 0.3	$c = +1'.5$
Svedala	Repère[16])				226 58.7					
$\varphi = 55^0 30'.5$	20 juill.	18 33 37.4	10	+ 1.8	89 25.5	L.G.		126 46.2		
$k = 4^0 49'.4$	» »	18 38 48.9	9	+ 2.0	88 23.5	»		126 48.2	126 48.9	$u = -5^m 59^s.7$
	» »	18 46 13.7	9	+ 1.3	266 48.9	L D.		126 49.4	± 0.8	$c = +2'.0$
	» »	18 51 13.6	10	+ 1.1	265 48.8	»		126 51.8		
Trelleborg	Repère[17])				212 56.7					
$\varphi = 55^0 22'.5$	20 juill.	21 48 5.4	10	+ 0.6	133 4.1	L.G.		230 30.6	230 28.6	$u = -6^m 16^s.2$
$k = 4^0 53'.7$	» »	21 53 35.8	10	+ 1.5	311 18.6	L.D.		230 26.6	± 1.3	$c = +2'.1$
Klagstorp	Repère[18])				358 9.1					
$\varphi = 55^0 23'.8$	21 juill.	0 16 2.3	10	+ 2.2	40 23.8	L.G.		43 57.7		
$k = 4^0 40'.8$	» »	0 19 44.6	10	+ 1.3	38 53.2	»		43 58.9	43 56.5	$u = -5^m 24^s.1$
	» »	0 25 24.1	10	− 0.1	216 22.4	L.D.		43 54.6	± 0.7	$c = +1'.8$
	» »	0 29 33.2	10	− 0.1	214 41.4	»		42 54.6		
Rydsgård	Repère[19])				215 4.1					
$\varphi = 55^0 28'.4$	21 juill.	19 4 40.5	6	− 1.6	350 28.0	L.G.		44 25.9		
$k = 4^0 27'.9$	» »	19 11 2.4	10	− 1.8	349 15.2	»		44 31.7	44 29.0	$u = -4^m 28^s.8$
	» »	19 17 15.0	10	− 3.8	167 52.3	L.D.		44 29.7	± 1.1	$c = +1'.2$
Ystad	Repère[20])				340 0.1					
$\varphi = 55^0 25'.8$	21 juill.	23 16 15.1	10	+ 3.2	22 5.2	L.G.		20 37.6	20 37.5	$u = -3^m 34^s.4$
$k = 4^0 14'.5$	» »	23 21 19.2	10	− 0.5	199 56.5	L.D.		20 37.4	± 0.1	$c = -1'.9$

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Cimbrishamn	Repère [21])				15°38′.1					
$\varphi = 55^0 33'.3$	22 juill.	$5^h 44^m 17^s.3$	10	— 1′.0	223 39.5	L.D.		125° 5′.9	125° 6′.4	$u = -1^m 24^s.7$
$k = 3^0 42'.4$	» »	5 48 49.3	10	— 0.9	222 45.3	»		125 6.0	± 0.3	$c = +0'.5$
	» »	5 54 45.0	10	+ 3.8	41 38.1	L.G.		125 7.2		
Tomelilla	Repère [22])				12 22.1					
$\varphi = 55^0 32'.8$	25 juill.	21 26 45.9	9	— 2.6	35 38.5	L.D.		147 57.4		
$k = 4^0 6'.5$	» »	21 31 52.6	10	— 2.4	34 12.3	»		148 2.5	147 58.9	$u = -2^m 43^s.3$
	» »	21 37 39.4	10	+ 0.9	212 40.4	L.G.		147 58.8	± 0.8	$c = +1'.6$
	» »	21 42 10.3	10	+ 0.6	211 22.2	»		147 57.1		
Vollsjö	Repère [23])				307 42.2					
$\varphi = 55^0 42'.0$	26 juill.	2 43 33.8	11	— 1.5	225 9.2	L.G.		331 35.0		
$k = 4^0 16'.4$	» »	3 20 39.6	10	— 0.8	215 3.1	»		331 30.3	331 29.3	$u = -3^m 21^s.5$
	» »	3 26 27.9	10	— 1.8	33 25.3	L.D.		331 24.7	± 1.4	$c = +1'.1$
	» »	3 31 6.8	10	— 2.3	32 17.5	»		331 27.2		
Löberöd	Repère [24])				352 27.7					
$\varphi = 55^0 46'.6$	26 juill.	6 42 14.9	10	— 0.7	177 35.6	L.G.		112 29.5		
$k = 4^0 32'.8$	» »	6 46 43.4	10	— 0.9	176 42.2	»		112 29.3	112 28.3	$u = -4^m 26^s.3$
	» »	6 52 19.0	10	+ 1.4	355 33.2	L D.		112 27.0	± 0.4	$c = +0'.2$
	» »	6 56 45.9	10	+ 1.5	354 40.8	»		112 27.5		
Eslöf	Repère [25])				255 33.2					
$\varphi = 55^0 50'.2$	27 juill.	0 28 30.2	10	— 1.7	81 45.2	L.D.		12 52.8		
$k = 4^0 45'.3$	» »	0 32 29.7	10	— 1.9	80 11.4	»		12 53.1	12 59.5	$u = -5^m 12^s.0$
	» »	0 39 12.6	10	0.0	257 41.4	L.G.		13 6.0	± 2.6	$c = -2'.5$
	» »	0 43 30.5	10	— 0.5	256 0.9	»		13 6.2		
Hör	Repère [26])				115 18.4					
$\varphi = 55^0 56'.2$	27 juill.	5 35 14.4	9	— 1.2	355 21.8	L.G		333 57.3		
$k = 4^0 30'.8$	» »	5 40 28.2	10	— 1.4	354 19.8	»		333 58.8	334 0.4	$u = -4^m 12^s.7$
	» »	5 45 30.0	10	— 3.1	173 20.8	L.D.		334 1.3	± 1.0	$c = -0'.1$
	» »	5 50 8.7	10	— 2.8	172 27.4	»		334 4.2		
Hörby	Repère [27])				339 12.1					
$\varphi = 55^0 51'.4$	27 juill.	20 39 19.9	10	— 4.3	75 43.0	L G.		27 48.2	27 50.5	$u = -3^m 40^s.7$
$k = 4^0 23'.7$	» »	20 44 52.4	10	— 0.4	254 21.0	L.D		27 51.4	± 0.8	$c = +1'.1$
	» »	20 49 12.0	10	0.0	253 17.0	»		27 51.8		
Tollarp	Repère [28])				175 41.4					
$\varphi = 55^0 56'.2$	28 juill.	1 3 47.9	5	— 0.4	338 37.0	L.G.	Soleil I	184 33.5		
$k = 4^0 4'.3$	» »	1 9 28.9	10	— 0.4	336 52.2	»		184 29.8	184 30.8	$u = -2^m 22^s.0$
	» »	1 13 15.2	10	— 1.8	335 28.6	»		184 30.2	± 0.6	$c = +1'.3$
	» »	1 18 56.4	10	—10.5	153 10.2	L D.		184 29.8		
Efveröd	Repère [29])				283 39.8					
$\varphi = 55^0 54'.2$	28 juill.	4 25 35.6	10	+ 0.1	301 25.0	L.G.		97 11.3	97 10.8	$u = -1^m 58^s.8$
$k = 3^0 58'.7$	» »	4 29 54.9	6	— 2.1	120 22.5	L.D.		97 10.3	± 0.3	$c = +1'.3$
Åhus	Repère [30])				93 5.6					
$\varphi = 55^0 55'.6$	28 juill.	7 51 44.7	10	— 2.7	204 20.0	L.D.		53 9.9		
$k = 3^0 45'.5$	» »	7 57 21.3	10	— 3.0	203 11.0	»		53 9.9	53 9.8	$u = +1^m 5^s.2$
	» »	8 2 59.4	10	+ 0.4	22 2.8	L.G.		53 9.5	± 0.1	$c = +0'.5$

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Kristianstad	Repère[31])				356°41′.7					
$\varphi = 56^0\ 1'.8$	28 juill.	$19^h48^m49^s.7$	10	+ 3′.5	120 7.6	L.G.		43°43′.4	43°43′.5	$u = -1^m38^s.4$
$k = 3^0 54'.3$	» »	19 54 21.8	10	+ 0.6	298 50.3	L.D.		43 43.2	± 0.1	$c = +0'.4$
	» »	19 58 50.6	10	+ 0.6	297 50.7	»		43 43.9		
Sölvesborg	Repère[32])				171 7.4					
$\varphi = 56^0\ 3'.2$	28 juill.	22 57 41.8	10	— 1.0	107 34.2	L.G.		270 31.7	270 31.0	$u = +0^m5^s.6$
$k = 3^0 28'.4$	» »	23 1 47.7	10	— 0.8	106 4.7	»		270 30.6	± 0.2	$c = 0'.0$
	» »	23 7 35.9	10	— 6.7	283 50.6	L.D.		270 30.7		
Qviinge backe	Repère[33])				241 57.0					
$\varphi = 56^0\ 9'.5$	30 juill.	0 41 29.7	10	+ 0.5	37 27.6	L.G.		168 22.3		
$k = 3^0 57'.5$	» »	0 45 50.3	10	+ 0.4	35 49.1	»		168 22.7	168 21.7	$u = -1^m47^s.2$
	» »	0 52 14.8	10	+ 2.5	213 24.1	L.D.		168 21.1	± 0.3	$c = +0'.6$
	» »	0 57 48.8	10	+ 2.8	211 19.7	»		168 20.6		
Hästveda	Repère[34])				199 31.6					
$\varphi = 56^0 17'.6$	2 août	23 15 23.7	8	— 1.3	343 20.6	L.G.		124 5.1	124 5.0	$u = -2^m16^s.2$
$k = 4^0\ 8'.0$	» »	23 26 34.6	10	— 0.9	339 15.2	»		124 4.6	± 0.2	$c = +1'.0$
	» »	23 29 7.6	3	— 4.3	157 47.6	L.D.	Soleil I	124 5.3		
Vittsjö	Repère[35])				100 24.0					
$\varphi = 56^0 20'.3$	4 août	1 4 4.5	10	— 1.2	209 52.7	L.G.		129 55.2		
$k = 4^0 23'.4$	» »	1 7 58.0	7	— 2.6	208 26.5	»		129 54.1	129 53.7	$u = -3^m14^s.3$
	» »	1 16 37.1	10	+ 1.4	25 24.6	L.D.		129 52.7	± 0.4	$c = +0'.4$
	» »	1 20 41.7	10	+ 1.4	23 59.2	»		129 52.9		
Hessleholm	Repère[36])				330 33.4					$u = -3^m49^s.3$
$\varphi = 56^0\ 9'.5$	4 août	4 46 9.5	4	— 0.6	288 54 8	L.D.	Soleil I	221 0.6	221 1.6	$c = +0'.5$
$k = 4^0 17'.3$	Repère				319 20.7				± 0.6	$u = -3^m49^s.3$
	4 août	5 10 18.1	10	+ 2.1	92 54.3	L.G.		221 2.5		$c = +0'.4$
Tyringe	Repère[37])				203 8.9					
$\varphi = 56^0\ 9'.7$	4 août	6 23 57.0	5	+ 1.4	47 4.4	L.G.	Soleil I	306 47.8		
$k = 4^0 27'.5$	» »	6 33 13.2	10	+ 0.3	225 27.0	L.D.		306 46.7	306 47.8	$u = -3^m29^s.9$
	» »	6 39 21.5	7	— 0.3	224 14.0	»		306 48.1	± 0.3	$c = +0'.3$
	» »	6 46 58.7	10	+ 2.2	42 43.4	L.G.		306 48.6		
Perstorp	Repère[38])				287 21.1					
$\varphi = 56^0\ 8'.4$	6 août	10 15 34.5	1	— 0.4	265 27.3	L.G.	η Grande Ourse	97 24.9		
$k = 4^0 39'.6$	» »	10 19 41.5	1	+ 1.6	31 13.5	»	Lune I	97 22.1	97 24.1	$u = -4^m11^s.2$
	» »	10 24 45.5	1	+ 1.1	210 9.1	L.D.	Lune I	97 24.9	± 0.5	$c = +0'.6$
	» »	10 36 8.6	1	+ 0.1	207 40.1	»	Lune I	97 24.6		
Klippan I	Repère[39])				231 17.6					
$\varphi = 56^0\ 8'.1$	6 août	19 51 48.7	10	+ 0.2	47 45.1	L.G.		98 23.0		
$k = 4^0 55'.7$	» »	19 57 6.8	10	+ 0.2	46 33.8	»		98 22.5	98 22.6	$u - 5^m14^s.3$
	» »	20 2 31.0	10	+ 1.8	225 18.6	L.D		98 22.2	± 0.1	$c = +1'.0$
	» »	20 6 55.3	10	+ 1.5	224 18.8	»		98 22.8		
Åstorp I	Repère[40])				203 22.8					
$\varphi = 56^0 8'.2$	7 août	1 36 7.3	10	— 2.2	197 49.8	L.D.		205 10.5		
$k = 5^0 6'.4$	» »	1 40 5.5	10	— 2.2	196 29.6	»		205 9.8	205 9.4	$u = -5^m56^0.3$
	» »	1 45 33.0	10	+ 3.4	14 49.6	L G.		205 8.7	± 0.3	$c = +1'.3$
	» »	1 49 13.4	10	+ 3.5	13 37.5	»		205 8.6		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Kattarp	Repère [42])				298°38′.3					
$\varphi = 56^0\ 8'.7$	Repère [43])				302 41.2					
$k = 5^0 16'.6$	9 août	$0^h\ 8^m 16^s$	1	»	8 58	L.D.		245°.0		$c = +0'.2$
	Repère [42])				302 54					
	9 août	0 55 55	1	»	351 6	L.D.	*	243.8		
	» »	0 57 16	1	»	350 12	»	*	242.4	244°.45	$u = -6^m 30^s.5$
	» »	0 59 25	1	»	349 36	»	*	243.6	± 0.37	$c = -24'$
	» »	1 1 5	1	»	349 16	»	*	243 8		
	» »	1 6 15	1	»	350 4	»	*	246.5		
	Repère [41])				13 48					
	» [42])				143 37					
	» [43])				147 40					
	9 août	1 45 24	1	»	0 36	L.D.		246.2		$c = +0'.2$
Engelholm	Repère [44])				48 26.6					
$\varphi = 56^0 14'.7$	9 août	22 49 16.6	9	+ 1′.6	159 16.7	L.D.		261°36′.4		
$k = 5^0 11'.8$	» »	22 54 25.5	10	+ 2.4	157 33.7	»		261 35.8	261°36′.8	$u = -6^m 7^s.6$
	» »	23 1 58.4	10	— 2.9	334 54.6	L.G.		261 37.7	± 0.3	$c = -0'.4$
	» »	23 6 36.8	9	— 2.9	333 18.1	»		261 37.2		
Engelholms	Repère [45])				148 29.9					
hamn	10 août	5 25 16.2	10	— 0.9	70 10.3	L.G		10 51.7		
$\varphi = 56^0 16'.4$	» »	5 29 46.2	10	— 0.7	69 14.5	»		10 52.1	10 52.3	$u = -6^m 12^s.1$
$k = 5^0 13'.2$	» »	5 35 36.4	10	+ 1.0	248 0.8	L.D.		10 52.5	± 0.2	$c = +0'.9$
	» »	5 39 54.6	10	+ 0.7	247 7.5	»		10 52.8		
Grefvie I	Repère [46])				251 27.7					
$\varphi = 56^0 23'.5$	10 août	18 55 13.4	1	— 0.5	44 52.9	L.G.		63 56.1		
$k = 5^0 16'.3$	» »	19 3 27.2	4	0.0	43 9.5	»		63 55.8	63 55.4	$u = -6^m 22^s.4$
	» »	19 9 18.1	10	— 0.2	41 55.0	»		63 55.0	± 0.2	$c = +0'.5$
	» »	19 14 8.8	9	— 2.0	220 51.6	L.D.		63 54.9		
	» »	19 18 55.1	10	— 2.2	219 50.6	»		63 55.2		
Laholm I	Repère [47])				94 51.4					
$\varphi = 56^0 30'.8$	10 août	23 9 16.7	10	+ 0.4	354 32.7	L.G.		237 50.0		
$k = 5^0 0'.6$	» »	23 13 21.0	10	— 0.5	353 8.0	»		237 51.1	237 50.7	$u = -5^m 18^s.9$
	» »	23 18 6.7	10	— 2.5	171 24.4	L.D.		237 50.6	± 0.2	$c = +0'.4$
	» »	23 21 48.6	9	— 2.7	170 6.4	»		237 50.9		
Eldsberga	Repère [48])				2 36.4					
$\varphi = 56^0 36'.0$	11 août	3 55 27.7	10	+ 0.6	62 12.6	L.G.		128 47.6		
$k = 5^0 4'.0$	» »	4 0 50.0	10	— 0.4	60 56.2	»		128 48.1	128 47.2	$u = -5^m 31^s.7$
	» »	4 6 18.9	10	— 0.4	239 36.6	L.D.		128 46.2	± 0.3	$c = +0'.3$
	» »	4 10 45.2	10	— 0.7	238 35.4	»		128 46.7		
Skallinge I	Repère [49])				238 14.0					
$\varphi = 56^0 46'.9$	12 août	0 28 45.5	3	— 1.5	337 26.3	L.D.	Soleil I	286 36.8	286 38.8	$u = -4^m 40^s.4$
$k = 4^0 52'.0$	» »	0 41 27.4	6	— 1.2	153 22.2	L.G.		286 39.7	± 0.7	$c = +0'.5$
	» »	0 44 10.2	2	— 1.0	152 1.2	»	Soleil I	286 39.8		

* Pointés à l'œuil nu.

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Lidhult	Repère[50])				197°57′.8					
$\varphi = 56^0 49'.7$	12 août	$19^h\ 7^m 54^s.4$	10	— 5′.1	178 3.9	L.G		254°30′.1		
$k = 4^0 36'.8$	» »	19 14 18.3	10	— 3 2	176 44.3	»		254 31.9		
	Repère[50])				197 52.9				254°28′.9	$u = -3^m 36^s.5$
	12 août	19 21 20.1	10	+ 1.7	355 6.8	L D.		254 27.7	± 0.6	$c = -0'.4$
	» »	19 25 44.5	10	+ 2.2	354 9.7	»		254 27.6		
	» »	19 30 1.8	10	+ 2.6	353 13 3	»		254 27.0		
Bolmen I	Repère[51])				72 34.7					
$\varphi = 56^0 49'.2$	12 août	22 47 11.4	8	— 1.3	177 26.3	L.D.		256 59.8		
$k = 4^0 21'.2$	» »	22 52 24.4	8	— 2.5	175 21.5	»		257 4.7	257 0.3	$u = -2^m 33^s.5$
	» »	22 57 29.8	10	— 3.3	173 38.6	»		257 1.8	± 0.9	$c = +0'.8$
	» »	23 2 16.2	10	+ 0.3	352 5.7	L.G.		256 58.2		
	» »	23 6 11.4	10	+ 0.3	350 45.6	»		256 56.9		
Ljungby	Repère[52])				209 25.7					
$\varphi = 56^0 49'.9$	13 août	4 37 17.3	10	— 1.1	319 18.5	L.G.		189 8.2		
$k = 4^0 6'.9$	» »	4 43 25.6	6	0.5	317 57.6	»		189 7.7	189 6.6	$u = -1^m 35^s.4$
	» »	4 51 7.2	9	— 1.7	136 13.8	L.D.		189 5.5	± 0.4	$c = -0'.1$
	» »	4 58 59.5	5	— 2.4	134 15.2	»		189 6.0		
	» »	5 5 36.3	10	— 2.2	133 6.8	»		189 5.4		
Tutaryd	Repère[53])				114 17.2					
$\varphi = 56^0 51'.0$	13 août	23 42 11.4	10	0.0	309 53.2	L G.		187 16 3		
$k = 4^0 0'.7$	» »	23 45 38.9	10	— 0.2	308 39.9	»		187 16.9	187 13.9	$u = -1^m 7^s.5$
	» »	23 50 39.0	9	— 0.1	126 47.0	L.D.		187 12.6	± 0.8	$c = +0'.6$
	» »	23 56 6.2	11	— 0.2	124 49.9	»		187 12.4		
	14 août	0 1 26.3	9	— 0.1	122 55.6	»		187 11.4		
Alfvestad	Repère[54])				270 58.4					
$\varphi = 56^0 54'.2$	14 août	18 8 6.0	1	— 0.4	88 31.6	L.G.	Soleil II	80 32.8	80 32.8	$u = +0^m 57^s.5$
$k = 3^0 30'.2$										$c = +1'.0$
Lamhult	Repère[55])				242 13.8					
$\varphi = 57^0 10'.2$	15 août	0 49 51.5	1	— 2.1	68 32 0	L.D	Soleil II	22 21.8		
$k = 3^0 28'.4$	Repère[55])				246 49.0					
	15 août	2 56 1.4	11	— 1.6	214 10.1	L.G.		22 24.7	22 23.2	$u = +1^m 6^s.0$
	» »	2 59 31.6	5	— 1 8	212 55.2	»	Soleil I	22 25.0	± 0.6	$c = +0'.5$
	» »	3 8 56.4	10	— 2.2	30 41.9	L.D		22 21.4		
Säfsjö	Repère[56])				180 5.6					
$\varphi = 57^0 24'.3$	15 août	6 19 25.8	2	— 2 1	205 49.4	L.D.	Soleil I	306 59.3	306 59.3	$u = +1^m 27^s.5$
$k = 3^0 23'.2$										$c = +0'.0$
Nässjö	Repère[57])				174 59.4					
$\varphi = 57^0 39'.3$	15 août	17 38 15.8	7	— 0.7	160 51.5	L.G.		243 28.7	243 29.1	$u = +1^m 36^s.9$
$k = 3^0 21'.3$	» »	17 41 22.3	1	— 0.7	159 57.4	»	Soleil I	243 29.6	± 0.2	$c = +0'.4$
	» »	17 45 9 7	7	+ 1.9	339 25.9	L.D.		243 29.0		
Hook	Repère[58])				356 30.6					
$\varphi = 57^0 30'.9$	15 août	20 52 18.6	9	— 1.1	278 24.3	L G.		222 17.4		
$k = 3^0 46'.5$	» »	20 55 30.0	4	— 2.2	277 16.3	»	Soleil I	222 17.8	222 15.6	$u = -0^m 3^s.1$
	» »	22 42 23.2	7	— 1.0	66 32.7	L.D.		222 15.0	± 0 9	$c = +0'.6$
	» »	23 2 13.6	9	+ 1.2	60 0 8	»		222 12.1		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Klefshult	Repère[59])				167°19′.6					
$\varphi = 57^0 21'.3$	16 août	$2^h 28^m 16^s.5$	10	+ 0′.5	248 8.6	L.G.		127°28′.5		
$k = 3^0 57'.8$	» »	2 32 37.4	10	— 0.7	246 54.2	»		127 28.7	127°26′.8	$u = -0^m 47^s.7$
	» »	2 38 28.5	10	— 2.5	65 8.4	L.D.		127 24.1	± 0.8	$c = +0'.7$
	» »	2 52 26.8	5	— 3.3	61 20.8	»		127 25.8		
Kärda	Repère[60])				312 50.4					
$\varphi = 57^0 10'.2$	16 août	22 11 47.6	3	— 3.0	148 42.2	L.G.	Soleil I	158 21.9	158 22.4	$u = -1^m 26^s.1$
$k = 4^0 8'.2$	» »	22 17 3.2	10	— 2.6	147 27.6	»		158 25.2	± 1.0	$c = +0'.7$
	» »	23 2 51.0	2	+ 1.5	312 19.9	L.D	Soleil I	158 20.0		
Refteled	Repère[61])				190 50.8					
$\varphi = 57^0 10'.5$	17 août	19 15 4.9	5	— 0.4	260 53.4	L.G	Soleil I	347 41.8		
$k = 4^0 27'.8$	» »	19 19 30.5	3	— 1.8	259 55.7	»	Soleil I	347 42.3	347 41.4	$u = -2^m 41^s.0$
	» »	19 25 19.4	10	+ 1.1	78 54.2	L.D.		347 40.9	± 0.3	$c = +1'.0$
	» »	19 30 31.4	10	+ 1.6	77 45.7	»		347 40.7		
Smålandsstenar	Repère[62])				144 54.3					
$\varphi = 57^0 9'.8$	17 août	23 10 53.7	5	+ 2.7	124 9.2	L.G.	Soleil I	320 14.2		
$k = 4^0 38'.6$	» »	23 17 44.7	7	+ 3.0	122 13.2	»		320 13.9	320 13 4	$u = -3^m 23^s.6$
	» »	23 23 18.3	9	— 1.4	300 10.3	L.D.		320 12.4	± 0.3	$c = +1'.2$
	» »	23 27 14.8	10	— 2.3	298 49.2	»		320 13.2		
Ätran	Repère[63])				356 6.6					
$\varphi = 57^0 7'.4$	18 août	16 15 55.2	5	+ 0.6	133 52.5	L.D.	Lune II	221 57.5		
$k = 5^0 6'.1$	» »	16 43 46.5	9	+ 1.6	128 20.8	»	Lune II	221 56.6	221 57.0	$u = -5^m 10^s.8$
	» »	16 48 38.6	5	+ 1.0	118 38.5	»	Vénus	221 57.3	± 0.2	$c = +0'.5$
	» »	16 50 48 5	5	+ 1.1	118 9.2	»	Vénus	221 56.6		
Kinnared II	Repère[64])				265 16.1					
$\varphi = 57^0 1'.6$	18 août	20 35 25.1	10	+ 1.9	61 58.4	L.G.		92 11.2		
$k = 4^0 56'.8$	» »	20 41 2.3	10	+ 1.9	60 35.9	»		92 11.2	92 10.0	$u = -4^m 32^s.9$
	» »	20 47 8.7	10	— 1.6	238 59.0	L.D.		92 8.5	± 0.5	$c = +0'.6$
	» »	20 51 39.3	10	— 3.1	237 50.7	»		92 9.1		
Kinnared I	Repère[65])				294 29.4					
$\varphi = 57^0 1'.4$	18 août	23 7 52.7	10	— 3.4	48 32.5	L.G.		93 31.2	93 25.6	$u = -4^m 33^s.3$
$k = 4^0 57'.0$	» »	23 12 21.1	10	+ 7.3	227 2.8	L.D.		93 20.0	± 3.8	$c = -0'.3$
Fröslida	Repère[66])				316 30.6					
$\varphi = 56^0 52'.7$	19 août	0 41 3.4	10	+ 3.7	216 18.6	L.G.		271 10.7		
$k = 5^0 0'.4$	» »	0 45 1.9	10	+ 3.6	214 56.2	»		271 10.4	271 9.5	$u = -4^m 46^s.6$
	» »	0 51 9.3	10	— 2.2	32 41.2	L.D.		271 9.0	± 0.4	$c = +0'.7$
	» »	0 55 35.8	10	— 1.1	31 10.6	»		271 8.0		
Sennan	Repère[67])				26 27.7					
$\varphi = 56^0 46'.2$	19 août	19 26 3.5	10	— 1.4	38 40.5	L.G.		291 48.7		
$k = 5^0 4'.7$	» »	19 31 11.8	10	— 1.0	37 32.8	»		291 48.2	291 47.2	$u = -5^m 0^s.8$
	» »	19 38 59.5	10	+ 1.4	215 46.9	L.D.		291 45.9	± 0.5	$c = +0'.6$
	» »	19 43 58.4	10	+ 1.9	214 40.4	»		291 45.9		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Halmstad	Repère[68])				136°34′.2					
$\varphi = 56^0 40'.3$	19 août	$22^h 41^m 43^s.4$	10	— 3′.3	291 35.6	L.G.		125°40′.8		
$k = 5^0 11'.3$	» »	22 46 12.8	5	+ 2.1	109 45.4	L.D.	Soleil I	125 35.6	125°38′.6	$u = -5^m 26^s.7$
	» »	22 51 52.5	8	+ 1.5	108 16.6	»		125 35.9	± 1.1	$c = +0'.8$
	» »	22 58 52.7	10	— 4.3	286 2.4	L.G.		125 42.0		
Getinge	Repère[69])				188 54.6					
$\varphi = 56^0 49'.2$	20 août	19 29 2.2	10	— 2.7	212 12.4	L.G.		303 37.4		
$k = 5^0 19'.4$	» »	19 34 5.4	5	— 3.0	211 5.8	»		303 37.6	303 36.4	$u = -5^m 54^s.6$
	» »	19 41 56.9	5	— 1.0	29 1.2	L.D.	Soleil I	303 35.5	± 0.4	$c = +0'.7$
	» »	19 50 1.2	4	— 1.1	27 12.4	»	Soleil I	303 35.0		
Falkenberg	Repère[70])				67 42.1					
$\varphi = 56^0 54'.2$	21 août	1 41 5.3	10	+ 1.6	30 1.8	L.G.		352 51.5		
$k = 5^0 34'.1$	» »	1 45 12.3	10	+ 1.1	28 44.6	»		352 52.2	352 50.4	$u = -6^m 52^s.9$
	» »	1 50 42.0	10	— 1.8	206 54.3	L D.		352 48.8	± 0.6	$c = +0'.8$
	» »	1 54 49.6	10	— 2.2	205 38.6	»		352 49.2		
Varberg	Repère[71])				353 49.2					
$\varphi = 57^0 6'.6$	21 août	5 58 8.0	10	— 1.9	338 0.2	L.G.		78 4.9		
$k = 5^0 48'.3$	» »	6 3 0.5	10	— 2.9	336 59.4	»		78 4.8	78 4.5	$u = -7^m 47^s.7$
	» »	6 9 3.6	10	— 1.3	155 42.3	L.D.		78 4.1	± 0.2	$c = +0'.6$
	» »	6 14 6.4	10	— 1.9	154 39.5	»		78 4.0		
Backa	Repère[72])				321 31.8					
$\varphi = 57^0 14'.7$	22 août	18 9 59.6	10	— 2.8	324 5.9	L.G.		266 19.6		
$k = 5^0 52'.4$	» »	18 15 15.1	10	— 2.6	322 59.9	»		266 19.3	266 18.6	$u = -7^m 55^s.3$
	» »	18 20 36.1	10	+ 1.0	141 51.4	L.D.		266 17.8	± 0.3	$c = +0'.4$
	» »	18 25 43.7	10	+ 1.0	140 47.2	»		266 17.8		
Åsa I	Repère[73])				21 32.0					
$\varphi = 57^0 21'.2$	22 août	22 12 34.2	10	— 1.9	54 27.5	L.G.		354 44.9		
$k = 5^0 56'.1$	» »	22 16 56.2	10	— 1.4	53 9.4	»		354 44.2	354 42.2	$u = -8^m 9^s.1$
	» »	22 22 53.9	10	+ 0.9	231 18.0	L.D.		354 39.8	± 0.9	$c = +0'.7$
	» »	22 27 15.8	10	+ 0.8	229 58.6	»		354 39.8		
Kongsbacka	Repère[74])				86 24.6					
$\varphi = 57^0 29'.5$	23 août	3 25 5.1	10	— 0.2	130 2.0	L.D.		282 36.7		
$k = 5^0 58'.8$	» »	3 29 35.9	10	— 0.4	128 53.5	»		282 36.4	282 38.0	$u = -8^m 18^s.6$
	» »	3 35 24.5	10	— 0.3	307 31.4	L G.		282 39.3	± 0.6	$c = +0'.6$
	» »	3 39 54.7	10	0.0	306 25.1	»		282 39.5		
Veddige	Repère[75])				282 21.2					
$\varphi = 57^0 16'.3$	23 août	18 10 48.3	10	+ 0.6	43 17.5	L.G.		25 14.3		
$k = 5^0 43'.0$	» »	18 15 32.9	10	+ 0.9	42 18.1	»		25 14.2	25 13.9	$u = -7^m 12^s.9$
	» »	18 21 55.3	10	— 1.3	220 55.8	L.D.		25 13.6	± 0.1	$c = +0'.7$
	» »	18 27 6.0	10	— 1.2	219 51.0	»		25 13.6		
Björketorp	Repère[76])				192 4.3					
	Repère[77])				204 8.5					
$\varphi = 57^0 25'.8$	24 août	16 43 40.4	5	— 1.5	180 45.0	L.G.	Vénus II	268 30.0		
$k = 5^0 32'.3$	» »	16 46 38.0	5	— 1.5	180 5.7	»	Vénus II	268 30.5	268 29.0	$u = -6^m 23^s.3$
	» »	16 51 10.4	5	+ 0.4	359 1.1	L.D.	Vénus II	268 27.7	± 0.5	$c = +0'.8$
	» »	16 54 17.2	5	+ 0.1	358 18.9	»	Vénus II	268 27.7		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Fritsla I	Repère[78])				33°57′.5					
$\varphi = 57^0 33'.5$	24 août	$20^h 25^m 36^s.6$	10	+ 0′.4	139 53.0	L.D.		220°40′.5		
$k = 5^0 15'.7$	» »	20 30 20.0	10	+ 0.3	138 44.7	»		220 40.5	220°42′.3	$u = -5^m 15^s.9$
	» »	20 36 2.4	10	0.0	317 25.7	L.G		220 44.0	± 0.6	$c = +0'.4$
	» »	20 40 32.7	10	− 0.4	316 19.3	»		220 44.1		
Fritsla II	Repère[79])				181 13.3					
$\varphi = 57^0 33'.4$	24 août	22 41 30.2	10	− 2.1	256 27.0	L.G.		47 14.5	47 14.0	$u = -5^m 15^s.4$
$k = 5^0 15'.7$	» »	22 45 35.2	5	+ 1.4	74 50.0	L.D.	Soleil I	47 13.4	± 0.4	$c = +0'.7$
Borås	Repère[80])				170 3.6					
$\varphi = 57^0 43'.6$	25 août	2 51 22.9	10	+ 1.7	84 58.3	L.G.		325 42.9		
$k = 5^0 7'.1$	» »	2 54 57.8	5	+ 1.6	83 42.4	»	Soleil I	325 43.4	325 42.2	$u = -4^m 39^s.9$
	» »	2 59 56.3	10	+ 1.8	262 39.2	L.D.		325 41.4	± 0.4	$c = +0'.7$
	» »	3 5 8.3	10	+ 2.6	261 18.0	»		325 41.1		
Svenljunga	Repère[81])				176 13.9					
$\varphi = 57^0 29'.7$	25 août	8 46 20.8	5	− 0.1	297 46.8	L.G.	Mars	97 20.2		
$k = 4^0 56'.6$	» »	8 52 21.2	5	+ 0.2	296 27.6	»	Mars	97 21.3	97 20.6	$u = -3^m 56^s.4$
	» »	9 3 56.6	5	− 0.8	250 38.8	L.D.	αCocher	97 20.4	± 0.2	$c = +0'.7$
	» »	9 12 12.9	5	− 1.4	101 46.7	»	α Aigle	97 20.6		
Borgstena	Repère[82])				46 34.7					
$\varphi = 57^0 52'.9$	26 août	4 2 24.1	7	− 2.2	268 37.6	L.G.		290 30.7		
$k = 5^0 2'.8$	» »	4 5 12.3	5	− 2.6	267 41.0	»	Soleil I	290 30.3	290 30.1	$u = -4^m 16^s.4$
	» »	4 48 40.1	6	+ 1.0	77 50.0	L.D.	Soleil I	290 29.3	± 0.3	$c = -0'.3$
Herrljunga	Repère[83])				27 34.6					
$\varphi = 58^0 4'.8$	26 août	7 13 42.2	5	+ 2.3	215 5.8	L.D.	Soleil II	116 57.7		$u = -4^m 11^s.3$
$k = 5^0 1'.7$	Repère[83])				344 23.2					$c = +0'.1$
	26 août	7 41 32.5	1	»	33 44.0	*	Lune I	116 58.9	116 59.5	$u = -4^m 11^s.2$
	» »	7 43 0.9	1	»	33 25.5	*	Lune I	117 1.1	± 0.5	
	» »	7 44 5.8	1	»	33 11.3	*	Lune I	117 0.4		
Lagmansholm	Repère[84])				133 40.7					
$\varphi = 58^0 0'.3$	26 août	20 37 49.2	7	+ 2.6	132 48.5	L.G.	Soleil I	297 46.5		
$k = 5^0 21'.4$	» »	21 8 28.2	10	− 1.8	305 16.9	L.D.		297 45.5	297 46.0	$u = -5^m 26^s.7$
	» »	21 12 48.5	9	− 2.8	304 8.8	»		297 45.8	± 0.2	$c = +0'.7$
	» »	21 18 53.8	8	+ 4.0	122 39.5	L.G.		297 46.4		
Alingsås	Repère[85])				194 29.8					
$\varphi = 57^0 55'.7$	27 août	4 8 45.1	1	+ 1.9	98 51.3	L.D.	Soleil I	154 0.3	154 5.2	$u = -6^m 4^s.4$
$k = 5^0 31'.3$	» »	4 22 1.9	4	− 2.0	275 57.7	L.G.	Soleil I	154 10.2	± 3.2	$c = +0'.7$
Lerum	Repère[86])				247 23.4					
$\varphi = 57^0 46'.3$	28 août	1 52 9.3	10	− 2.2	312 45.0	L.G.		98 33.9		
$k = 5^0 47'.6$	» »	1 56 20.0	10	− 2.1	311 30.9	»		98 34.1	98 31.9	$u = -7^m 4^s.1$
	» »	2 1 54.9	10	+ 3.6	129 50.9	L.D.		98 29.6	± 0.8	$c = +0'.6$
	» »	2 7 21.4	10	+ 5.6	129 17.3	»		98 29.9		

* Cette observation a été faite avec la lunette destinée aux observations de déviations. La lune étant très près de l'horizon, l'inclinaison de l'axe, très petite du reste, peut être négligée.

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Partilled	Repère[87])				45°10′.1					
$\varphi = 57^0 44'.7$	28 août	$20^h\ 8^m 32^s.5$	6	− 3′.2	213 17.4	L.D.		279°26′.4	279°26′.9	$u = -7^m 38^s.8$
$k = 5^0 57'.4$	» »	20 14 4.8	10	− 3.5	211 59.6	»		279 26.4	± 0.3	$c = +0'.3$
	» »	20 17 14.9	3	+ 2.3	31 2.2	L.G.	Soleil I	279 27.8		
Marstrand	Repère[88])				9 55.4					
$\varphi = 57^0 53'.3$	30 août	5 53 32.1	11	− 2.6	17 15.4	L.D.		98 32.8		
$k = 6^0 28'.7$	» »	6 0 13.1	3	− 3.3	15 34.1	»	Soleil I	98 32.2	98 31.2	$u = -9^m 35^s.5$
	» »	6 9 25.0	8	+ 1.2	193 52.4	L.G.		98 30.1	± 0.5	$c = +0'.6$
	» »	6 21 21.3	12	+ 1.4	191 22.7	»		98 29.8		
Fiskebäckskil	Repère[89])				9 9.0					
$\varphi = 58^0 15'.1$	31 août	3 9 41.6	10	+ 4.1	284 25.3	L.D.		148 37.7	148 37.7	$u = -9^m 58^s.7$
$k = 6^0 35'.6$										$c = +0'.3$
Hållö	Repère[90])				10 10.7					
$\varphi = 58^0 20'.4$	Repère[91])				334 51.9					
$k = 6^0 49'.9$	31 août	8 31 25.7	5	+ 4.1	333 56.0	L.G.	Lune I	20 17.8		
	» »	8 36 25.2	5	+ 0.2	152 51.0	L.D.	Lune I	20 15.4	20 16.2	$u = -10^m 54^s.8$
	» »	8 40 31.0	1	+ 0.4	152 0.0	»	Lune I	20 15.9	± 0.4	$c = +0'.6$
	» »	8 46 30.7	5	+ 3.9	15 4.2	L.G.	Mars	20 15.9		
Lysekil	Repère[92])				342 32.0					
$\varphi = 58^0 16'.4$	31 août	22 55 23.3	3	+ 1.7	268 54.6	L.G.	Soleil I	263 8.4		
$k = 6^0 37'.0$	» »	23 10 16.5	1	− 3.2	84 11.5	L.D.	Soleil I	263 7.2	263 7.2	$u = -10^m 0^s.2$
	» »	23 27 24.1	2	− 1.8	78 48.4	»	Soleil I	263 6.0	± 0.3	$c = +0'.8$
	» »	23 34 31.9	9	+ 3.2	257 0.3	L G		263 7.4		
Grebbestad I	Repère[93])				232 46.8					
$\varphi = 58^0 41'.6$	2 sept.	22 59 13.9	10	− 3.1	325 19.0	L.G.		70 31.6		
$k = 6^0 48'.2$	» »	22 4 25.7	8	− 3.1	323 38.1	»		70 26.0		
	» »	23 14 40.8	16	− 0.5	140 28.2	L.D.		70 25.2	70 29.2	$u = -10^m 35^s.0$
	» »	23 18 43.1	10	− 0.3	139 13.2	»		70 25.1	± 1.2	$c = +1'.0$
	» »	23 23 49.2	10	− 4.2	317 45.4	L.G.		70 33.5		
	» »	23 27 47.4	14	− 4.6	316 31.0	»		70 33.8		
Grebbestad II	Repère[94])				215 8.3					
$\varphi = 58^0 41'.6$	3 sept.	5 1 13.5	9	+ 2.0	278 36.7	L.G.		142 29.1	142 29.1	$u = -10^m 33^s.7$
$k = 6^0 48'.2$	» »	5 6 55.6	10	− 3.5	97 17.4	L.D.		142 29.1	± 0.0	$c = +1'.4$
Grebbestad III	Repère[95])				275 49.1					
$\varphi = 58^0 41'.7$	3 sept.	18 51 22.8	10	+ 2.3	157 5.0	L.G.		156 34.6	156 35.2	$u = -10^m 31^s.7$
$k = 6^0 48'.4$	» »	18 57 55.9	10	− 0.1	335 37.9	L.D.		156 35.7	± 0.3	$c = +1'.4$
Fjellbacka	Repère[96])				280 56.0					
$\varphi = 58^0 35'.7$	4 sept.	0 42 50.3	10	− 1.6	150 21.4	L.G.		240 3.8		
$k = 6^0 46'.1$	» »	0 46 54.7	10	− 1.3	149 4.6	»		240 3.2	240 2.0	$u = -10^m 21^s.3$
	» »	0 52 17.3	10	+ 0.5	327 20.0	L.D.		240 0.4	± 0.6	$c = +1'.0$
	» »	0 56 40.5	10	+ 0.2	325 58.4	»		240 0.8		
Strömstad	Repère[97])				155 2.9					
$\varphi = 58^0 56'.3$	4 sept.	21 1 40.7	10	+ 2.0	276 14.8	L.G.		66 56.3		
$k = 6^0 53'.5$	» »	21 6 13.5	10	+ 2.0	275 5.9	»		66 56.4	66 55.3	$u = -10^m 46^s.6$
	» »	21 11 52.7	10	− 0.6	93 35.4	L.D.		66 54.4	± 0.4	$c = +0'.4$
	» »	21 16 27.5	10	− 0.6	92 24.5	»		66 54.0		

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Nord-Koster	Repère[98])				145°42′.3					
$\varphi = 58^0 54'.1$	5 sept.	$2^h 52^m 2^s.6$	10	− 0′.5	115 18.7	L.D.		197°21′.6		
$k = 7^0 2'.3$	» »	2 56 20.8	10	− 0.7	114 11.5	»		197 22.1	197°22′.7	$u = -11^m 20^s.6$
	» »	3 2 37.2	10	+ 3.0	292 39.5	L.G.		197 23.6	± 0.6	$c = +0'.8$
	» »	3 7 37.1	10	+ 3.0	291 22.2	»		197 23.5		
Fredrikshald	Repère[99])				113 53.9					
$\varphi = 59^0 7'.2$	5 sept.	22 32 16.4	8	+ 1.0	326 46.7	L.G.		183 46.5		
$k = 6^0 40'.7$	» »	22 36 44.5	10	+ 1.4	325 28.3	»		183 45.8	183 45.0	$u = -9^m 50^s.3$
	» »	22 44 36.8	8	+ 0.5	143 6.1	L.D.		183 43.9	± 0.5	$c = +0'.4$
	» »	22 48 48.9	5	+ 0.5	141 32.0	»	Soleil I	183 43.8		
Kornsö	Repère[100])				185 42.1					
$\varphi = 58^0 56'.5$	6 sept.	3 49 5.5	8	+ 0.8	309 18.6	L.G.		186 8.3		
$k = 6^0 24'.0$	» »	3 55 36.2	8	+ 0.3	307 45.6	»		186 8.5	186 7.4	$u = -8^m 42^s.4$
	» »	4 1 4.6	12	+ 0.1	126 25.0	L.D.		186 6.5	± 0.4	$c = +0'.6$
	» »	4 5 29.1	17	0.0	125 22.8	»		186 6.3		
Hökedalen	Repère[101])				67 53.7					
$\varphi = 58^0 53'.3$	6 sept.	20 36 33.4	10	− 3.1	352 25.8	L.G.		225 20.3		
$k = 6^0 10'.2$	» »	20 41 11.5	10	− 3.2	351 17.7	»		225 20.1	225 18.8	$u = -7^m 43^s.9$
	» »	20 47 50.0	10	+ 1.4	169 37.6	L D.		225 17.4	± 0.6	$c = +0'.6$
	» »	20 52 25.4	10	+ 1.2	168 29.0	»		225 17.2		
Vestra Ed	Repère[102])				67 31.0					
$\varphi = 58^0 54'.7$	7 sept.	1 41 57.2	10	+ 0.3	12 31.4	L.G.		334 19.5		
$k = 6^0 7'.4$	» »	1 45 47.9	10	+ 0.3	11 24.9	»		334 19.6	334 18.1	$u = -7^m 31^s.6$
	» »	1 51 25.7	10	0.0	189 43.3	L.D.		334 16.4	± 0.6	$c = +0'.6$
	» »	1 55 27.5	10	− 0.1	188 34.8	»		334 16.9		
Bäckefors	Repère[103])				353 48.5					
$\varphi = 58^0 48'.5$	7 sept.	5 48 27.3	10	− 1.7	312 50.6	L.G		48 37.8	48 37.2	$u = -6^m 36^s.1$
$k = 5^0 53'.7$	» »	5 53 18.4	10	− 0.1	131 46.4	L.D.		48 36.6	± 0.4	$c = +0'.4$
Mellerud	Repère[104])				130 49.9					
$\varphi = 58^0 42'.2$	7 sept.	20 51 1.2	10	− 0.4	188 24.4	L G.		2 42.4		
$k = 5^0 35'.7$	» »	20 55 21.6	10	− 0.4	187 19.5	»		2 42.6	2 42.6	$u = -5^m 21^s.0$
	» »	21 1 6.7	12	− 2.2	5 51.2	L.D		2 43.1	± 0.1	$c = +0'.4$
	» »	21 6 29.6	10	− 2.0	4 28.6	»		2 42.4		
Åmål	Repère[105])				125 19.8					
$\varphi = 59^0 3'.0$	8 sept.	1 21 9.6	10	+ 1.3	206 36.6	L.G.		105 22.6		
$k = 5^0 21'.7$	» »	1 25 1.5	9	+ 0.6	205 28.4	»		105 23.3	105 21.8	$u = -4^m 24^s.1$
	» »	1 30 24.8	10	+ 1.3	23 50.0	L D.		105 20.6	± 0.4	$c = +0'.8$
	» »	1 34 55.7	10	+ 0.9	22 31.2	»		105 20.8		
Brålanda I	Repère[106])				82 35.0					
$\varphi = 58^0 34'.2$	8 sept.	21 58 27.4	1	+ 1.1	248 54.4	L.G.	Soleil I	129 35.7	129 34.8	$u = -5^m 39^s.2$
$k = 5^0 41'.5$	» »	22 7 29.0	1	− 0.1	66 18.9	L.D.	Soleil I	129 34.0	± 0.1	$c = +1'.1$
Brålanda II	Repère[107])				197 47.8					
$\varphi = 58^0 34'.2$	8 sept.	23 57 50.3	10	− 0.4	157 2.9	L.D.		137 46.5	137 47.8	$u = -5^m 38^s.8$
$k = 5^0 41'.5$	9 sept.	0 2 36.7	10	+ 0.6	335 39.9	L.G.		137 49.1	± 0.9	$c = +1'.1$

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Upphärad	Repère[108])				220° 3′.9					
$\varphi = 58^0\ 9'.6$	9 sept.	$4^h42^m14^s.9$	10	+ 1′.1	337 5.1	L.G		192°17′.5	192°16′.9	$u = -5^m51^s.0$
$k = 5^0 44'.8$	» »	5 32 8.0	2	— 0.3	145 57.0	L.D.	Soleil I	192 16.3	± 0.4	$c = +0'.7$
Elfängen	Repère[109])				118 12.9					
$\varphi = 57^0 57'.7$	9 sept.	19 12 39 1	1	— 2.8	78 49.8	L.G.	Soleil I	244 11.9		
$k = 5^0 55'.9$	» »	19 16 12.3	1	+ 2.4	259 35.0	L.D.	Soleil II	244 12.2	244 11.9	$u = -6^m32^s.5$
	» »	19 19 14.1	9	+ 3.3	258 37.4	»		244 11.1	± 0.2	$c = +1'.1$
	» »	19 23 6.8	2	— 0.4	77 31.8	L.G.	Soleil I	244 11.6		
Venersborg	Repère[110])				267 44.4					
$\varphi = 58^0 22'.8$	10 sept.	5 29 45.6	7	— 0.7	223 59.9	L.G.	Soleil I	41 58.0	41 58.0	$u = -5^m43^s.7$
$k = 5^0 44'.2$	» »	5 37 53.2	3	— 2.4	42 13.1	L.D.	Soleil I	41 58.1	± 0.0	$c = +0'.8$
Salstad	Repère[111])				352 15.5					
$\varphi = 58^0 20'.8$	10 sept.	20 3 48.1	10	— 2.1	111 34.7	L.G.		53 57.3		
$k = 5^0 27'.7$	» »	20 8 19.1	10	— 1.6	110 31.8	»		53 58.1	53 56.9	$u = -4^m35^s.0$
	» »	20 13 21.7	10	+ 2.6	289 18.6	L.D.		53 56.2	± 0.4	$c = +0'.9$
	» »	20 18 12.5	10	+ 3.6	288 10.1	»		53 55.8		
Håkanstorp	Repère[112])				25 3.1					
$\varphi = 58^0 18'.5$	11 sept.	5 31 58.5	5	— 4.9	36 35.1	L.G.	Soleil I	98 8.6		$u = -3^m18^s.5$
$k = 5^0 8'.9$	» »	5 36 22.9	4	— 1.8	215 37.7	L.D.	Soleil I	98 8.5		$c = +0'.6$
	Repère[112])				231 59.8					
	11 sept.	6 16 59	1	»	234 14.7	*		98 9.4	98 9.0	
	» »	6 18 55.8	1	»	233 33.5	*	Soleil I	98 8.9	± 0.1	$u = -3^m18^s.2$
	» »	6 20 10	1	»	233 33.5	*		98 9.0		
	» »	6 20 43	1	»	233 27.3	*		98 9.7		
Lidköping	Repère[113])				228 8.8					
$\varphi = 58^0 30'.4$	11 sept.	22 50 46.2	10	— 1.1	121 48.5	L.G.		233 15.0		
$k = 4^0 53'.5$	» »	22 54 52.4	10	— 2.5	120 35.0	»		233 15.3	233 13.6	$u = -2^m14^s.1$
	» »	23 0 25.2	10	+ 3.8	298 54.8	L.D.		233 12.4	± 0.6	$c = +0'.9$
	» »	23 4 45.0	10	+ 3.8	297 36.9	»		233 11.9		
Skara	Repère[114])				79 58.5					
$\varphi = 58^0 23'.0$	12 sept.	4 57 54.2	9	— 1.0	310 28.3	L.G.		309 49.6		
$k = 4^0 37'.0$	» »	5 2 59.7	9	— 0.6	309 22.3	»		309 49.5	309 49.2	$u = -1^m7^s.2$
	» »	5 8 46.9	10	— 0.8	128 4.8	L.D.		309 48.7	± 0.2	$c = +0'.7$
	» »	5 13 26.2	10	— 1.6	127 4.5	»		309 48.9		
Stenstorp	Repère[115])				98 2.3					
$\varphi = 58^0 16'.4$	13 sept.	0 46 25.6	9	— 0.8	318 35.0	L.G.		235 57.5		
$k = 4^0 20'.4$	» »	0 51 44.9	14	— 1.9	136 57.7	L.D.		235 58.8	235 58.0	$u = +0^m2^s.3$
	» »	0 55 13.6	12	— 1.4	135 55.3	»		235 58.2	± 0.2	$c = +1'.1$
	» »	0 59 55.8	10	+ 0.4	314 34.4	L.G		235 57.4		
Falköping	Repère[116])				217 28.7					
$\varphi = 58^0 10'.5$	13 sept.	20 35 12.6	7	— 2.6	117 44.3	L.D.		24 8.0		
$k = 4^0 30'.1$	» »	20 41 32.5	5	— 0.4	295 56.3	L G	Soleil I	24 6.1	24 7.1	$u = -0^m33^s.5$
	» »	20 50 0.0	8	— 2.3	294 8.2	»		24 6.8	± 0.3	$c = +1'.5$
	» »	20 55 52.0	10	— 3.5	112 37.4	L.D.		24 7.5		

* Cette observation a été faite avec la lunette destinée aux observations de déviations. Le soleil étant très voisin de l'horizon, l'inclinaison de l'axe et l'erreur de collimation peuvent être négligées.

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Kettilstorp I	Repère[117])				55°21′.9					
$\varphi = 58^0\ 2'.4$	14 sept.	$1^h\ 8^m 26^s.6$	10	— 1′.4	166 46.2	L.D		313°28′.1		
$k = 4^0 20'.4$	» »	1 10 56.8	2	— 0.3	165 43.5	»	Soleil I	313 27.7		
	» »	1 18 1.4	5	+ 1.3	343 43.5	L G	Soleil I	313 28.5	313°28′.6	$u = +0^m 6^s.1$
	» »	1 22 56.5	1	+ 0 5	342 18.7	»	Soleil I	313 29.2	± 0.2	$c = +0'.6$
	» »	1 26 36.6	10	— 0.1	341 34.5	»		313 29.6		
Kettilstorp II	Repère[118])				249 36.8					
$\varphi = 58^0\ 2'.4$	14 sept.	4 35 53.6	10	— 5.1	103 5.1	L G.		288 5.0	288 4.8	$u = +0^m 5^s.0$
$k = 4^0 20'.8$	» »	4 41 46.3	10	— 1.9	281 46.8	L.D		288 4.5	± 0.2	$c = +0'.4$
Mullsjö I	Repère[119])				339 52.8					
$\varphi = 57^0 55'.2$	14 sept.	19 6 13.3	12	+ 3.0	218 44.1	L.G.		162 49.0		
$k = 4^0 10'.4$	» »	19 12 5.8	10	+ 0.9	217 26.2	»		162 44.9	162 45.7	$u = +0^m 48^s.9$
	» »	19 17 39.0	10	— 4.5	36 10.2	L.D.		162 44.4	± 0.7	$c = +0'.4$
	» »	19 22 10.2	10	— 4.8	35 10.2	»		162 44.5		
Sköfde	Repère[120])				353 23.4					
$\varphi = 58^0 23'.3$	15 sept.	1 2 13.1	18	+ 2.2	223 15.3	L G.		250 8.3	250 7.0	$u = +0^m 39^s.3$
$k = 4^0 13'.0$	» »	1 8 28.4	8	+ 1.4	41 2.2	L.D.	Soleil I	250 5.8	± 0.8	$c = +0'.8$
Tibro	Repère[121])				69 1.9					
$\varphi = 58^0 25'.6$	15 sept.	19 7 29.4	10	— 0.5	227 24.8	L.G.		83 12.3		
$k = 3^0 53'.4$	» »	19 12 1.6	10	— 0.3	226 24.8	»		83 11.1	83 10.4	$u = +2^m 0^s.5$
	» »	19 17 53.5	10	+ 3.0	45 4.3	L D		83 9.2	± 0.5	$c = +0'.7$
	» »	19 22 49.9	10	+ 3.3	43 58.2	»		83 8.9		
Rödesund	Repère[122])				159 51.9					
$\varphi = 58^0 32'.2$	16 sept.	20 10 17.4	17	+ 1.0	348 14.1	L.D.		308 5.7		
$k = 3^0 33'.4$	» »	20 17 48.5	16	— 2.9	166 30.3	L.G.		308 9.7	308 8.0	$u = +3^m 24^s.6$
	» »	20 22 32.5	10	— 3.3	165 22.5	»		308 9.8	± 0.7	$c = +0'.8$
	» »	20 28 7.1	10	+ 1.3	343 58.6	L D.		308 6.6		
Motala	Repère[123])				318 30.0					
$\varphi = 58^0 32'.3$	17 sept.	23 2 15.5	9	0.0	319 4.4	L.G.		346 54.8		
$k = 3^0 0'.6$	» »	23 6 45.7	10	+ 0.6	317 45.5	»		346 55.0	346 52.8	$u = +5^m 40^s.2$
	» »	23 15 28.1	8	+ 3.0	135 5.7	L.D.		346 50.5	± 0.8	$c = +1'.1$
	» »	23 19 45.6	10	+ 3.6	133 49.6	»		346 50.9		
Godegård	Repère[124])				277 1.8					
$\varphi = 58^0 44'.8$	18 sept.	19 8 41.0	1	— 1.2	75 40.3	L.G.	Soleil I	85 49.8	85 49.8	$u = +6^m 12^s.6$
$k = 2^0 53'.3$										$c = +0'.2$
Lerbäck	Repère[125])				87 5.9					
$\varphi = 58^0 57'.1$	18 sept.	21 20 34.8	10	+ 1.8	205 26.2	L.G		76 41.8		
$k = 3^0 0'.8$	» »	21 24 45.7	10	+ 0.8	204 21.0	»		76 42.6	76 40.3	$u = +5^m 43^s.0$
	» »	21 30 41.7	10	+ 1.1	22 42.9	L D		76 38.8	± 0.8	$c = +0'.4$
	» »	21 35 35.7	9	+ 2.3	21 24.8	»		76 38.0		
Hallsberg	Repère[126])				294 43.3					
$\varphi = 59^0 4'.2$	19 sept.	1 42 21.4	4	— 0.1	285 47.5	L.D.		204 1.6	204 1.6	$u = +6^m 0^s.5$
$k = 2^0 56'.6$										$c = +1'.0$

Stations	Date astronom.	Temps de passage au fil moyen (T. du chron.)	Nombre des fils	Inclinaison de l'axe	Lecture au cercle azimutal	Position de la lunette	Nom de l'astre	Azimut du repère S.—O.	Moyenne adoptée	
	1892									
Vingåker	Repère[127])				141°36′.4					
$\varphi = 59^0\ 2'.7$	19 sept.	$20^h34^m27^s.8$	10	− 1′.9	168 24.5	L.G.		334°39′.7		
$k = 2^0 10'.7$	» »	20 38 58.3	10	− 1.9	167 17.8	»		334 39.2	334°38′.0	$u = +9^m7^s.2$
	» »	20 44 56 6	10	+ 1.2	345 45.2	L.D		334 36.6	± 0.6	$c = +1'.0$
	» »	20 50 1.7	10	+ 1.1	344 29 0	»		334 36.6		
Bullerö	Repère[128])				348 55.6					
$\varphi = 59^0 12'.1$	23 sept.	2 12 58.3	10	− 0.7	298 22.4	L.G.		354 9.0		
$k = -0^0 47'.6$	» »	2 17 59.2	10	+ 0.1	297 7.0	»		354 8.9	354 7.5	$u = +21^m11^s.6$
	» »	2 23 45.2	10	+ 3.1	115 38.0	L.D.		354 6.0	± 0.6	$c = +0'.4$
	» »	2 27 54.4	10	+ 3.3	114 36 3	»		354 6.1		
Hufvudskär	Repère[129])				66 36.7					
$\varphi = 58^0 57'.8$	24 sept.	0 56 41.9	10	− 0.7	314 29.8	L.D.		92 8.4		
$k = -0^0 30'.6$	» »	1 1 15.7	10	− 1.6	313 13.6	»		92 8.0	92 9.7	$u = +20^m6^s.8$
	» »	1 7 3.4	10	− 1.4	131 41.5	L.G.		92 10.4	± 0.6	$c = +0'.5$
	» »	1 11 57.4	10	− 3.9	130 21.4	»		92 11.9		
Sandhamn	Repère[130])				73 59.1					
$\varphi = 59^0 17'.3$	25 sept.	4 1 53.8	5	+ 3 6	16 22.2	L.D.	Soleil I	192 56.7	192 57.2	$u = +21^m35^s.4$
$k = -0^0 51'.8$	» »	4 8 50.9	3	− 3.1	195 24.2	L.G.	Soleil II	192 57.8	± 0.4	$c = +1'.1$
Upsal III	Repère[131])				125 46.0					
$\varphi = 59^0 51'.3$	13 oct.	1 8 31.3	1	− 3.1	319 57.9	L.G.	Soleil I	221 47.3	221 47.3	$u = +18^m33^s.8$
$k = 0^0 25'.6$										$c = -26'.2$
Upsal I*	Repère[132])				188 38.5					
$\varphi = 59^0 51'.2$	3 nov.	3 10 42.2	10	+ 1.3	10 40.0	L.D.		51 30.7		
$k = 0^0 25'.6$	» »	3 14 20.8	10	+ 1.4	9 51.9	»		51 31.0		
	» »	3 19 24.0	10	+ 0.1	188 29.0	L.G.		51 31.3	51 31.3	$u = +1^m1^s.2$
	» »	3 23 16.2	10	0.0	187 38.2	»		51 31.9	± 0.1	$c = -7'.5$
	» »	3 27 8.0	10	+ 0.1	186 46 9	»		51 31.5		

* Cette observation a été faite avec un théodolite de voyage de LAMONT portant le numéro 14 et appartenant au Bureau général des cartes et des plans (*K. Sjökarteverket.*)

Liste des mires.

[1]) Upsal II. — Bord sud de la tour de la villa de M. HOLMGREN appelée *Villa Åsen* à 108^{m} à l'O.

[2]) Gustafsberg. — Mât d'un magasin à 508^{m} au S.S.O.

[3]) Udden. — Sommet d'un moulin à vent près Gustafsberg à 1.4^{km} au N.E.

[4]) Dalarö. — Tronc d'un aune sur un rocher appelé *Rågholms grunde* au N.O. de Rågholmen et à une distance de 770^{m} dans la direction du S.S.O.

[5]) Jutholmen. — Même aune sur le rocher *Rågholms grunde* à 820^{m} à l'O.S.O.

[6]) Vislanda. — Mât de la gare à 469^{m} à l'O.N.O.

[7]) Liatorp. — Poteau d'une barrière (*led*) à 83.7^{m} au S.S.E.

[8]) Elmhult. — Mât de la gare à 138^{m} à l'O.

[9]) Malmö. — Mât de l'établissement de bains à 133^{m} au N.E.

[10]) Kjeflinge. — Mât de la gare à 321^{m} au N.N.E.

[11]) Teckomatorp. — Clocher de l'église de Nöbbelöf à 2.0^{km} au N.N.O.

[12]) Landskrona. — Clocher de l'église d'Örja à 3.7^{km} environ à l'E.N.E.

[13]) Uranibourg. — Cheminée d'une usine de briques en Danemark à 10.0^{km} environ à l'O. S. O.

[14]) Hildesborg. — Clocher sud de l'église de Landskrona à 5.6^{km} au S.O.

[15]) Lund II. — Cheminée d'une maison au N.E. dans le coin des rues de l'Observatoire et la rue qui la coupe à angles droits à 107^{m} de distance.

[16]) Svedala. — Clocher de l'église de Svedala à 570^{m} au N.O.

[17]) Trelleborg. — Pignon du clocher de l'église de Köpinge 2.0^{km} au N.E.

[18]) Klagstorp. — Flèche de l'église de Klagstorp à 0.6^{km} au S.O.

[19]) Rydsgård. — Sommet d'un moulin à vent appelé *Örsjö mölla*, et situé à 820^{m} au S.O.

[20]) Ystad. — Le tronc d'un arbre à 44.2^{m} au S.O., faute de mieux.

[21]) Cimbrishamn. — Pignon sud du clocher de l'église de Cimbrishamn, à 375^{m} à l'O.

[22]) Tomelilla. — Sommet d'un moulin à vent situé à 593^{m} de distance au N., près du chemin conduisant à Tryde.

[23]) Vollsjö. — Clocher de l'église de Vannstad au loin dans le S.E. (9.8^{km}).

[24]) Löberöd. — Poteau téléphonique à 82.1^{m} à l'E.

[25]) Eslöf. — Flèche de l'église d'Eslöf qui se voit à peine au-dessus des toits de la Brasserie; distance, 456^{m}.

[26]) Hör. — Pignon d'une maison au village de Sextorp à 11.4^{km} au S.

[27]) Hörby. — Moulin à vent au S.E. à 3.2^{km} de distance (*Råby mölla*).

[28]) Tollarp. — Clocher de l'église de Tränö à 6.0^{km} au N.

[29]) Efveröd. — Sommet d'un arbre dans la forêt de Maltesholm, à 6^{km} environ à l'O.

[30]) Åhus. — Clocher de l'église d'Åhus à 446^{m} au S.

[31]) Kristianstad. — Pignon du clocher de l'église de Skepparslöf à 5.4^{km} au S.O.

[32]) Sölvesborg. — Clocher de l'église de Mellby sur le Lister à 6.2^{km} au S.E.

[33]) Qviinge backe. — Pignon sud de l'église de Knisslinge au N.; distance: 3.9^{km}.

[34]) Hästveda. — Mât de la gare à 938^{m} à l'E.S.E.

[35]) Vittsjö. — Flèche de l'église de Vittsjö à 600^{m} à l'O.N.O.

[36]) Hessleholm. — Sommet d'un arbre d'une forêt à environ 1.5^{km} au N.

[37]) Tyringe. — Poteau télégraphique au N. distant de 176^{m} dans la direction de S.E.

[38]) Perstorp. — On s'est reperé sur un fanal placé provisoirement sur les toits d'une cabane de paysan à 119^{m} à l'O. — Aux observations de déclinaison faites plus tôt dans la soirée on s'est servi comme repère de la cheminée de la même cabane; la différence d'azimut des deux mires fut trouvée, le matin suivant, — 33'.1.

[39]) Klippan I. — Clocher de l'église de Qvidinge à 4.9km à l'O.

[40]) Astorp I. — Clocher de l'église d'Ösjö à 11.5km au N.N.E.

[41]) Kattarp. — Poteau télégraphique à 500m au S.E.

[42]) Kattarp. — Flèche de l'église de Ströfvelstorp à 4.0km au N.E.

[43]) Kattarp. — Tour de l'église d'Ausås plus loin dans la même direction (Distance 7.2km).

[44]) Engelholm. — Flèche de l'église d'Engelholm à 297m de distance dans la direction de l'E., d'après un ancien plan de la ville datant de 1854.

[45]) Engelholms hamn. — Flèche du pavillon de l'établissement de bains, situé un peu plus vers le nord. (300m environ).

[46]) Grefvie I. — Phare de Kullaberg de l'autre côté de Skelderviken, à 22km de distance.

[47]) Laholm I. — Mât de la gare à 300m à l'E.N.E.

[48]) Eldsberga. — Flèche de l'église de Trönninge à 4.4km de distance.

[49]) Skallinge I. — Bloc de pierre sur une colline de la bruyère à 1km environ à l'E 1/4 S.E. près du village de Bårared.

[50]) Lidhult. — Paratonnerre du clocher de l'église de Lidhult à 570m environ à l'E.

[51]) Bolmen I. — Cheminée d'une cabane à 860m environ à l'E.

[52]) Ljungby. — Poteau téléphonique au marché à 210m au N.

[53]) Tutaryd. — Flèche du pignon E. de la gare à 69.6m au N.

[54]) Alfvestad. — Poteau d'un fenêtre d'une cabane de paysan à 409m environ à l'O.

[55]) Lamhult. — Tronc d'un sapin situé à 1.2km environ de distance dans la direction du S.S.O., de l'autre côté du petit lac Lygnen.

[56]) Säfsjö. — Mât du pavillon des tireurs à 309.5m au N.E.

[57]) Nässjö. — Pin saillant de la forêt surmontant la montagne de l'autre côté d'Ingsbergssjön à 1.0km au N.E.

[58]) Hook. — Tronc d'un pin situé à 2km au N.E. sur les montagnes de l'autre côté de la vallée de Hooksån.

[59]) Klefshult. — Pignon d'une maison de ferme à 400m dans la direction du N.O. 1/4 O.

[60]) Kärda. — Paratonnerre de l'église de Kärda à 360m au N.O.

[61]) Refteled öfre. — Sémaphore de la gare à 177m au S.

[62]) Smålandsstenar. — Pignon de l'aile nord de la gare à 129.0m au S.E.

[63]) Ätran. — Côté ouest de la cheminée d'une maison de ferme à 115.7m à l'E.

[64]) Kinnared II. — Flèche de l'église de Kinnared à 770m à l'O.N.O.

[65]) Kinnared I. — Poteau télégraphique situé au point où la route conduisant de Kinnared à Eskeryd traverse le chemin de fer, à 105.6m à l'O.

[66]) Fröslida. — Cheminée d'une cabane de paysan à 1.5km de distance au S.O. de l'autre côté de Nissa ån.

[67]) Sennan. — Poteau télégraphique en avant de la gare à 149m à l'E.

[68]) Halmstad. — Flèche de l'église de Halmstad à 860m au N.O. (d'après la Carte du capitaine Krutmejer).

[69]) Getinge. — Cloche d'une ferme au S.E. (Örnakull) à 2.2km.

[70]) Falkenberg. — Marque du port à 1.0km au S. (Plan de la ville de l'état-major).

[71]) Varberg. — Mât surmontant la frontispice occidentale de la gare à 203.4m à l'O.

[72]) Backa. — Moulin à vent de *Jättahögen* à 1.5km à l'E.

[73]) Asa I. — Moulin à vent situé à 5.8km au S. sur Wendelsö de l'autre côté de Wendelsfjorden.

[74]) Kongsbacka. — Bord escarpé de la chaine de montagnes qui passe à l'E. de la ville à 1.8km de distance (d'après le Plan de la ville de l'état-major).

[75]) Veddige. — Flèche de l'église d'Ås à 4.1km au S.O.

[76]) Björketorp. — Sémaphore de la gare à 150.1m à l'E.

[77]) Björketorp. — Côté nord de la cheminée d'une maison à l'E. servant de logis aux employés du chemin de fer. Distance, 98.5m.

[78]) Fritsla I. — Bord escarpé d'une montagne au N. appelée Varberget, située au N. à 1km de distance, près du point où la route de Borås tourne à gauche.

[79]) Fritsla II. — Flèche de l'église de Kinna à 8km à l'O.

[80]) Borås. — Flèche de l'église de Borås à 460[m] à l'E.

[81]) Svenljunga. — On s'est reperé sur le bord droit d'une maison de cave située sur une pente à 39.1[m] de distance dans la direction de l'O. Un fanal placé derrière le coin de la maison a servi de mire aux observations des étoiles faites dans les ténèbres.

[82]) Borgstena. — Pignon de la frontispice de la gare à 150.9[m] à l'E.S.E.

[83]) Herrljunga. — Extrémité S. des toits d'une cabane de paysan à environ 0.5[km] à l'O.

[84]) Lagmansholm. — Poteau télégraphique à 130[m] environ de distance à l'E.S.E.

[85]) Alingsås. — Mât de la gare à 189[m] au N.

[86]) Lerum. — Mât d'Atorp à 470[m] au N.O.

[87]) Partilled. — Bloc de pierre sur la chaine de montagne au N.E. de l'autre côté de la vallée ou passe le chemin de fer à Gothembourg. Distance 3.2[km] à l'E.

[88]) Marstrand. — Phare de Hamnskär situé à l'extrémité d'une série de rochers appelée *Paternosterskären*. Distance, 6.4[km].

[89]) Fiskebäckskil. — Eglise de Lysekil à 3.0[km] au N.N.O.

[90]) Hållö. — Tour de vigie des pilotes à Smögen à 1.5[km] au N.

[91]) Hallö. — Phare de Hållö à 600[m] environ à l'O.

[92]) Lysekil. — Mât de l'île de Grötö à 930[m] à l'E.N.E.

[93]) Grebbestad I. — Cairn sur le point culminant de la presqu'île Svinnäs à 0.5[km] au S.O.

[94]) Grebbestad II. — Croix de la nouvelle église de Grebbestad à 441[m] au N.

[95]) Grebbestad III. — Même repère à 270[m] à l'O.

[96]) Fjellbacka. — Sommet d'une montagne dominant les fermes de Bräcke et Ödsmål, à 1.3[km] au N.E.

[97]) Strömstad. — Le plus boréal des anciens phares de Nord-Koster à 10.1[km] à l'O.S.O.

[98]) Nord-Koster. — Marque placée à l'entrée de Herrefør (Valøerne) à 12[km] environ au N.

[99]) Fredrikshald. — Flèche de l'aile occidentale de la gare (pignon S.) à 183.0[m] de distance au N.

[100]) Kornsö. — Poteau télégraphique de l'autre côté de Kornsjön environ à 133[m] au N.

[101]) Hökedalen. — Pignon d'une maison de paysan au village Äng à 2.0[km] au N.

[102]) Vestra Ed. — Flèche de l'église de Dals Ed à 0.7[km] au S.E.

[103]) Bäckefors. — Pignon d'une maison d'habitation des employés du chemin de fer à 218.2[m] à l'O.

[104]) Mellerud. — Mât d'une villa de l'autre côté de la gare. Distance, 356[m].

[105]) Åmål. — Frontispice du corps-de-logis de Fredriksberg à 1[km] de distance à l'O.

[106]) Brålanda I. — Mât de la gare à 130.0[m] de distance dans la direction du N.O.

[107]) Brålanda II. — Même mire à 262.8[m] de distance.

[108]) Upphärad. — Pignon d'une maison à Härstorp à 2.0[km] de distance environ au N.

[109]) Elfängen. — Bord escarpé d'une montagne située à 6[km] de distance au parois de Skepplanda.

[110]) Venersborg. — Poteau télégraphique situé à l'extrémité ouest du pont de la voie ferrée au pied du môle. Distance, 155[m], dans la direction du S.O.

[111]) Salstad. — Flèche de l'église de Flå à 2.0[km] au S.O.

[112]) Håkantorp. — Coin d'une maison à Rylanda à environ 1[km] à l'O.

[113]) Lidköping. — Le Belvedère au sommet de Kinnekulle à 18[km] au N.E.

[114]) Skara. — Sommet d'un arbre situé au loin sur la pente méridionale de Billingen (Brunnshemsberget) près Stenstorp, à 16.5[km] au S.E.

[115]) Stenstorp. — Point d'une montagne (Borgberget) au N.E. à 5.2[km] de distance.

[116]) Falköping. — Moulin à vent à 650[m] au S.S.O.

[117]) Kettilstorp I. — Cheminée d'une cabane d'un indelta (*Soldattorp*) à 364[m] à l'E.

[118]) Kettilstorp II. — Pignon de la frontispice de la gare à 183.8[m] de distance.

[119]) Mullsjö I. — Bloc de pierre dans un champ cultivé à 97.3[m] de distance au N.

[120]) Sköfde. — Flèche de l'église de Sköfde à 500[m] de distance à l'E.

[121]) Tibro. — Isolateur d'un poteau de la ligne téléphonique en bordure du chemin conduisant à l'auberge, à 227.2[m] de distance dans la direction de l'O. 1/4 S.O.

[122]) Rödesund. — Flèche de l'église de Carlsborg à 1.6[km] au S.E.

[123]) Motala. — Cheminée d'une maison située sur *Nya Brinken*, faubourg situé de l'autre côté de la vallée où passe le chemin de fer de Vadstena à Lerbäck. Distance 1.2^{km} dans la direction du S.E.

[124]) Godegård. — Poteau télégraphique à la gare à 115.0^{m} de distance à l'O.

[125]) Lerbäck. — Mât de la gare à 140.8^{m} de distance à l'O. $^{1}/_{4}$ S.O.

[126]) Hallsberg. — Flèche de l'église de Hallsberg à 3.2^{km} de distance à l'E.

[127]) Vingåker. — Mât d'une propriété au S. de la gare à 1.1^{km} de distance (Säfstaby).

[128]) Bullerö. — Bloc de pierre sur le point culminant de Långskär à 1.8^{km} au S.

[129]) Hufvudskär. — Moulin à vent à 15^{km} à l'O. sur Utön.

[130]) Sandhamn. — Sommet d'un sapin sur Telegrafholmen à 200^{m} environ au N.

[131]) Upsal II. — La flèche surmontant la croix (*Takryttaren*) du dôme à 600^{m} à l'E.

[132]) Upsal I. — Coin nord de la villa de M. Holmgren à 108^{m} à l'ouest.

Tableau III. — Observations de la déclinaison magnétique.

Lieux	Date	Heure T. civil.	Lecture au cercle azimutal		Nombre de pointés	Variat. ε	Torsion ϑ	Déclinaison conclue δ	Moyenne adoptée
			de l'aiguille	du repère					
	1892								
Upsal II	Juin 15	$0^h\ 6^m$ s.	$153^0 45'.5$	$281^0 47'.2$	10	+ 8'.1		$8^0\ 4'.0$	
» I	» »	0 34 s	157 59.5	279 9.5	10	+ 9.3	+ 5'.7 ± 0.7	8 7.7	
» IV	» »	1 49 s.	318 12.2	131 9.8	10	+ 10.4		7 52.6	
Gustafsberg	» 20	5 48 s.	126 43.1	234 3 8	3	+ 5.1 [1]	+ 9.0 ± 2.2	8 14.6	
Udden	» 21	1 30 s.	189 42.3	90 34.3	2	+ 8.0 *osc.*	+ 3.6 »	8 49.2	
Dalarö	» 23	0 48 s.	163 19.0	310 53.6	2	+ 4 4	+ 7.6 ± 1.4	7 47.4	
Jutholmen	» »	4 4 s	309 58.8	49 21.6	2	+ 7.9	+ 10.2 »	8 0.1	
Vislanda	Juill. 1er	6 31 m.	34 38.0	111 12.4	2	— 4.4	— 5.1? »	8 57.1	
Liatorp	» »	10 20 m.	309 53.2	144 45.7	3	— 0 8	+ 11.6 ± 0.5	9 33.2	
Elmhult	» »	5 39 s.	263 25.9	323 49.0	3	+ 1.9		9 6.1	
Malmö	» 11	7 12 s.	303 36.9	260 11.9	3	+ 1.7	+ 13.8 »	10 40.4	
Kjeflinge	» 12	8 38 s.	272 30.7	231 11.7	4	+ 3.5 *pert.*	+ 3.7 ± 13.3	9 53.3	
Teckomatorp	» 13	9 22 m.	24 30.7	36 46.5	3	— 0 4 *pert.*		10 10.4	
Landskrona	» »	4 25 s.	170 56.7	100 35.5	5	— 3.7		10 54.3	
Uranibourg	» 15	2 14 s.	301 43.0	34 17.4	3	+ 5.9	+ 15.2 »	11 15.1	
Bäckviken	» »	5 8 s.	252 57.7	123 48.3	2	— 0.8		9 59.4	
Hildesborg	» 16	1 47 s.	92 26 2	271 54 3	4	— 9.8 [2]	+ 27.6? ± 6.1	10 56.7	
Lund II	» 20	0 13 s.	305 16.3	261 32.9	3	+ 5.5	+ 9.4 ± 0.6	9 33.1	
Svedala	» 21	7 8 m.	34 44.6	81 6.6	3	— 8.6		7 19.9	
Trelleborg	» »	10 7 m.	305 20.4	248 16.9	2	+ 0.1		7 14.4	
Klagstorp	» »	1 4 s.	88 36.8	215 3.9	4	— 10 0	— 5.4 ± 2.4	10 25.8	
Rydsgård	» 22	7 44 m.	120 47.2	246 40.4	3	+ 6.4 *osc.*	+ 7.1 »	10 25.3	
Ystad	» »	11 38 m.	213 7.4	2 58.2	3	+ 3.0		10 15.8	
Cimbrishamn	» »	6 29 s.	164 59.5	210 41.3	3	+ 1.8	+ 7.1 »	9 54.7	
Tomelilla	» 26	10 24 m.	186 32.5	210 37.0	4	+ 1.8 *pert.*	+ 10.6 ± 1.7	8 43.0	
Vollsjö	» »	4 0 s.	307 29.9	145 44.4	4	+ 13.1	+ 8.5 »	11 11.8	
Löberöd	» »	7 14 s.	316 7.6	193 43.5	3	+ 2.1		10 40.4	
Eslöf	» 27	1 24 s.	120 6.6	277 29.6	4	+ 7.1	+ 23.2 ± 0.5	10 41.8	
Hör	» »	6 11 s.	295 55.8	132 25.8	3	+ 4.6		10 31.4	
Hörby	» 28	9 29 m.	43 54.0	185 59.9	4	— 3.0	— 2.3 ± 3.0	10 32.3	
Tollarp	» »	1 47 s.	88 34.8	74 48.2	3	+ 5.1	+ 8.6 »	10 3.5	
Efveröd	» »	3 42 s.	59 2.0	132 38.4	2	+ 4.8		10 0.2	
Åhus	» »	7 17 s.	183 7.4	301 59 9	3	— 1.6		8 38.7	
Kristianstad	» 29	8 18 m.	75 45.7	203 33.4	3	— 2.3 *osc.*		9 16.1	
Sölvesborg	» »	11 45 m.	118 4.6	20 38.6	3	+ 1.2	+ 5.6 ± 1.5	7 35.8	
Qviinge backe	» 30	1 40 s.	271 55.2	274 53.9	4	+ 6.5	+ 6.0 ± 0.7	9 26.1	
Hästveda	Août 3	0 4 s.	351 10.7	217 34.8	3	+ 6.5	+ 14.2 ± 3.4	10 25.6	
Vittsjö	» 4	1 59 s.	325 8.1	4 42.2	4	+ 6.9	+ 8.4 ± 0.2	11 21.5	
Hessleholm	» »	5 2 s.	233 45.7	183 1.7	4	+ 1.0		10 25.8	
Tyringe I	» »	7 5 s.	0 33.9	224 18.0	3	+ 0.7		10 11.2	
Perstorp	» 6	7 41 s.	11 22.9	84 19 8 [3]	3	+ 1.4	+ 4.5 »	10 52.0	

[1]) Valeur interpolée; la lampe fût mise hors de service de 4^h30^m s. à 5^h59^m s. (T. de Copenhague). Les aiguilles étaient tranquilles.

[2]) Très incertaine; les aiguilles ont été très agitées.

[3]) Aux observations de la lune faites le 6 au soir on s'est servi comme mire d'une lanterne placée près de la cheminée. La correction à appliquer à la lecture correspondante à cette mire fut trouvée de — 33'.1 au matin suivant. La lecture correspondante à cette dernière mire aurait donc été de $83^0 46'.7$.

Lieux	Date	Heure T. civil	Lecture au cercle azimutal		Nombre de pointés	Variat. ε	Torsion ϑ	Déclinaison conclue δ	Moyenne adoptée
			de l'aiguille	du repère					
	1892								
Klippan I	Août 7	8^h46^mm.	$16^0 41'.6$	$88^0 30'.7$	4	− 2'.0	+10'.0 ± 1'.3	$10^0 30'.3$	
» II	» »	10 10 m.	222 36.8	294 10.5	3	+ 2.4	» »	10 43.9	
Åstorp I	» »	2 22 s	258 52.2	223 59.3	3	+ 7.2	+13.8 »	10 38.5	
» II	» »	3 17 s	205 59.8	171 2.4	3	+ 7.8	» »	10 43.6	
Billesholms grufva, I	» 9	6 20 m.	24 32.8	281 0.1	2	− 6.5		10 32.6	
Kattarp	» »	11 42 m.	222 55.1	[41]) 13 56.0	2	+ 2.6	+14.4 »	11 46.5	$11^0 42'.1$
»	» »	1 38 s.	222 51.5	[41]) 13 48.5	3	+ 6.3		11 39.1	
				[42]) 147 40.1					
				[43]) 143 36.9					
Engelholm	» 10	11 33 m.	342 7.7	250 52.5	2	+ 3.6	+25.0? ±14.2	10 23.8	
»	» »	0 16 s.	341 52.2	250 34.1	2	+ 5.9		10 29.0	$10^0 27'.9$
»	» »	0 40 s.	341 54.0	250 35.2	2	+ 7.2		10 31.0	
Engelholms hamn	» »	6 15 s.	16 2.1	175 3.6	3	− 0.5	+ 7.8 ± 2.1	10 47.5	
Grefvie I	» 11	7 55 m	169 20.9	275 2.7	5	− 5.6	+11.0 ± 1.2	11 2.2	
» II	» »	8 53 m.	93 9.6	198 44.8	2	− 4.6		11 9.8	
Laholm I	» »	11 57 m.	357 54.4	289 15.5	3	+ 6.1	+ 9.2 ± 0.7	11 37 5	
» II	» »	1 15 s.	99 42.3	31 46.8	3	+ 9 1		11 7.5	
Eldsberga	» »	4 44 s.	213 46.6	254 15.9	3	+ 2.6	− 0.2 ± 3.9	11 19.9	
Skallinge I	» 12	1 29 s.	9 29.1	252 31.8	3	+ 7.4	+12.8 ± 5.2	11 12.6	
» II	» »	3 46 s.	244 40.5	126 59.0	3	+16.1		12 5.5	
Lidhult	» »	7 28 s.	269 14.7	185 20.6	4[1])	− 1.9		10 6.8	
»	» 13	7 49 m.	126 17.6	42 12.8	3	− 4.7	+ 9.5 »	10 14 7	$10^0 10'.2$
Bolmen I	» »	11 43 m.	352 15.6	265 46.2	4	+ 4.2	+ 9.2 ± 0.9	10 16.5	
» II	» »	2 15 s.	51 39 8	325 14.3	3	+ 3.7		10 12.1	
Ljungby	» »	5 30 s.	248 16.3	230 8.8	3	− 2.9		9 41.2	
Tutaryd	» 14	0 31 s.	154 36.2	138 21.4	3	+ 6 3	+ 9.1 ± 1.2	9 50.3	
Alfvestad	» 15	6 40 m	188 30.2	279 55.8	3	− 6.8	+11.4 »	8 40 2	
Lamhult	» »	1 42 s.	110 28.3	259 23.5	3	+ 6.0	+12.0 ± 1.1	9 33.6	
Säfsjö	» »	6 9 s.	324 4.7	188 34.6	4	− 0.6		9 16.2	
Nässjö	» 16	6 10 m.	87 35.4	16 34.7	3	− 7.5	+15.9 »	8 14.0	
Hook	» »	11 32 m.	65 34.0	16 19.3	3	+ 5.1	+14.4 ± 3.4	7 52.6	
Klefshult	» »	3 41 s.	328 8.4	11 29.3	4	+ 1.9	+10.4 ± 2.2	9 58 6	
Kärda	» 17	11 50 m.	135 22.0	147 32.3	5	+ 4.7	+ 9.5 ± 3.1	10 15.5	
Refteled öfre	» 18	8 23 m.	207 30.3	30 3.6	3	− 4.1	+ 8.0 ± 0.1	10 23.2	
Smålandsstenar	» »	0 15 s.	315 56.8	165 49.2	4	+ 5.2	+ 9.1 ± 1.5	10 42.5	
Ätran	» 19	5 13 m.	74 19.9	21 46.4	3	− 2.3		11 18.8	
Kinnared II	» »	9 47 m.	209 9.4	286 13.8	3	+ 0.2	+10.6 ± 0.1	11 30 4	
» I	» »	11 24 m.	52 42.0	129 29.2	2	+ 4 9		10 36.7	
Fröslida	» »	1 47 s.	251 34.8	150 44.1	4	+ 6.9	+ 7.9 ± 0.5	10 30.0	
Sennan	» 20	8 27 m.	348 8.5	226 24.7	3	− 4.5	+ 9.6 ± 1.3	10 35.7	
Halmstad	» »	11 40 m.	109 3.1	152 26.1	3	+ 4.2	+ 9.9 ± 2.7	11 46.5	
Getinge	» 21	8 32 m.	345 16.6	210 27.9	3	− 3.6	+ 6.6 ± 4.2	11 49.3	

[1]) État magnétique très agité. Les variations de la déclinaison excèdent 25' dans un quart d'heure. Voici les lectures faites au cercle:

7^h16^m s.	$269^0 33'.9$
7 26	15.5
7 34	8.1
7 35	11.2

Lieux	Date	Heure T. civil.	Lecture au cercle azimutal		Nombre de pointés	Variat. ε	Torsion ϑ	Déclinaison conclue δ	Moyenne adoptée
			de l'aiguille	du repère					
	1892								
Falkenberg	Août 21	2^h37^m s.	274^0 2'.8	$89^0$45'.5	3	+ 3'.7	+ 7'.6 ± 0'.7	$12^0$12'.2	
Varberg	» »	6 50 s.	283 41.6	13 43 6	3	− 0.5	+ 3.3 ± 3 9	12 30.3	
Backa	» 23	7 17 m.	257 15.3	154 33.7	3	− 3.6	+12.5 ± 0.3	11 5.9	
Åsa I	» »	11 45 m.	223 30.2	38 19.7	4	+ 5.1	+ 6.2 ± 0.6	11 13.6	
» II	» »	1 42 s.	348 56.2	163 45.4	2	+ 5.8		11 14.6	
Kongsbacka	» »	4 26 s.	219 8.4	106 22.7	3	− 0.7	+11.3 ± 0.4	10 52.3	
Veddige	» 24	7 9 m.	338 21.9	122 38.6	3	− 4.2	+ 6.8 ± 1.4	11 6.0	
Björketorp	» 25	5 40 m.	127 35.5	[76]) 40 42.8	3	− 4.4	+ 7.6 ± 4.7	11 4.9	
				[77]) 28 38.8					
Fritsla I	» »	9 30 m.	284 29.4	233 55.4	4	− 0.1	+15.6 ± 4.9	10 41.2	
» II	» »	11 23 m.	81 8.5	204 32.3	2	+ 4.0		10 15.8	
Borås	» »	3 43 s.	153 41.3	357 23.5	3	+ 4.1	+13.0 ± 2.8	11 26.7	
Svenljunga	» »	7 52 s.	117 10.6	189 45.2	2	+ 1.1		10 52.9	
Borgstena	» 26	5 14 s.	182 10.5	61 19.2	3	+ 1.3	+ 1.7 ± 5.6	10 58.2	
Herrljunga	» »	7 32 s.	352 2.2	44 44.0	4	+ 0.1		10 54.5	
»	» »	7 54 s.	291 50 4	344 26.3	3	− 0.6		11 0.9	$10^0$59'.0
»	» 27	6 10 m.	338 28.0	31 7.6	3	− 3.2	+11.5 ± 1.9	11 3.2	
Lagmansholm	» »	9 57 m.	277 38.5	149 19.1	4	+ 2.9	+ 9.7 ± 2.2	11 20.0	
Alingsås	» »	4 41 s.	192 43.1	208 13.2	2	+ 2.3		11 10.7	
Lerum	» 28	2 48 s.	6 52.6	77 58.3	3	+ 4.2	+ 7.6 ± 3.4	11 8.2	
Partilled	» 29	9 12 m.	357 31.5	247 32.0	5	− 3.2	+10.4 ± 1.3	11 13.8	
Marstrand I	» 30	6 52 s.	126 55.3	192 22.4	4	− 1.1	+12.0 ± 0.0	11 46.6	
» II	» »	8 46 s.	34 57.0	105 19.4	1	− 0.4		11 52.0	
Hållö	» 31	7 44 s.	22 33.0	[90]) 17 30.6	3	− 2.3		11 33.7	
				[91]) 171 28.6					$11^0$33'.8
»	Sept. 1er	6 33 m.	13 34.5	[90]) 8 30.9	2	− 0.3		11 34.0	
				[91]) 162 31.8					
Lysekil	» »	10 49 m.	268 35.4	174 5.3	1	+ 6.8	+13.8 ± 2.4	12 17.5	
»	» »	0 15 s.	268 37.1	174 6.1	4	+10.6		12 22.2	$12^0$21'.3
Fiskebäckskil I	» »	3 6 s.	211 39.0	231 49.6	5	+ 7.0		12 6.5	
Grebbestad I	» 3	0 33 s.	328 50.6	67 0.2	6	+ 5.2	+11.2 ± 1.6	12 11.6	
» II	» »	5 33 s.	26 44.1	52 57.7	3	− 1.6		12 0.9	
» III	» 4	7 21 m.	99 4.6	111 46.1	3	− 4.2		11 24.3	
Fjellbacka	» »	1 33 s.	195 34.8	124 18.5	3	+ 5.7	+ 6.6 ± 1.3	12 0.6	
Strömstad	» 5	10 7 m.	253 3.2	354 55.4	4	+ 2.7	+13.2 ± 1.3	12 2.4	
Nord-Koster	» »	3 44 s.	189 5.8	160 39.0	3	+ 2.7	+ 3.2 ± 3.8	11 44.0	
Fredrikshald	» 6	11 7 m.	327 25.4	312 44.3	3	+ 4.4	+12.6 ± 0.2	11 47.1	
Kornsö	» »	4 28 s.	213 36.0	196 30.6	3	+ 2.5	+12.4 ± 0.6	11 46.9	
Hökedalen	» 7	9 56 m.	325 23.3	269 9.4	3	+ 3.2	+ 6.4 ± 2.1	11 38.7	
Vestra Ed	» »	2 28 s.	248 22.0	83 12.0	3	+ 3.7	+ 8.6 ± 0.4	11 38.2	
Bäckefors	» »	6 25 s.	259 56.9	20 51.5	3	- 2.2	− 9.2 ± 2.6	11 13.4	
Mellerud	» 8	10 4 m.	358 15.6	165 23.5	3	+ 1.8	+11.0 ± 0.7	10 56.3	
Åmål	» »	2 13 s.	254 35.8	318 36.1	3	+ 3.8	+10.6 ± 0.6	11 26.3	
Brålanda I	» 9	11 0 m.	233 42.2	273 16.7	4	+ 5.2	+13.2 ± 1.0	11 43.1	
» II	» »	0 22 s.	5 12.1	36 35.9	2	+ 7.1		11 42.7	
Upphärad	» »	6 17 s.	258 42.7	235 50.8	3	+ 0.1	+12.6 ± 0.6	11 21.7	
Elfsängen	» 10	7 57 m.	22 36.2	368 6.8	3	− 4.1	+ 9.2 ± 2.5	10 56.8	

Lieux	Date	Heure T. civil.	Lecture au cercle azimutal		Nombre de pointés	Variat. ε	Torsion ϑ	Déclinaison conclue δ	Moyenne adoptée
			de l'aiguille	du repère					
	1892								
Venersborg	Sept. 10	6^h19^m s.	$149^0 17'.8$	$277^0 21'.8$	4	+ 0'.3	+ 13'.1 ± 1'.4	$10^0 45'.4$	
Salstad	» 11	8 54 m.	66 51.0	182 29.5	3	− 2.6	+ 17.6 ± 2.8	11 13.6	
Håkantorp	» »	6 8 s.	159 37.8	231 59.6	3	+ 1.0		10 21.8	
Lidköping	» 12	11 45 m.	127 21.6	64 42.9	3	+ 6.3	+ 8.8 ± 2.6	10 14.2	
Skara	» »	5 48 s.	235 27.6	96 19.5	3	+ 0.9	+ 9.6 ± 0.0	10 3.4	
Stenstorp	» 13	1 44 s.	175 1.7	109 13.4	7	+ 4.3	+ 15.2 ± 0.9	10 43.8	
Falköping	» 14	9 35 m.	260 5.6	46 34.3	3	− 0.3	+ 17.0 ± 1.0	10 14.9	
Kettilstorp I	» »	2 9 s.	210 25.7	67 8.4	3	+ 6.2	+ 8.0 ± 0.0	10 36.9	
» II	» »	5 16 s.	17 38.5	260 14.1	3	+ 2.0	+ 16.3 »	10 11.9	
Mullsjö I	» 15	8 10 m.	344 16.5	352 42.4	3	− 4.1	+ 12.0 ± 0.3	9 30.3	
Sköfde	» »	2 1 s.	86 2.2	6 18.6	3	+ 5.8	+ 6.1 ± 2.7	10 22.4	
Tibro	» 16	8 11 m.	359 19.0	86 40.8	4	− 2.6	+ 13.5 ± 2.1	10 22.7	
Rödesund	» 17	9 8 m.	306 52.6	169 36.6	3	− 1.7	+ 2.9 ± 1.3	9 43.2	
Motala	» 18	0 2 s.	338 35.6	163 26.0	3	+ 1.5	+ 12.0 ± 0.3	9 4.3	
Godegård	» 19	7 50 m.	21 6.5	106 49.9	2	− 1.4	+ 7.6 »	9 7.0	
Lerbäck	» »	10 1 m.	186 54.7	281 48.6	3	+ 0.4	+ 8.6 ± 0.1	9 8.8	
Hallsberg	» »	2 15 s.	343 48.0	311 32.7	3	+ 5.0	+ 11.5[2] »	9 4.2	
Vingåker	» 20	9 35 m.	148 49.2	345 47.9	4	− 0.9	+ 12.5 ± 0.6	8 46.5	
Bullerö	» 23	3 13 s.	13 48.6	193 5.2	3	+ 3.5	+ 6.5 ± 2.1	7 19.9	
Hufvudskär	» 24	1 53 s.	181 35.8	262 31.1	3	+ 7.9	+ 8.8 ± 2.2	7 45.7	
Sandhamn	» 25	4 52 s.	119 44.9	100 11.9	2	+ 1.4		7 20.0	
Stockholm	» 28	1 10 s.	154 51.2	183 31.5	2	+ 6.7	+ 14.0 ± 5.8	8 14.9	
Upsal III	Oct. 13	1 45 s.	2 38.7	313 45.1	5	+ 6.5[1]	+ 11.3 ± 1.2	7 58.1	
» IV	» »	2 46 s.	78 27.5	251 33.4	9	+ 5.5[1]		7 44.9	

[1]) Variation diurne moyenne à Upsal. Les lectures faites à l'échelle de variation sont: 191d.0 et 191d.6.

[2]) A Kilsmo, on a obtenu $\vartheta = + 9'.2$.

Tableaux IV et V. Détermination des coefficients constants log *C*.

Aimant n. 1.

Station	Date	Heure T.L.	Angle de déviation α	Torsion δ	Temp. t	Var. ε	Heure T.L.	Durée d'une oscillation T	Temp. t'	Var. ε'	log C	log μ
	1892											
Upsal	14 juin	$4^h 22^m$ s.	$35^0\ 3'53''$	+ 9'.3	$14^0.6$	$197^d.3$	$6^h\ 7^m$ s.	$2^s.94822$	$16^0.4$	$197^d.4$	$\bar{1}.562095$	$\bar{1}.410140$
	»	4 42 s.	35 4 21	+ 7.8	14.6	196.4	6 17 s.	2.94753	15.6	197.7	$\bar{1}.562071$	$\bar{1}.410202$
	»	4 57 s.	35 5 8	+ 9.8	14.7	195.2	6 30 s.	2.94870	15.2	198.1	$\bar{1}.562320$	$\bar{1}.410041$
	»	5 12 s.	35 4 48	+ 8.7	14.6	195.8	6 40 s.	2.94610	14.9	198.4	$\bar{1}.561943$	$\bar{1}.410379$
	»	5 26 s.	35 5 1	+10.2	14.6	196.7	6 53 s.	2.94822	14.8	197.9	$\bar{1}.562278$	$\bar{1}.410123$
	»	5 42 s.	35 3 38	+ 4.0	14.7	196.6	7 2 s.	2.94749	14.6	198.6	$\bar{1}.562093$	$\bar{1}.410075$
Copenhague	11 juill.	8 58 m.	32 35 52	+ 7.0	15.6	−36.6	10 32 m.	2.86498	18.4	−37.3	$\bar{1}.562358$	$\bar{1}.408799$
	»	9 15 m.	32 37 13	+ 7.8	16.2	−36.8	10 42 m.	2.86351	18.6	−37.7	$\bar{1}.562411$	$\bar{1}.409213$
Upsal	19 oct.	1 28 s.	34 43 17	+ 9.3	3.9	186.1	0 29 s	2.96357	3.5	177.6	$\bar{1}.561272$	$\bar{1}.404906$
	»	1 40 s.	34 43 59	+ 2.7	3.7	182.2	0 44 s.	2.96386	3.5	177.4	$\bar{1}.561262$	$\bar{1}.404814$
	»	1 54 s.	34 42 13	+ 8.8	3.7	191.6	0 58 s.	2.96486	3.4	177.7	$\bar{1}.561491$	$\bar{1}.404751$
	»	2 6 s.	34 42 29	+14.9	3.4	191.0	1 11 s.	2.96246	3.5	184.8	$\bar{1}.561328$	$\bar{1}.404902$

Aimant n. 2.

Upsal	13 mai	»	$37^0 14'30''$	»	$13^0.9$	$193^d.3$	»	$3^s.18770$	$13^0.0$	$186^d.0$	$\bar{1}.606328$	$\bar{1}.387493$
Upsal	7 juin	$2^h\ 9^m$ s.	37 6 56	+10'.8	18.5	200.4	$4^h 22^m$ s.	3.18386	19.1	205.4	$\bar{1}.606545$	$\bar{1}.387646$
	»	2 36 s.	37 6 0	+10.6	18.1	205.3	4 39 s.	3.18522	18.8	203.5	$\bar{1}.606743$	$\bar{1}.387536$
	»	2 57 s.	37 9 40	+12.0	18.1	194.9	4 54 s.	3.18639	18.7	198.3	$\bar{1}.606792$	$\bar{1}.387532$
	»	3 16 s.	37 8 42	+12.0	18.0	196.4	5 3 s.	3.18641	18.6	195.2	$\bar{1}.606657$	$\bar{1}.387566$
Upsal	14 juin	0 31 s.	37 13 37	+ 9.5	14.0	182.0	1 15 s.	3.18597	15.5	189.5	$\bar{1}.606401$	$\bar{1}.387382$
	»	0 48 s.	37 12 52	+ 9.0	14.1	187.0	1 44 s.	3.18463	14.6	191.7	$\bar{1}.606384$	$\bar{1}.387546$
	»	2 34 s.	37 9 40	+11.1	14.0	198.3	1 56 s.	3.18571	14.6	193.0	$\bar{1}.606612$	$\bar{1}.387398$
	»	2 52 s.	37 8 46	+10.2	14.2	199.5	2 10 s.	3.18366	14.5	195.1	$\bar{1}.606351$	$\bar{1}.387577$
Copenhague	11 juill.	9 37 m.	34 34 2	+ 3.8	16.5	−36.4	10 55 m.	3.09086	19.2	−37.7	$\bar{1}.606574$	$\bar{1}.387187$
	»	9 54 m.	34 33 34	+ 8.6	17.0	−37.5	11 5 m.	3.08878	19.7	−37.9	$\bar{1}.606416$	$\bar{1}.387484$
Upsal	20 oct.	10 49 m.	37 17 52	+ 7.8	2.6	169.3	1 2 s.	3.18593	3.6	176.9	$\bar{1}.605562$	$\bar{1}.386423$
	»	11 59 m.	37 15 31	+17.0	2.6	175.7	11 19 m.*	3.18854	2.6	167.3	$\bar{1}.605694$	$\bar{1}.386258$
	»	0 16 s.	37 16 41	+17.5	2.6	170.0	11 29 m.*	3.18708	2.8	167.7	$\bar{1}.605430$	$\bar{1}.386389$
	»	0 27 s.	37 15 34	+12.8	2.6	173.5	11 44 m.*	3.18777	3.0	169.7	$\bar{1}.605581$	$\bar{1}.386253$

* Ces observations ont été faites le 21 à l'avant-midi.

Résumé.

14 juin . .	$\bar{1}.562133$
11 juill. . .	$\bar{1}.562384$
Avant le voyage . . .	$\bar{1}.562258$
Après (19 oct.) . .	$\bar{1}.561338$
Décroissement . . .	−920

13 mai . .	$\bar{1}.606328$?
7 juin . .	$\bar{1}.606679$?
14 juin . .	$\bar{1}.606538$
11 juill. . .	$\bar{1}.606495$
Avant le voyage . .	$\bar{1}.606516$
Après (20 oct) . . .	$\bar{1}.605567$
Décroissement . . .	−943

Tableau VI. — Observations de la composante horizontale faites avec l'aimant n° 1 D'EDELMANN.

Stations	Date	Observations de déviations					Observations d'oscillations				Valeurs de H (unités C.G.S.)	Valeurs de log μ
		Heure T.M. local	Angle de déviation α	Torsion δ	Temp. centigr. t	Variat. de la comp. ε	Heure T.M. local	Durée d'une osc. ramenée à des arcs très petits T	Temp. centigr. t'	Variat. de la comp. ε'		
	1892											
Liatorp	Juill. 1er	10h 5m s.	33°43′26″	+12′.3	23°.9	−20	11h15m m.	2s.91359	26°.5	−17	0.16832	1.408906
Lund	» 20	10 2 m.	32 33 54	+ 8.3	18.4	−23	10 52 m.	2.86488	20.3	−21	0.17389	1.408851
Tomelilla	» 26	10 21 m.	32 55 5	+13.2	26.9	− 9	11 0 m.	2.88574	29.4	−43	0.17184	1.409245
Eslöf	» 27	1 24 s.	32 32 2	+22.4	25.2	−31	2 6 s.	2.87252	28.9	−18	0.17354	1.408237
Qviinge backe	» 30	1 39 s.	33 2 8	+ 7.0	32.5	−19	2 26 s. 2 39 s.	2.90139 2.89763	32.3 36.5	− 5 + 2	0.17058	1.407813
Hästveda	Août 3	11 57 m.	33 14 23	+19.3	18.0	+ 2	0 42 s.	2.89218	23.2	+ 4	0.17052	1.408814
Skallinge I	» 12	1 21 s	34 2 49	+20.6	16.7	− 5	2 7 s.	2.92660	19.4	+34	0.16658	1.407515
Bolmen I	» 13	11 30 m.	33 31 14	+ 7.9	20.8	−59	0 42 s.	2.91674	26.0	−28	0.16891	1.406761
Klefshult	» 16	3 25 s.	33 42 35	+13.7	19.2	+ 6	4 24 s.	2.92368	22.9	+ 4	0.16758	1.406912
Kärda	» 17	11 34 m.	33 28 58	+ 4.8	19.4	−14	0 24 s.	2.91404	18.5	− 7	0.16869	1.406713
Refteled	» 18	8 13 m.	33 33 38	+ 8.2	16.8	−12	8 57 m.	2.91834	21.0	−17	0.16842	1.406647
Lerum	» 28	2 40 s.	34 9 24	+ 2.5	17.6	+24	3 24 s.	2.94344	16.4	+21	0.16523	1.407075
Grebbestad I	Sept. 3	11 57 m.	35 30 1	+ 9.7	17.7	− 2	1 31 s	2.98330?	17.5	+18	0.16045	1.407320?
»	» »	0 57 s.	35 30 13	+ 2.5	14.3	+ 4	1 44 s.	2.99208	19.6	+23	0.16003	1.405981
Strömstad	» 5	9 51 m.	35 47 25	+15.1	17.2	− 9	10 49 m.	3.00694	18.0	− 3	0.15879	1.405603
Hökedalen	» 7	9 47 m.	35 19 30	+ 3.2	18.2	− 3	10 41 m.	2.99098	19.1	− 1	0.16050	1.405617
Tibro	» 16	8 11 m.	34 47 41	+16.6	14.1	−18	9 6 m.	2.97354	16.3	+ 2	0.16261	1.404662?

Tableau VII. — Observations de la composante horizontale faites avec l'aimant n° 2 de LAMONT.

	1892											
Liatorp	Juill. 1er	10h24m m.	35°44′25″	+10′.9	24°.8	−17	11h33m m.	3s.14083	28°.5	−16	0.16856	1.387504
Lund	» 20	10 17 m.	34 31 57	+10.4	19.3	−20	11 5 m.	3.09000	21.5	−21	0.17394	1.387404
Tomelilla	» 26	10 37 m.	34 57 4	+ 8.1	28.3	−32	11 13 m.	3.12025	28.6	−71	0.17160	1.386876
Eslöf	» 27	1 40 s.	34 31 28	+24.0	25.2	−24	2 19 s	3.09991	27.2	−10	0.17335	1.386437
Qviinge	» 30	1 55 s.	35 4 40	+ 5.0	33.8	−15	2 51 s.	3.12430	36.5	+ 3	0.17070	1.387069
Hästveda	Août 3	0 13 s.	35 14 31	+ 9.0	17.9	+ 9	0 55 s.	3.11966	22.8	− 7	0.17061	1.387290
Skallinge I	» 12	1 38 s.	36 5 29	+ 5.1	17.2	+94	2 21 s.	3.15569	17.4	+23	0.16627	1.387170
Bolmen I	» 13	11 44 m.	35 57 35	+10.5	19.8	−59	0 56 s.	3.14331	25.6	−25	0.16829	1.387428
Klefshult	» 16	3 41 s.	35 53 47	+ 7.0	20.9	+ 7	4 43 s	3.14776	21.5	+ 4	0.16760	1.386809
Kärda	» 17	11 56 m.	35 42 22	+14.1	17.6	−12	0 38 s.	3.13787	18.3	− 6	0.16868	1.386436
Refteled	» 18	8 29 m.	35 45 53	+ 7.8	16.7	−15	9 11 m.	3.14542	24.5	−20	0.16838	1.386370
Lerum	» 28	2 57 s.	36 27 38	+12.7	16.4	+17	3 42 s.	3.16532	16.7	+18	0.16544	1.386736
Grebbestad I	Sept. 3	0 15 s.	37 57 43	+16 0	15.0	− 3	1 58 s.	3.22285	20.2	+23	0.15987	1.386189
»	» »	0 35 s.	37 57 55	+16.6	13.8	+ 2	2 10 s.	3.22168	21.0	+24	0.15993	1.386382
Strömstad	» 5	10 22 m	38 13 38	+11.2	19.0	− 7	0 3 s.	3.23662	20.4	+ 9	0.15873	1.386000
Hökedalen	» 7	10 9 m.	37 43 15	+ 9.6	19.7	− 4	10 55 m.	3.21806	20.7	+ 1	0.16058	1.386240
Tibro	» 16	8 34 m.	37 7 31	+10.4	14.1	−14	9 21 m.	3.20254	18.2	+ 8	0.16254	1.384696?

Tableau VIII. — Observations de la composante horizontale faites avec l'aimant n° 1 d'EDELMANN.

Observations de déviations.

Stations	Date	Heure T.M. local	Angle de déviation α	Torsion δ	Temp. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.
	1892						
Upsal I	Juin 15	$2^h 34^m$ s.	$35^0\ 3'13''$	+ 4'.6	$17^0.1$	+ 34	0.16298
Gustafsberg	» 20	5 39 s.	35 9 2	+ 5.7	20.0	+ 28	0.16242
Udden	» 21	1 32 s.	36 6 53	+ 3.6	20.6	— 16	0.15904
Dalarö	» 23	0 50 s.	34 56 57	+ 9.7	20.0	— 11	0.16357
Jutholmen	» »	4 2 s.	34 48 34	+10.2	20.0	+ 35	0.16368
Vislanda	Juill. 1er	6 32 s.	33 38 46	— 5.1	16.0	+ 12	0.16892
Kjeflinge	» 12	8 21 s.	32 0 47	—16.2	15.7	+156	0.17490
Hildesborg	» 16	1 30 s.	32 23 4	+36.7	20.2	+ 35	0.16401
Klagstorp	» 21	0 50 s.	32 7 50	+ 8.9	28.9	— 33	0.17539
Rydsgård	» 22	7 38 m.	32 5 20	+ 7.1	18.7	— 64	0.17639
Hörby	» 28	9 30 m.	32 26 31	— 6.8	24.8	— 29	0.17391
Sölvesborg	» 29	11 37 m.	32 52 22	+ 3.4	28.0	— 30	0.17172
Vittsjö	Août 4	1 44 s.	33 35 32	+ 8.8	21.3	— 17	0.16854
Perstorp	» 6	7 37 s.	33 14 29	+ 4.5	14.9	+ 13	0.17007
Klippan I	» 7	8 31 m.	32 46 1	+ 8.0	18.5	— 38	0.17258
Åstorp I	» »	2 16 s.	33 19 14	+13.8	17.1	— 5	0.16977
Höganäs	» 9	6 5 s.	33 1 31	+13.1	14.3	+ 29	0.17087
Engelholm	» 10	11 33 m.	32 46 55	+ 3.7	21.3	— 35	0.17228
Engelholms hamn	» »	6 7 s.	33 0 31	+ 4.7	17.3	+ 14	0.17093
Grefvie I	» 11	7 44 m.	33 12 52	+12.8	15.5	— 2	0.17022
Laholm I	» »	11 49 m.	33 24 4	+ 8.2	22.0	— 29	0.16934
Eldsberga	» »	4 39 s.	33 32 42	— 6.0	18.5	+ 13	0.16844
Lidhult	» 13	7 52 m.	33 26 44	+ 9.5	15.1	— 90	0.17004
Tutaryd	» 14	0 22 s.	33 33 26	+10.9	19.4	— 59	0.16901
Lamhult	» 15	1 36 s.	33 42 46	+10.3	15.1	— 25	0.16816
Nässjö	» 16	6 6 m.	33 28 52	+15.9	13.0	+ 5	0.16897
Hook	» »	11 24 m.	33 44 55	+ 9.2	18.6	— 39	0.16795
Smålandsstenar	» 18	0 0 s.	33 28 12	+ 6.8	25.1	— 18	0.16864
Kinnared II	» 19	9 37 m.	34 1 41	+10.8	20.8	— 28	0.16648
Fröslida	» »	1 33 s.	33 28 23	+ 8.7	30.1	— 6	0.16825
Sennan	» 20	8 17 m.	33 20 55	+ 7.7	20.8	— 7	0.16924
Halmstad	» »	11 30 m.	33 12 26	+ 5.9	22.3	— 22	0.16995
Getinge	» 21	8 23 m.	33 48 1	+ 0.3	16.4	— 25	0.16761
Falkenberg	» »	2 27 s.	33 45 54	+ 8.7	24.3	+ 6	0.16708
Varberg	» »	6 42 s.	33 49 10	— 2.5	19.3	+ 9	0.16704
Backa	» 23	7 7 m.	34 23 41	+12.9	16.9	+ 4	0.16479
Åsa I	» »	11 25 m.	33 59 4	+ 5.3	28.2	— 12	0.16604
Kongsbacka	» »	4 17 s.	34 8 9	+11.9	28.3	+ 19	0.16514
Veddige	» 24	7 1 m.	34 21 9	+ 4.7	17.4	— 9	0.16498
Björketorp	» 25	5 35 m.	33 47 16	+ 0.6	11.8	— 4	0.16759
Fritsla I	» »	9 14 m.	34 21 23	+22.9	30.8	— 57	0.16480
Borås	» »	3 36 s.	33 49 51	+ 8.9	32.3	— 12	0.16652
Borgstena	» 26	5 10 s.	33 45 42	— 6.7	16.8	+ 16	0.16724
Herrljunga	» 27	6 2 m.	34 37 53	+14.3	11.9	— 19	0.16411
Lagmansholm	» »	9 54 m.	34 32 47	+ 6.4	16.1	— 37	0.16445

Stations	Date	Heure T.M. local	Angle de déviation α	Torsion δ	Temp. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C G S.
	1892						
Partilled	Août 29	8^h51^mm.	$34^0\,14'\,4''$	+12'.3	$15^0.5$	+ 1	0.16537
Marstrand I	» 30	6 44 s.	34 19 56	+12.0	14.8	+ 15	0.16482
Lysekil	Sept. 1er	11 59 m.	34 17 25	+10.1	16.8	+ 2	0.16500
Fjellbacka	» 4	1 25 s.	35 12 10	+ 4.6	21.0	+ 15	0.16088
Nord-Koster	» 5	3 37 s.	35 3 14	− 2.5	20.5	+ 12	0.16152
Fredrikshald	» 6	11 18 m.	36 30 43	+12.8	17.5	− 17	0.15631
Kornsö	» »	4 38 s.	35 37 25	+13.4	15.3	+ 26	0.15933
Vestra Ed	» 7	2 21 s.	35 12 47	+ 8.0	22.0	+ 25	0.16064
Bäckefors	» »	6 17 s.	35 7 53	+ 5.1	15.7	+ 15	0.16135
Mellerud	» 8	9 56 m.	35 9 56	+10.0	17.4	− 22	0.16149
Åmål	» »	2 6 s.	35 15 50	+ 9.8	23.7	+ 4	0.16055
Brålanda I	» 9	10 46 m.	34 56 50	+14.6	14.4	− 20	0.16246
Upphärad	» »	6 9 s.	34 26 23	+13.6	16.6	+ 7	0.16418
Elfängen	» 10	7 50 m.	34 42 53	+ 5.4	13.5	− 28	0.16352
Venersborg	» »	6 6 s.	34 43 37	+17.1	13.1	+ 13	0.16307
»	» »	6 18 s.	34 43 14	+12.0	13.0	+ 14	0.16309
Salstad	» 11	8 46 m.	35 3 15	+21.8	13.6	− 4	0.16187
Lidköping	» 12	11 37 m.	35 18 31	+12.7	19.6	− 35	0.16087
Skara	» »	5 41 s.	34 30 19	+ 9.6	14.2	− 9	0.16412
Stenstorp	» 13	1 51 s.	34 30 58	+13.8	19.5	− 21	0.16393
Falköping	» 14	9 26 m.	34 18 50	+15.6	19.2	− 9	0.16470
Kettilstorp I	» »	1 57 s.	33 43 56	+ 8.0	21.3	− 5	0.16701
» II	» »	5 13 s.	33 54 14	+16.3	14.4	− 23	0.16676
Mullsjö I	» 15	8 3 m.	34 26 33	+11.6	11.1	+ 16	0.16422
Sköfde	» »	1 51 s.	34 46 0	+10.2	12.6	− 10	0.16307
Rödesund	» 17	8 59 m.	34 38 31	+ 4.9	16 5	− 25	0.16352
Motala	» 18	11 54 m.	34 51 14	+12.5	17.4	− 9	0.16242
Godegård	» 19	7 50 m.	34 43 48	+ 7.6	11.2	+ 32	0.16279
Lerbäck	» »	10 4 m.	34 54 23	+ 8.8	14.5	− 2	0.16226
Hallsberg	» »	2 18 s.	35 30 11	+11.5	12.4	+ 3	0.16029
Kilsmo	» »	5 3 s.	35 20 43	+ 9.2	11.9	+ 7	0.16052
Vingåker	» 20	9 21 m.	35 26 58	+13.3	17.1	− 10	0.16004
Bullerö	» 23	3 6 s.	34 41 11	+ 3.3	16 4	− 6	0.16303
Hufvudskär	» 24	1 45 s.	34 57 59	+12.2	18.8	− 22	0.16192
Stockholm	» 28	1 11 s.	34 50 59	+ 5.3	24.0	− 37	0.16224

Observation d'oscillation.

Station	Date	Heure T.M. local	Durée d'une oscillat. T	Tempér. centigr. t'	Variat. de la compos ε	Valeur de H unités C.G.S.
	1892					
Landskrona	Juill. 13	0^h22^ms.	$2^s.86940$	$19^0.8$	− 74	0.17387

Tableau IX. — Observations de la composante horizontale faites avec l'aimant n° 2 de LAMONT.

Observations de déviation.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Torsion δ	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S
	1892						
Upsal I	Juin 15	2^h16^ms.	$37^0\ 9'\ 7''$	+ 6'.8	$17^0.3$	+ 18	0.16305
Gustafsberg	» 20	5 58 s.	37 17 7	+12.2	20.1	+ 43	0.16218
Dalarö	» 23	1 11 s.	37 9 28	−65.9	19.3	− 7	0.16319
Malmö	Juill. 11	7 12 s.	34 23 6	+13.8	16.3	+ 21	0.17421
Kjeflinge	» 12	8 39 s.	34 0 51	+23.6	14.5	+165	0.17463
Hildesborg	» 16	1 49 s.	34 14 9	+18.5	17.7	+135	0.17375
Klagstorp	» 21	1 5 s.	34 4 16	+ 1.8	26.4	− 1	0.17542
Cimbrishamn	» 22	6 23 s.	34 14 34	+ 7.1	20.2	+ 12	0.17479
Vollsjö	» 26	4 10 s.	34 17 54	+ 8.5	23.6	+ 66	0.17382
Hörby	» 28	9 15 m.	34 26 43	+ 2.2	24.8	− 31	0.17407
Tollarp	» »	1 41 s.	34 36 38	+ 8.6	27.7	− 21	0.17311
Sölvesborg	» 29	11 54 m.	34 55 11	+ 7.9	27.3	− 32	0.17189
Vittsjö	Août 4	2 0 s.	35 41 22	+ 8.1	20.6	− 11	0.16870
Klippan I	» 7	8 48 m.	34 47 59	+11.9	20.6	− 39	0.17271
Kattarp	» 9	1 44 s.	35 8 22	+14.4	17.2	− 21	0.17121
Engelholm	» 10	11 47 m.	34 57 13	+46.2	20.8	− 36	0.17198
Engelholms hamn	» »	6 24 s.	35 9 25	+10.9	15.8	+ 12	0.17086
Grefvie I	» 11	8 1 m.	35 19 38	+ 9.3	15.8	− 4	0.17029
Laholm I	» »	0 5 s.	35 31 58	+10.3	23.2	− 27	0.16934
Eldsberga	» »	4 53 s.	35 41 0	+ 5.7	18.4	+ 13	0.16853
Tutaryd	» 14	0 38 s.	35 43 2	+ 7.3	21.3	− 56	0.16894
Alfvestad	» 15	6 36 m.	35 36 20	+11.4	13.5	− 13	0.16930
Lamhult	» »	1 50 s.	35 56 1	+13.6	14.9	− 21	0.16798
Hook	» 16	11 40 m.	35 58 20	+19.5	17.3	− 34	0.16784
Smålandsstenar	» 18	0 15 s.	35 40 19	+11.4	25.2	− 15	0.16851
Kinnared II	» 19	9 55 m.	36 17 40	+10.4	20.0	− 30	0.16637
Fröslida	» »	1 53 s.	35 42 35	+ 7.1	29.0	− 4	0.16808
Sennan	» 20	8 35 m.	35 33 30	+11.5	21.9	− 11	0.16907
Halmstad	» »	11 51 m.	35 21 28	+13.9	25.8	− 17	0.16979
Getinge	» 21	8 41 m.	36 3 50	+12.8	16.8	− 28	0.16740
Falkenberg	» »	2 46 s.	35 59 30	+ 6.5	23.9	+ 7	0.16703
Varberg	» »	6 57 s.	36 6 45	+ 9.1	17.3	+ 11	0.16679
Backa	» 23	7 28 m.	36 41 4	+12.1	17.9	0	0.16462
Åsa I	» »	11 42 m.	36 15 36	+ 7.0	28.8	− 9	0.16590
Kongsbacka	» »	4 36 s.	36 26 7	+10.7	26.6	+ 18	0.16503
Veddige	» 24	7 21 m.	36 37 19	+ 9.0	19.6	− 9	0.16487
Björketorp	» 25	5 48 m.	36 4 40	+14.7	11.8	− 5	0.16730
Fritsla I	» »	9 30 m.	36 40 23	+ 8.3	30.9	− 57	0.16467
Borås	» »	3 51 s.	36 6 18	+17.2	32.3	− 8	0.16634
Borgstena	» 26	5 18 s.	36 2 53	+10.1	15.4	+ 16	0.16704
Herrljunga	» 27	6 19 m.	36 58 7	+ 8.7	12.3	− 20	0.16394
Lagmansholm	» »	10 12 m.	36 52 8	+13.0	16.5	− 34	0.16428
Partilled	» 29	9 28 m.	36 32 37	+ 8.5	15.2	− 1	0.16525
Marstrand I	» 30	6 59 s.	36 38 29	+12.0	15.0	+ 17	0.16468

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Torsion δ	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.
	1892						
Lysekil	Sept. 1er	$0^h 18^m$ s.	$36^0 38' 25''$	+17'.4	$15^0.5$	+ 4	0.16478
Fjellbacka I	» 4	1 42 s.	37 37 34	+ 8.5	19.7	+ 17	0.16076
Nord-Koster	» 5	3 53 s.	37 29 1	+ 8.8	19.6	+ 22	0.16133
Fredrikshald	» 6	11 33 m.	39 2 36	+12.3	17.2	— 16	0.15622
Kornsö	» »	4 55 s.	38 5 5	+11.5	15.2	+ 21	0.15924
Vestra Ed	» 7	2 37 s.	37 39 2	+ 9.1	21.3	+ 23	0.16052
Bäckefors	» »	6 32 s.	37 33 58	+12.8	14.0	+ 16	0.16120
Mellerud	» 8	10 11 m.	37 34 8	+12.0	15.8	— 22	0.16149
Åmål	» »	2 20 s.	37 39 52	+11.5	23.3	+ 6	0.16055
Brålanda I	» 9	11 0 m.	37 18 54	+11.7	14.4	— 21	0.16247
Upphärad	» »	6 25 s.	36 47 3	+11.7	16.4	+ 7	0.16410
Elfängen	» 10	8 4 m.	37 6 40	+13.0	13.6	— 30	0.16335
Venersborg	» »	6 30 s.	37 4 28	+10.2	13.2	+ 15	0.16305
Salstad	» 11	9 6 m.	37 26 13	+13.3	12.8	— 7	0.16193
Lidköping	» 12	11 53 m.	37 43 26	+ 5.0	19.2	— 35	0.16089
Skara	» »	5 55 s.	36 51 21	+ 9.6	12.6	— 6	0.16410
Stenstorp	» 13	2 6 s.	36 52 20	+16.5	17.9	— 23	0.16394
Falköping	» 14	9 43 m.	36 42 18	+18.5	15.8	— 8	0.16455
Kettilstorp I	» »	2 18 s.	36 4 43	+ 8.1	16.8	— 6	0.16694
Mullsjö I	» 15	8 15 m.	36 48 35	+12.5	11.0	+ 5	0.16422
Sköfde	» »	2 11 s.	37 4 40	+ 2.0	17.3	+ 2	0.16296
Rödesund	» 17	9 17 m.	37 0 41	+ 0.9	17.4	— 30	0.16351
Motala	» 18	0 10 s.	37 13 13	+11.5	17.5	— 6	0.16248
Lerbäck	» 19	10 20 m.	37 17 9	+ 8.5	14.5	— 3	0.16232
Vingåker	» 20	9 34 m.	37 53 45	+11.6	16.8	— 12	0.16008
Bullerö	» 23	3 20 s.	37 6 11	+ 9.7	15.0	— 3	0.16295
Hufvudskär	» 24	2 2 s.	37 23 41	+ 5.5	17.3	— 18	0.16191
Stockholm	» 28	1 28 s.	37 21 22	+22.8	20.6	— 33	0.16204
Upsal I	Nov. 11	0 54 s.	37 9 48	+ 8.3	7.7	$178^d.2$	0.16288
»	» »	2 41 s.	37 9 46	+ 9.6	7.4	181.7	0.16289
»	» »	2 55 s.	37 9 40	+11.4	7.4	182.1	0.16290

Observation d'oscillation.

Station	Date	Heure T.M. local	Durée d'une oscillat. T	Tempér. centigr. t'	Variat. de la compos. ε'	Valeur de H unités C.G.S.
	1892					
Landskrona	Juill. 13	$0^h 37^m$ s.	$3^s.10075$	$19^0.5$	— 69	0.17315

Tableau X. — Détermination du log C du déflecteur A, du théodolite LAMONT.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de log C	Différence obs.—calc.
	1892						
Upsal I	Juin 14	7^h26^ms.	$21^0 50' 5''$	$12^0.4$	$198^d.3$	$\bar{2}.783463$	− 194
»	» »	7 29 s.	21 50 22	12.4	197.9	$\bar{2}.783526$	− 131
»	» »	7 33 s.	21 50 43	12.4	198.4	$\bar{2}.783663$	+ 6
Liatorp I	Juill. 1er	10 36 m.	21 8 42	21.0	− 29	$\bar{2}.783250$	+ 89
»	» »	10 38 m.	21 8 12	21.6	− 28	$\bar{2}.782929$	− 232
Copenhague	» 11	10 8 m.[1])	20 26 37	17.0	$-38^d.0$	$\bar{2}.782609$	− 258
Malmö	» »	7 30 s.	20 20 27	16.1	+ 27	$\bar{2}.782849$	− 6
Kjeflinge	» 12	8 54 s.	20 5 13	13.3	+168	$\bar{2}.782430$	− 392
Hildesborg	» 16	2 2 s.	20 14 59	16.5	+125	$\bar{2}.782600$	− 112
Lund I	» 20	9 46 m.	20 25 25	15.5	− 33	$\bar{2}.782555$	− 44
Klagstorp	» 21	1 16 s.	20 13 54	24.7	− 21	$\bar{2}.782496$	− 71
Rydsgård	» 22	7 49 m.	20 6 47	16.3	− 40	$\bar{2}.781906$	− 637
Tomelilla	» 26	10 6 m.	20 40 30	22.7	− 22	$\bar{2}.782512$	+ 91
Vollsjö	» »	3 52 s.	20 22 27	25.0	+ 29	$\bar{2}.782735$	+ 324
Eslöf	» 27	1 6 s.	20 32 27	23.6	− 41	$\bar{2}.783699$	+1311
Hörby	» 28	9 40 m.	20 25 47	21.2	− 31	$\bar{2}.782738$	+ 376
Tollarp	» »	1 51 s.	20 30 42	24.9	− 19	$\bar{2}.782550$	+ 194
Qviinge backe	» 30	1 22 s.	20 48 55	27.4	− 30	$\bar{2}.782441$	+ 142
Vittsjö	Août 4	2 8 s.	21 4 51	15.7	− 7	$\bar{2}.782661$	+ 513
Perstorp	» 6	7 47 s.	20 50 35	14.6	+ 13	$\bar{2}.782172$	+ 90
Åstorp I	» 7	2 25 s.	20 51 59	17.9	0	$\bar{2}.781585$	− 474
Höganäs nedre	» 9	4 25 s.	20 43 38	14.9	+ 16	$\bar{2}.781975$	− 21
Grefvie I	» 11	8 12 m.	20 50 17	14.8	− 7	$\bar{2}.782048$	+ 98
Lidhult	» 12	7 21 s.	20 35 6	14.2	+135	$\bar{2}.780020$?	(−1884)
Bolmen I	» 13	11 54 m.	21 2 19	17.5	− 61	$\bar{2}.780695$	−1189
Klefshult	» 16	5 34 s.	21 9 44	18.7	− 5	$\bar{2}.781977$	+ 189
Smålandsstenar	» 18	0 27 s.	21 4 4	21.2	− 15	$\bar{2}.782174$	+ 439
Åsa I	» 23	0 2 s.	21 22 2	26.4	− 5	$\bar{2}.781576$	− 10
Fritsla I	» 25	9 42 m.	21 37 28	25.8	− 56	$\bar{2}.781939$	+ 409
Grebbestad I	Sept. 3	1 4 s.	22 10 8	14.0	− 5	$\bar{2}.781189$	− 71
Brålanda I	» 9	11 13 m.	21 51 16	14.4	− 21	$\bar{2}.781011$	− 71
Tibro	» 16	7 48 m.	21 43 44	12.1	− 16	$\bar{2}.779319$	−1561
Vingåker	» 20	9 45 m.	22 9 13	15.3	− 13	$\bar{2}.780380$	− 378
Upsal I	Oct. 21	1 34 s.	21 46 25	4.4	$176^d.0$	$\bar{2}.780537$	−1294
»	» »	1 35 s.	21 47 3	4.4	175.9	$\bar{2}.780738$	+ 907

[1]) T. local.

Tableaux XI. — Détermination du log *C* du déflecteur *B* du théodolite LAMONT.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de log C	Différence obs.—calc.
	1892						
Upsal I	Juin 14	7^h42^m s.	$30^0 16' 31''$	$12^0.4$	$197^d.5$	$\bar{2}.915164$	»
»	» »	7 45 s.	30 17 37	12.4	196.7	$\bar{2}.915348$	»
»	» »	7 47 s.	30 18 26	12.4	197.7	$\bar{2}.915578$	»
Liatorp I	Juill. 1er	10 44 m.	29 26 17	20.7	— 27	$\bar{2}.918390$	+ 222
»	» »	10 46 m.	29 25 53	20.2	— 27	$\bar{2}.918226$	+ 58
Kjeflinge	» 12	9 0 s.	28 6 58	12.9	+108	$\bar{2}.918065$	+ 169
Hildesborg	» 16	2 6 s.	28 7 27	16.0	+165	$\bar{2}.917875$	+ 68
Lund I	» 20	9 50 m.	28 26 19	16.9	— 34	$\bar{2}.917841$	+ 125
Klagstorp	» 21	1 20 s.	28 5 18	25.4	— 26	$\bar{2}.917801$	+ 111
Rydsgård	» 22	7 54 m.	28 1 43	16.5	— 32	$\bar{2}.917926$	+ 255
Tomelilla	» 26	10 10 m.	28 46 5	21.7	— 16	$\bar{2}.918076$	+ 503
Vollsjö	» »	4 0 s.	28 12 0	23.8	+ 63	$\bar{2}.917431$	— 135
Eslöf	» 27	1 11 s.	28 23 26	21.4	— 42	$\bar{2}.916482$	— 65
Hörby	» 28	9 44 m.	28 21 25	20.6	— 25	$\bar{2}.917394$	— 131
Tollarp	» »	1 56 s.	28 26 41	25.8	— 20	$\bar{2}.917319$	— 202
Qviinge backe	» 30	1 27 s.	28 51 7	27.4	— 28	$\bar{2}.917037$	— 438
Vittsjö	Août 4	2 14 s.	29 21 8	16.4	— 3	$\bar{2}.917394$	+ 41
Klippan I	» 7	9 1 m.	28 39 11	15.8	— 39	$\bar{2}.917071$	— 215
Åstorp I	» »	2 29 s.	29 5 58	15.9	+ 25	$\bar{2}.917562$	+ 280
Höganäs nedre	» »	4 32 s.	28 53 17	14.8	+ 15	$\bar{2}.917054$	— 177
Engelholm	» 10	0 35 s.	28 39 41	15.5	— 29	$\bar{2}.916107$	—1105
Grefvie I	» 11	8 16 m.	29 1 44	15.4	— 8	$\bar{2}.916935$	— 258
Laholm I	» »	0 18 s.	29 10 59	18.9	— 25	$\bar{2}.916764$	— 424
Lidhult	» 12	7 30 s.	28 35 23	14.0	+ 84	$\bar{2}.912459$?	(—4698)
Bolmen I	» 13	0 1 s.	29 20 0	17.6	— 58	$\bar{2}.916130$	—1010
Alfvestad	» 15	6 44 m.	29 17 4	12.5	— 14	$\bar{2}.917364$	+ 267
Nässjö	» 16	6 14 m.	29 19 38	13.2	+ 4	$\bar{2}.917660$	+ 586
Klefshult	» »	4 0 s.	29 30 48	18.5	— 5	$\bar{2}.917443$	+ 379
Smålandsstenar	» 18	0 34 s.	29 22 32	18.6	— 15	$\bar{2}.917622$	+ 601
Åsa I	» 23	0 12 s.	29 45 55	25.7	— 4	$\bar{2}.917392$	+ 490
Fritsla I	» 25	9 50 m.	30 5 44	25.9	— 56	$\bar{2}.917166$	+ 310
Partilled	» 29	9 15 m.	30 4 56	11.2	— 1	$\bar{2}.917756$	— 4
Grebbestad I	Sept. 3	1 10 s.	31 5 5	14.3	— 4	$\bar{2}.917304$	+ 665
Brålanda I	» 9	11 19 m.	30 38 8	14.7	— 20	$\bar{2}.917375$	+ 880
Tibro	» 16	7 55 m.	30 28 34	12.0	— 21	$\bar{2}.915487$	— 846
Vingåker	» 20	9 52 m.	31 2 37	14.9	— 14	$\bar{2}.916278$	+ 43
Upsala I	Oct. 21	0 43 s.	30 32 13	3.8	$173^d.2$	$\bar{2}.915502$	+ 11
»	» »	0 45 s.	30 33 24	3.7	172.0	$\bar{2}.915687$	+ 196

Tableau XII. — Observations de la composante horizontale faites avec le déflecteur *A*.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.	Poids
	1892						
Upsal I	Juin 14	$7^h 26^m$ s.	$21^0 50' 5''$	$12^0.4$	$198^d.3$	—	
»	» »	7 29 s.	21 50 22	12.4	197.9	—	
»	» »	7 33 s.	21 50 43	12.4	198.4	—	
Liatorp I	Juill. 1er	10 36 m.	21 8 42	21.0	− 29	0.16852	
»	» »	10 38 m.	21 8 12	21.6	− 28	0.16857	
» II	» »	2 29 s.	21 10 22	20.9	− 3	0.16804	
Elmhult	» »	5 34 s.	20 53 7	16.8	+ 14	0.17010	
Copenhague	» 11	10 8 m.[1])	20 26 37	17.0	$-38^d.0$	—	
Malmö	» »	7 30 s.	20 20 27	16.1	+ 27	0.17421	
Kjeflinge	» 12	8 54 s.	20 5 13	13.3	+168	0.17492	
Teckomatorp	» 13	9 19 m.	20 26 26	20.8	− 74	0.17436	
Uranibourg	» 15	2 10 s.	20 32 47	18.8	− 23	0.17298	
Bäckviken	» »	5 6 s.	20 29 8	19.0	+ 5	0.17319	
Hildesborg	» 16	2 2 s.	20 14 59	16.5	+125	0.17393	
Lund I	» 20	9 46 m.	20 25 25	15.5	− 33	0.17404	
» II	» »	0 10 s.	21 0 13	20.3	− 36	0.16945	
Svedala	» 21	7 6 m.	20 27 34	15.2	− 7	0.17348	
Trelleborg	» »	10 6 m.	20 23 15	19.8	− 49	0.17446	
Klagstorp	» »	1 16 s.	20 13 54	24.7	− 21	0.17543	
Rydsgård	» 22	7 49 m.	20 6 47	16.3	− 40	0.17665	
Ystad	» »	11 36 m.	20 1 43	19.7	− 24	0.17718	
Cimbrishamn	» »	6 34 s	20 16 47	17.9	+ 6	0.17478	
Tomelilla	» 26	10 6 m.	20 40 30	22.7	− 22	0.17179	
Vollsjö	» »	3 52 s.	20 22 27	25.0	+ 29	0.17369	
Löberöd	» »	7 12 s.	20 27 18	17.6	+ 10	0.17326	
Eslöf	» 27	1 6 s.	20 32 27	23.6	− 41	0.17304	
Hör	» »	6 8 s.	20 34 10	23.2	+ 45	0.17195	
Hörby	» 28	9 40 m.	20 25 47	21.2	− 31	0.17384	
Tollarp	» »	1 51 s.	20 30 42	24.9	− 19	0.17303	
Efveröd	» »	3 44 s.	20 29 35	29.5	+ 2	0.17295	
Åhus	» »	7 14 s.	20 13 12	17.0	+ 42	0.17485	
Kristianstad	» 29	8 14 m.	20 36 34	21.9	− 12	0.17219	
Qviinge backe	» 30	1 22 s.	20 48 55	27.4	− 30	0.17069	
Vittsjö	Août 4	2 8 s.	21 4 51	15.7	− 7	0.16842	
Tyringe I	» »	7 2 s.	20 31 9	13.7	+ 35	0.17241	
» II	» »	7 56 s.	20 56 7	11.6	+ 91	0.16858	
Perstorp	» 6	7 47 s.	20 50 35	14.6	+ 13	0.17003	
Klippan II	» 7	10 15 m.	20 35 38	17.7	− 37	0.17248	
Åstorp I	» »	2 25 s.	20 51 59	17.9	0	0.16996	
» II	» »	3 14 s.	20 53 43	16.2	+ 24	0.16950	
Billesholms grufva I	» 9	6 18 m.	20 40 27	12.1	− 16	0.17164	
» » II	» »	7 14 m.	20 38 54	11.8	− 18	0.17187	

[1]) T. local.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.	Poids
	1892						
Kattarp	Août 9	$1^h 32^m$ s.	$20^0 43' 49''$	$16^0.9$	— 24	0.17124	
Höganäs nedre	» »	4 25 s.	20 43 38	14.9	+ 16	0.17088	
Grefvie I	» 11	8 12 m.	20 50 17	14.8	— 7	0.17022	
» II	» »	8 51 m.	20 48 37	16.3	— 16	0.17052	
Laholm II	» »	1 6 s.	20 48 38	16.3	— 15	0.17051	
Skallinge II	» 12	3 43 s.	21 31 37	15.5	+ 91	0.16402	
Lidhult	» »	7 21 s.	20 35 6	14.2	+135	0.17078	
Bolmen I	» 13	11 54 m.	21 2 19	17.5	— 61	0.16917	
» II	» »	2 12 s.	21 1 1	21.0	— 44	0.16915	
Ljungby	» »	5 25 s.	20 58 16	20.0	+ 11	0.16895	
Moheda	» 15	8 16 m.	21 13 6	12.9	— 25	0.16745	
Klefshult	» 16	3 54 s.	21 9 44	18.7	— 5	0.16763	
Smålandsstenar	» 18	0 27 s.	21 4 4	21.2	— 15	0.16841	
Kinnared I	» »	7 56 s.	21 21 13	13.2	+ 11	0.16604	
Ätran	» 19	5 10 m.	21 18 43	12.2	+ 5	0.16641	
Åsa I	» 23	0 2 s.	21 22 2	26.4	— 5	0.16597	
Fritsla I	» 25	9 42 m.	21 37 28	25.8	— 56	0.16459	
» II	» »	11 19 m.	21 47 19	30.0	— 58	0.16340	
Svenljunga	» »	7 47 s.	21 6 43	22.8	+ 6	0.16777	
Alingsås	» 27	4 40 s.	21 50 14	14.6	+ 11	0.16243	
Marstrand II	» 30	8 51 s.	21 38 48	15.0	+ 22	0.16364	
Hållö	Sept. 1er	6 33 m.	21 41 0	14.2	+ 10	0.16349	1/2
Fiskebäckskil	» »	3 26 s.	21 34 1	15.6	+ 6	0.16436	1/2
Grebbestad I	» 3	1 4 s.	22 10 8	14.0	— 5	0.16021	
» II	» »	5 28 s.	22 0 46	14.1	+ 3	0.16120	1/2
» III	» 4	7 17 m.	22 8 24	12.4	— 3	0.16038	1/2
Ånimskog	» 8	6 14 s.	22 1 55	15.8	+ 13	0.16090	1/2
Brålanda I	» 9	11 13 m.	21 51 16	14.4	— 21	0.16249	
» II	» »	0 20 s.	21 47 56	18.1	— 9	0.16274	1/2
Uddevalla	» 10	0 13 s.	21 48 58	14.3	— 23	0.16277	1/2
Håkantorp	» 11	6 2 s.	21 45 2	11.4	+ 23	0.16278	
Tibro	» 16	7 48 m.	21 43 44	12.1	— 16	0.16327	
Vingåker	» 20	9 45 m.	22 9 13	15.3	— 13	0.16020	
Sandhamn	» 25	4 49 s.	21 51 11	8.7	+ 1	0.16213	1/2
Upsal I	Oct. 21	1 34 s.	21 46 25	4.4	$176^d.0$	—	
»	» »	1 35 s.	21 47 3	4.4	175.9	—	

Tableau XIII. — Observations de la composante horizontale faites avec le déflecteur *B*.

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.	Poids
	1892						
Upsal I	Juin 14	7^h42^ms.	$30^0 16' 31''$	$12^0.4$	$197^d.5$	—	
»	» »	7 45 s.	30 17 37	12.4	196.7	—	
»	» »	7 47 s.	30 18 26	12.4	197.7	—	
Liatorp I	Juill. 1er	10 44 m.	29 26 17	20.7	− 27	0.16846	
»	» »	10 46 m	29 25 53	20.2	− 27	0.16853	
» II	» »	2 34 s.	29 26 49	20.9	− 2	0.16816	
Elmhult	» »	5 42 s.	29 4 13	16.8	+ 14	0.17022	
Kjeflinge	» 12	9 0 s	28 6 58	12.9	+108	0.17469	
Teckomatorp	» 13	9 26 m.	28 24 46	20.3	− 72	0.17436	
Uranibourg	» 15	2 18 s.	28 33 49	19.0	− 38	0.17324	
Bäckviken	» »	5 10 s.	28 31 24	18.4	+ 5	0.17306	
Hildesborg	» 16	2 6 s.	28 7 27	16.0	+165	0.17385	
Lund I	» 20	9 50 m.	28 26 19	16.9	− 34	0.17397	
» II	» »	0 16 s.	29 18 6	17.9	− 35	0.16924	
Svedala	» 21	7 11 m.	28 29 54	15.4	− 16	0.17354	
Trelleborg	» »	10 10 m.	28 24 4	20.1	− 47	0.17411	
Klagstorp	» »	1 20 s.	28 5 18	25.4	− 26	0.17536	
Rydsgård	» 22	7 54 m.	28 1 43	16.5	− 32	0.17629	
Ystad	» »	11 41 m.	27 48 40	19.9	− 23	0.17725	
Cimbrishamn	» »	6 39 s.	28 13 54	18.0	+ 9	0.17462	
Tomelilla	» 26	10 10 m.	28 46 5	21.7	− 16	0.17163	
Vollsjö	» »	4 0 s.	28 12 0	23.8	+ 63	0.17387	
Löberöd	» »	7 17 s.	28 24 5	16.8	+ 16	0.17362	
Eslöf	» 27	1 11 s.	28 23 26	21.4	− 42	0.17398	
Hör	» »	6 14 s.	28 26 40	19.9	+ 35	0.17300	
Hörby	» 28	9 44 m.	28 21 25	20.6	− 25	0.17404	
Tollarp	» »	1 56 s.	28 26 41	25.8	− 20	0.17319	
Åhus	» »	7 19 s.	28 6 9	17.0	+ 47	0.17498	
Kristianstad	» 29	8 20 m.	28 37 43	19.5	− 19	0.17253	
Qviinge backe	» 30	1 27 s.	28 51 7	27.4	− 28	0.17092	
Vittsjö	Août 4	2 14 s.	29 21 8	16.4	− 3	0.16860	
Tyringe I	» »	7 8 s.	28 36 29	13.3	+ 33	0.17222	
» II	» »	8 1 s.	29 9 12	10.7	+ 99	0.16846	
Klippan I	» 7	9 1 m.	28 39 11	15.8	− 39	0.17273	
» II	» »	10 8 m.	28 39 28	19.4	− 38	0.17248	
Åstorp I	» »	2 29 s.	29 5 58	15.9	+ 1	0.16990	
» II	» »	3 20 s.	29 8 11	14.7	+ 25	0.16953	
Billesholms grufva, I	» 9	6 24 m.	28 50 52	11.8	− 16	0.17165	
Höganäs nedre	» »	4 32 s.	28 53 17	14.8	+ 15	0.17094	
Engelholm	» 10	0 35 s.	28 39 41	15.5	− 29	0.17253	
Grefvie I	» 11	8 16 m.	29 1 44	15.4	− 8	0.17036	
Laholm I	» »	0 18 s.	29 10 59	18.9	− 25	0.16951	
» II	» »	1 10 s.	28 57 20	15.8	− 14	0.17079	

Stations	Date	Heure T. civil.	Angle de déviation α	Tempér. centigr. t	Variat. de la compos. ε	Valeur de H unités C.G.S.	Poids
	1892						
Skallinge II	Août 12	$3^h 50^m$ s.	$30^0\ 6'32''$	$15^0.4$	+102	0.16368	
Lidhult	» »	7 30 s.	28 35 23	14.0	+ 84	0.17190	
Bolmen I	» 13	0 1 s.	29 20 0	17.6	− 58	0.16910	
» II	» »	2 18 s.	29 13 40	20.9	− 43	0.16931	
Ljungby	» »	5 34 s.	29 14 27	19.8	+ 8	0.16880	
Alfvestad	» 15	6 44 m.	29 17 4	12.5	− 14	0.16920	
Moheda	» »	8 20 m.	29 37 1	12.4	+ 7	0.16726	
Nässjö	» 16	6 14 m.	29 19 38	13.2	+ 4	0.16874	
Klefshult	» »	4 0 s.	29 30 48	18.5	− 5	0.16755	
Smålandsstenar	» 18	0 34 s.	29 22 32	18.6	− 15	0.16835	
Kinnared I	» »	8 3 s.	29 50 50	11.3	+ 11	0.16608	
Ätran	» 19	5 16 m.	29 47 0	12.2	+ 4	0.16642	
Åsa I	» 23	0 12 s.	29 45 55	25.7	− 4	0.16578	
» II	» »	1 40 s.	29 43 46	26.6	+ 12	0.16575	
Fritsla I	» 25	9 50 m.	30 5 44	25.9	− 56	0.16462	
» II	» »	11 26 m.	30 19 35	28.0	− 54	0.16335	
Svenljunga	» »	7 53 s.	29 27 0	22.6	+ 7	0.16744	1/4
Alingsås	» 27	4 46 s.	30 34 22	14.8	+ 10	0.16224	1/2
Partilled	» 29	9 15 m.	30 4 56	11.2	− 1	0.16493	1/2
Hållö	Sept. 1er	6 43 m.	30 24 5	14.0	+ 6	0.16311	1/2
Fiskebäckskil II	» »	3 31 s.	30 10 40	15.6	+ 6	0.16411	1/2
Grebbestad I	» 3	1 10 s.	31 5 5	14.3	− 4	0.15994	
» II	» »	5 36 s.	30 51 7	13.8	+ 2	0.16099	1/2
» III	» 4	7 24 m.	31 2 58	12.6	− 5	0.16020	1/2
Ånimskog	» 8	6 20 s.	30 53 27	15.8	+ 14	0.16053	1/2
Brålanda I	» 9	11 19 m.	30 38 8	14.7	− 20	0.16213	
» II	» »	0 24 s.	30 32 4	18.1	− 8	0.16231	1/2
Uddevalla	» 10	0 18 s.	30 36 34	15.0	− 21	0.16224	1/2
Håkanstorp	» 11	6 10 s.	30 31 52	11.0	+ 24	0.16238	
Mullsjö II	» 15	9 44 m.	29 10 40	13.7	− 19	0.16945	1/2
Tibro	» 16	7 55 m.	30 28 34	12.0	− 21	0.16300	
Vingåker	» 20	9 52 m.	31 2 37	14.9	− 14	0.16004	
Sandhamn	» 25	4 56 s.	30 39 49	9.3	0	0.16195	1/2
Upsal I	Oct. 21	0 43 s.	30 32 13	3.8	$173^d.2$	—	
»	» »	0 45 s.	30 33 24	3.7	172.0	—	

Tableau XIV. — Détermination des corrections des aiguilles d'inclinaisons dues au défaut d'équilibration.

Observations faites à Upsal le 12 juin 1892.

		Heure T. local	Inclinaison observée	Variat. de l'inclin.	Inclinaison corrigée de la variat.		
Aiguille n° 1	1ère aim.	0^h20^ms.	$70^0 46'.7$	+0'.1	$70^0 46'.6$		
	2e »	0 45 s.	70 52.0	+0.0	70 52.0		*Résumé:*
	3e »	1 10 s.	70 43.3	+0.0	70 43.3		Extrémité A en haut $70^0 48'.1$
	4e »	1 30 s.	70 51.8	+0.0	70 51.8		» B » 70 51.3
	5e »	1 48 s.	70 48.1	+0.1	70 48.0		Inclinaison conclue 70 49.7
	6e »	2 18 s.	70 49.6	−0.6	70 50.2		
	7e »	2 42 s.	70 53.5	−1.2	70 54.7		
	» »	3 0 s.	70 53.1	−1.4	70 54.5	$70^0 54'.6$	
	» »	4 12 s.	70 52.6	−2.1	70 54.7		
Aiguille n° 2	1ère aim.	4^h23^ms.	$70^0 48'.0$	−2'.1	$70^0 50'.1$		
	2e »	4 36 s.	70 49.5	−1.8	70 51.3		
	3e »	4 49 s.	70 43.3	−1.8	70 45.1		*Résumé:*
	4e »	5 2 s.	70 52.5	−1.7	70 54.2		Extrémité A en haut $70^0 48'.5$
	5e »	5 17 s.	70 47.7	−1.4	70 49.1		» B » 70 53.1
	6e »	5 32 s.	70 52.7	−1.2	70 53.9		
	7e »	5 46 s.	70 48.0	−1.2	70 49.2		Inclinaison conclue 70 50.8
	» »	5 58 s.	70 48.7	−1.3	70 50.0	$70^0 49'.6$	
	» »	6 9 s.	70 48.2	−1.3	70 49.5		

Moyenne définitive de l'inclinaison . . . . . = $70^0 50'.2$.

Observations faites à Lund le 18 juillet 1892.

T. civil.

Aiguille n° 1	1ère aim.	10^h24^mm.	$68^0 49'.4$	+6'.0	$68^0 43'.4$		
	» »	10 42 m.	68 49.9	+6.2	68 43.7	$68^0 43'.5$	
	» »	10 56 m.	68 49.7	+6.4	68 43.3		*Résumé:*
	2e »	11 10 m.	68 52.2	+6.5	68 45.7		Extrémité A en haut $68^0 44'.1$
	3e »	11 23 m.	68 49.7	+6.6	68 43.5		» B » 68 46.5
	4e »	11 39 m.	68 53.2	+5.8	68 47.4		
	5e »	11 58 m.	68 50.4	+5.3	68 45.1		Inclinaison conclue 68 45.3
	» »	0 12 s.	68 50.9	+5.0	68 45.9	$68^0 45'.3$	
	» »	0 22 s.	68 49.5	+4.5	68 45.0		
Aiguille n° 2	1ère aim.	0^h36^ms.	$68^0 49'.0$	+4'.0	$68^0 45'.0$		
	» »	0 50 s.	68 50.4	+3.2	68 47.2	$68^0 46'.6$	
	» »	1 4 s.	68 50.3	+2.7	68 47.5		*Résumé:*
	2e »	1 18 s.	68 53.0	+2.4	68 50.6		Extrémité A en haut $68^0 43'.4$
	3e »	1 32 s.	68 43.1	+2.5	68 40.5		» B » 68 48.4
	4e »	1 49 s.	68 48.7	+2.5	68 46.2		
	5e »	2 2 s.	68 45.2	+2.6	68 42.6		Inclinaison conclue $68^0 45.9$
	» »	2 13 s.	68 43.7	+2.5	68 41.2	$68^0 43'.1$	
	» »	2 22 s.	68 47.8	+2.3	68 45.5		

Moyenne définitive de l'inclinaison . . . . . = $68^0 45'.6$.

(L'aiguille d'inclinaison était très agitée pendant les cinq dernières observations avec l'aiguille n° 2.)

Observations faites à Qviinge backe, le 30 juillet 1892.

		Heure T. civil.	Inclinaison observée	Variat. de l'inclin.	Inclinaison corrigée de la variat.		
Aiguille n° 1	1ère aim.	6h 0m s.	69° 7′.5	−1′.6	69° 9′.1	69° 9′.2	*Résumé:*
	» »	6 10 s.	69 7.6	−1.7	69 9.3		Extrémité A en haut 69° 9′.3
	2e »	6 25 s.	69 11.2	−1.3	69 12.5		» B » 69 12.5
	3e »	6 39 s.	69 8.3	−1.0	69 9.3		
	4e »	6 51 s.	69 11.8	−0.7	69 12.5		Inclinaison conclue 69 10.9
	5e »	7 3 s.	69 8.2	−0.4	69 8.6	69° 9′.4	
	» »	7 12 s.	69 9.8	−0.2	69 10.0		
	» »	7 23 s.	69 9.4	−0.3	69 9.7		
Aiguille n° 2	1ère aim.	7h 34m s.	69° 9′.0	−0.4	69° 9′.4	69° 8′.9	*Résumé:*
	» »	7 45 s.	69 8.0	−0.4	69 8.4		Extrémité A en haut 69° 9′.2
	2e »	7 57 s.	69 12.1	−0.5	69 12.6		» B » 69 12.6
	3e »	8 7 s.	69 8.9	−0.6	69 9.5	69° 9′.4	
	» »	8 16 s.	69 8.7	−0.6	69 9.3		Inclinaison conclue 69 10.9

Moyenne définitive de l'inclinaison . . . . . = 69°10′.9.

Observation faite à Fröslida le 19 août 1892.

Aiguille n° 1	1ère aim.	3h 0m s.	69°35′.7	−0′.2	69°35′.9	69°35′.8	*Résumé:*
	» »	3 12 s.	69 35.5	−0.3	69 35.8		Extrémité A en haut 69°36′.8
	2e »	3 28 s.	69 41.4	−0.4	69 41.8		» B » 69 42.8
	3e »	3 44 s.	69 37.3	−0.6	69 37.9		
	4e »	3 57 s.	69 43.1	−0.7	69 43.8		Inclinaison conclue 69 39.8
	5e »	4 10 s.	69 36.8	−0.8	69 37.6	69°36′.8	
	» »	4 17 s.	69 35.2	−0.8	69 36.0		

Observation faite à Getinge le 21 août 1892.

Aiguille n° 2	1ère aim.	9h 28m m.	69°49′.6	+ 1′.9	69°47′.7	69°47′.8	*Résumé:*
	» »	9 40 m.	69 48.2	+ 2.0	69 46.2		Extrémité A en haut 69°48′.1
	» »	9 52 m.	69 51.6	+ 2.1	69 49.5		» B » 69 53.3
	2e »	10 6 m.	69 55.2	+ 2.2	69 53.0		
	3e »	10 20 m.	69 50.8	+ 2.2	69 48.6		Inclinaison conclue 69 50.7
	4e »	10 32 m.	69 56.0	+ 2.3	69 53.7		
	5e »	10 47 m.	69 50.5	+ 2.3	69 48.2	69°47′.8	
	» »	10 56 m.	69 49.8	+ 2.3	69 47.5		

Observations faites à Upsal le 24—25 octobre 1892.

		Heure T. civil.	Inclinaison observée	Variat. de l'inclin.	Inclinaison corrigée de la variat.		
Aiguille n° 1	1ère aim.	11h 6m m.	70°48′.2	+1′.5	70°46′.7	70°47′.1	*Résumé:*
	» »	0 34 s.	70 48.7	+1.2	70 47.5		Extrémité A en haut 70°47′.0
	2e »	0 46 s.	70 54.8	+1.4	70 53.4		» B » 70 53.1
	3e »	0 55 s.	70 48.2	+1.3	70 46.9		
	4e »	10 30 m.	70 55.7	+2.3	70 53.4	70°52′.8	Inclinaison conclue 70 50.0
	» »	10 40 m.	70 54.8	+2.6	70 52.2		
Aiguille n° 2	1ère aim.	10h52m m.	70°45′.3	+2′.8	70°42′.5	70°48′.6	*Résumé:*
	» »	11 2 m.	70 51.7	+2.6	70 49.1		Extrémité A en haut 70°46′.7
	» »	11 8 m.	70 56.7	+2.5	70 54.2		» B » 70 55.0
	2e »	11 16 m.	71 0.6	+2.5	70 58.1		
	3e »	11 30 m.	70 47.4	+2.6	70 44.8		
	4e »	11 40 m.	70 55.0	+2.3	70 52.7	70°51′.9	Inclinaison conclue 70 50.8
	» »	11 48 m.	70 53.1	+2.1	70 51.0		

Valeur définitive de l'inclinaison . . . . . = 70°50′.4.

Tableau XV. — Observations de l'inclinaison magnétique.

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\theta$	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Gustafsberg	Juin 20	6h32ms.	1	+70°44′.4		−3′.0	−2′.6	+70°44′.0	+70°42′.2
»	» »	6 52 s.	2	+70 37.2		+0.2	−3.1	+70 40.5	
Udden	» 21	2 2 s.	1	+71 21.1		−2.8	−0.9	+71 19.2	+71 19.2
Dalarö	» 23	1 40 s.	1	+70 32.2		−2.4	−0.5	+70 30.3	+70 29.0
»	» »	2 54 s.	2	+70 27.0		+0.1	−0.7	+70 27.8	
Jutholmen	» »	4 24 s.	2	+70 27.0		+0.1	−2.1	+70 29.2	+70 29.2
Norrköping	» 25	11 33 m.	2	+70 33.5		0.0	+2.1	+70 31.4	+70 32.6
»	» »	11 51 m.	1	+70 37.5		−2.1	+1.5	+70 33.9	
Liatorp	Juill. 1er	0 12 s.	1	+69 46.0		−1.0	+1.7	+69 43.3	+69 41.2
»	» »	0 28 s.	2	+69 40.6		−0.3	+1.1	+69 39.2	
Malmö	» 11	8 0 s.	1	+68 46.2		+0.8	−1.3	+68 48.3	+68 46.0
»	» »	8 13 s.	2	+68 42.9		−0.7	−1.4	+68 43.6	
Kjeflinge	» 12	9 28 s.	1	+68 43.5		+1.0	−1.5	+68 46.0	+68 45.1
»	» 13	7 22 m.	2	+68 51.7		−0.8	+7.8	+68 43.1	
»	» »	7 30 m.	1	+68 53.9		+1.2	+9.0	+68 46.1	
Teckomatorp	» »	9 44 m.	1	+68 54.4		+1.2	+6.4	+68 49.2	+68 49.2
»	» »	9 51 m.	2	+68 56.4		−0.8	+6.4	+68 49.2	

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\theta$	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Landskrona	Juill. 13	$1^h 21^m$ s.	1	$+68^0 54'.0$		$+1'.2$	$+1'.7$	$+68^0 53'.5$	$+68^0 53'.4$
»	» »	1 40 s.	2	+68 54.8		−0.8	+0.8	+68 53.2	
Uranibourg	» 15	2 39 s.	1	+68 58.5		+1.5	+1.8	+68 58.2	+68 57.2
»	» »	2 52 s.	2	+68 58.8		−0.9	+1.6	+68 56.3	
Hildesborg	» 16	2 30 s.	1	+68 46.5		+1.7	−7.1	+68 55.3	+68 54.2
»	» »	2 44 s.	2	+68 49.2		−0.9	−4.9	+68 53.2	
Svedala	» 21	7 28 m.	1	+69 12.4		+0.6	+0.6	+69 12.4	+69 13.6
»	» »	7 36 m.	2	+69 13.1		+2.4	+0.7	+69 14.8	
Trelleborg	» »	10 24 m.	1	+68 48.7		+0.6	+3.1	+68 46.2	+68 46.2
»	» »	10 31 m.	2	+68 46.8		+2.4	+3.0	+68 46.2	
Klagstorp	» »	1 48 s.	1	+68 42.8		+0.6	+0.6	+68 42.8	+68 43.8
»	» »	2 0 s.	2	+68 42.9		+2.4	+0.5	+68 44.8	
Rydsgård	» 22	8 20 m.	1	+68 39.1		+0.7	+2.2	+68 37.6	+68 40.0
»	» »	8 30 m.	2	+68 42.7		+2.3	+2.7	+68 42.3	
Ystad	» »	11 59 m.	1	+68 21.5		+0.7	+1.6	+68 20.6	+68 20.6
Cimbrishamn	» »	7 0 s.	1	+68 46.6		+0.7	+0.6	+68 46.7	+68 46.3
»	» »	7 11 s.	2	+68 44.2		+2.3	+0.6	+68 45.9	
Tomelilla	» 26	11 37 m.	1	+69 7.9		+1.2	+6.1	+69 3.0	+69 4.6
»	» »	11 48 m.	2	+69 10.9		+2.2	+6.8	+69 6.3	
Vollsjö	» »	4 29 s.	1	+68 49.0		+1.2	−1.1	+68 51.3	+68 52.9
»	» »	4 37 s.	2	+68 51.6		+2.2	−0.7	+68 54.5	
Löberöd	» »	7 42 s.	1	+69 2.8		+1.2	+1.5	+69 2.5	+69 2.8
»	» »	7 57 s.	2	+69 2.5		+2.2	+1.6	+69 3.1	
Eslöf	» 27	2 45 s.	1	+69 3.4		+1.3	+0.8	+69 3.9	+69 4.6
»	» »	2 56 s.	2	+69 3.8		+2.1	+0.5	+69 5.4	
Hör	» »	6 32 s.	1	+69 3.1		+1.3	−1.0	+69 5.4	+69 5.9
»	» »	6 42 s.	2	+69 3.5		+2.1	−0.8	+69 6.4	
Hörby	» 28	9 59 m.	1	+68 55.4		+1.4	+2.8	+68 54.0	+68 54.4
»	» »	10 9 m.	2	+68 55.4		+2.1	+2.8	+68 54.7	
Tollarp	» »	2 14 s.	1	+69 0.0		+1.4	−0.4	+69 1.8	+69 2.0
»	» »	2 24 s.	2	+68 59.6		+2.1	−0.4	+69 2.1	
Åhus	» »	6 47 s.	1	+68 46.6		+1.4	−1.0	+68 49.0	+68 49.0
»	» »	6 57 s.	2	+68 45.4		+2.1	−1.4	+68 48.9	
Kristianstad	» 29	8 34 m.	1	+69 2.0		+1.5	+0.9	+69 2.6	+69 2.7
»	» »	8 40 m.	2	+69 1.7		+2.0	+0.9	+69 2.8	
Sölvesborg	» »	0 19 s.	1	+69 15.9		+1.5	+2.5	+69 14 9	+69 15.6
»	» »	0 30 s.	2	+69 16.8		+2.0	+2.4	+69 16.4	
Hästveda	Août 3	1 18 s.	1	+69 15.2		+2.0	+0.6	+69 16.6	+69 16.8
»	» »	1 29 s.	2	+69 15.7		+1.8	+0.4	+69 17.1	
Vittsjö	» 4	2 34 s.	1	+69 30.2		+2.1	0.0	+69 32.3	+69 32.7
»	» »	2 42 s.	2	+69 30.9		+1.8	−0.4	+69 33.1	
Tyringe I	» »	7 28 s.	1	+69 1.8		+2.1	−1.7	+69 5.6	+69 5.8
»	» »	7 36 s.	2	+69 1.8		+1.8	−2.3	+69 5.9	
» II	» »	8 18 s.	1	+69 23.0		+2.1	−5.0	+69 30.1	+69 30.1
Perstorp	» 6	8 14 s.	1	+69 28.2		+2.4	−1.0	+69 31.6	+69 30.2
»	» »	8 24 s.	2	+69 25.7		+2.0	−1.1	+69 28.8	

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. Δi	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Klippan I	Août 7	$9^h 32^m$ m.	1	+69° 1'.2		+2'.5	+2'.5	+69° 1'.2	+69° 1'.0
»	» »	9 44 m.	2	+69 1.2		+2.0	+2.4	+69 0.8	
» II	» »	10 26 m.	1	+69 2.1		+2.5	+2.2	+69 2.4	+69 3.4
»	» »	10 32 m.	2	+69 4.4		+2.0	+2.1	+69 4.3	
Åstorp I	» »	2 50 s.	1	+69 26.5		+2.5	−0.9	+69 29.9	+69 30.0
»	» »	2 59 s.	2	+69 26.8		+2.0	−1.2	+69 30.0	
» II	» »	3 34 s.	1	+69 26.7		+2.5	−1.8	+69 31.0	+69 31.4
»	» »	3 46 s.	2	+69 27.8		+2.0	−2.0	+69 31.8	
Billesholms grufva I	» 9	6 47 m.	1	+69 11.8		+2.7	+1.0	+69 13.5	+69 13.4
» »	» »	6 57 m.	2	+69 12.2		+2.1	+1.0	+69 13.3	
Kattarp	» »	2 20 s.	1	+69 20.0		+2.7	+0.7	+69 22.0	+69 22.0
Höganäs	» »	6 28 s.	1	+69 24.4		+2.7	−1.5	+69 28.6	+69 22.8[1]
»	» »	6 35 s.	2	+69 13.3		+2.1	−1.5	+69 16.9	
Engelholm	» 10	1 8 s.	1	+69 9.5		+2.9	+1.0	+69 11.4	+69 11.3
»	» »	1 18 s.	2	+69 10.0		+2.2	+1.0	+69 11.2	
Engelholms hamn	» »	6 55 s.	1	+69 16.3		+2.9	−0.1	+69 19.3	+69 19.4
»	» »	7 3 s.	2	+69 17.2		+2.2	−0.1	+69 19.5	
Grefvie I	» 11	8 37 m.	1	+69 31.0		+3.0	+1.0	+69 33.0	+69 33.0
»	» »	8 43 m.	2	+69 31.9		+2.3	+1.1	+69 33.1	
Laholm I	» »	0 35 s.	1	+69 22.4		+3.0	+1.4	+69 24.0	+69 23.8
»	» »	0 44 s.	2	+69 22.5		+2.3	+1.2	+69 23.6	
» II	» »	1 28 s.	1	+69 20.1		+3.0	+0.7	+69 22.4	+69 22.4
Eldsberga	» »	5 19 s.	1	+69 34.2		+3.0	−0.7	+69 37.9	+69 39.0
»	» »	5 27 s.	2	+69 37.1		+2.3	−0.7	+69 40.1	
Skallinge I	» 12	2 55 s.	1	+69 51.5		+3.1	−2.4	+69 57.0	+69 57.2[2]
»	» »	3 8 s.	2	+69 52.5		+2.3	−2.5	+69 57.3	
» II	» »	4 3 s.	1	+69 59.3		+3.1	−7.7	+70 10.1	+70 10.1[2]
Lidhult	» »	7 52 s.	1	+69 25.7		+3.1	+2.1	+69 26.7	[3]
»	» »	8 3 s.	2	+69 31.4		+2.3	+4.8	+69 28.9	
»	» 13	8 18 m.	1	+69 40.8		+3.3	+7.5	+69 36.6	+69 37.7
»	» »	8 26 m.	2	+69 43.9		+2.4	+7.5	+69 38.8	
Bolmen I	» »	1 12 s.	1	+69 33.6		+3.3	+4.0	+69 32.9	+69 33.2
»	» »	1 24 s.	2	+69 35.1		+2.4	+4.0	+69 33.5	
» II	» »	2 32 s.	1	+69 36.4		+3.3	+3.8	+69 35.9	+69 35.9
Ljungby	» »	6 2 s.	1	+69 29.7		+3.3	+1.1	+69 31.9	+69 32.6
»	» »	6 13 s.	2	+69 32.0		+2.4	+1.2	+69 33.2	
Tutaryd	» 14	1 6 s.	1	+69 36.3		+3.4	−3.3	+69 43.0	+69 42.1
»	» »	1 19 s.	2	+69 35.7		+2.5	−3.0	+69 41.2	
Alfvestad	» 15	6 59 m.	1	+69 33.3		+3.5	+1.3	+69 35.5	+69 35.5
Moheda	» »	8 52 m.	1	+69 43.4		+3.5	+2.5	+69 44.4	+69 44.4

[1]) Je n'ai pu découvrir la cause de la divergence entre les valeurs obtenues à l'aide des deux aiguilles: c'est possible que l'aiguille reposait sur des parties inégalement épaisses de l'axe d'un côté et de l'autre. Or, la moyenne des deux aiguilles s'accordant bien avec l'inclinaison à Engelholms hamn et à Kattarp, où la composante horizontale est la même qu'à Höganäs, je l'adopte sans hésitation.

[2]) État magnétique troublé.

[3]) Perturbation magnétique très importante. L'inclinaison a varié de 13'.7.

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\theta$	Variat. de l'inclin. ϵ	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Lamhult	Août 15	$2^h 34^m$ s.	1	$+69^0 45'.2$		$+3'.5$	$-0'.7$	$+69^0 49'.4$	$+69^0 48'.6$
»	» »	2 42 s.	2	+69 44.6		+2.5	−0.6	+69 47.7	
Nässjö	» 16	8 30 m.	1	+69 38.6		+3.6	+1.5	+69 40.7	+69 40.7
Hook	» »	0 0 s.	1	+69 46.4		+3.6	+1.4	+69 48.6	+69 48.8
»	» »	0 9 s.	2	+69 47.5		+2.6	+1.2	+69 48.9	
Klefshult	» »	5 2 s.	1	+69 43.7		+3.6	+0.4	+69 46.9	+69 47.6
»	» »	5 13 s.	2	+69 46.1		+2.6	+0.5	+69 48.2	
Kärda	» 17	1 3 s.	1	+69 33.8		+3.7	+1.0	+69 36.5	+69 38.8
»	» »	1 22 s.	2	+69 37.2		+2.7	+0.8	+69 39.1	
»	» »	1 32 s.	2	+69 38.6		+2.7	+0.6	+69 40.7	
Refteled	» 18	9 32 m.	1	+69 40.2		+3.9	+1.9	+69 42.2	+69 43.2
»	» »	9 42 m.	2	+69 43.5		+2.7	+2.0	+69 44.2	
Smålandsstenar	» »	0 58 s.	1	+69 43.3		+3.9	+0.5	+69 46.7	+69 47.2
»	» »	1 9 s.	1	+69 43.5		+3.9	+0.5	+69 46.9	
»	» »	1 25 s.	2	+69 45.8		+2.7	+0.5	+69 48.0	
Ätran	» 19	5 34 m.	1	+69 50.4		+3.9	0.0	+69 54.3	+69 54.3
Kinnared II	» »	10 24 m.	1	+70 8.7		+3.9	+1.7	+70 10.9	+70 10.6
»	» »	10 32 m.	2	+70 9.1		+2.8	+1.7	+70 10.2	
» I	» »	10 56 m.	1	+70 12.2		+3.9	+1.6	+70 14.5	+70 14.5
Sennan	» 20	9 0 m.	1	+69 33.7		+3.0	+0.8	+69 35.9	+69 36.4
»	» »	9 10 m.	2	+69 35.0		+2.9	+1.0	+69 36.9	
Halmstad	» »	0 24 s.	1	+69 26.6		+3.0	+0.1	+69 29.5	+69 31.2
»	» »	0 38 s.	2	+69 29.6		+2.9	−0.3	+69 32.8	
Getinge	» 21	9 14 m.	1	+69 50.0	1	+3.0	+1.9	+69 51.1	+69 50.8
»	» »	»	2	»	5	»	»	+69 50.7	
Falkenberg	» »	3 12 s.	1	+69 46.8		+3.0	−0.6	+69 50.4	+69 49.9
»	» »	3 23 s.	2	+69 45.8		+2.9	−0.7	+69 49.4	
Varberg	» »	7 20 s.	1	+69 59.1		+3.0	−1.2	+70 3.3	+70 2.4
»	» »	7 30 s.	2	+69 57.5		+2.9	−1.2	+70 1.6	
Backa	» 23	8 2 m.	1	+70 11.9		+3.0	+0.2	+70 14.7	+70 15.7
»	» »	8 16 m.	2	+70 14.2		+2.9	+0.4	+70 16.7	
Åsa I	» »	0 58 s.	1	+70 1.4		+3.0	−0.6	+70 5.0	+70 4.0
»	» »	1 12 s.	2	+69 59.4		+2.9	−0.7	+70 3.0	
» II	» »	1 54 s.	1	+70 0.7		+3.0	−1.0	+70 4.7	+70 4.7
Kongsbacka	» »	5 12 s.	1	+70 8.7		+3.0	−1.1	+70 12.8	+70 12.7
»	» »	5 22 s.	2	+70 8.5		+2.9	−1.2	+70 12.6	
Veddige	» 24	7 56 m.	1	+70 9.1		+3.0	+0.5	+70 11.6	+70 11.2
»	» »	8 14 m.	2	+70 8.6		+2.9	+0.6	+70 10.9	
Björketorp	» 25	6 13 m.	1	+69 55.0		+3.0	+0.3	+69 57.7	+69 58.2
»	» »	6 19 m.	2	+69 56.4		+2.8	+0.4	+69 58.8	
Fritsla I	» »	10 8 m.	1	+70 14.6		+3.0	+3.3	+70 14.3	+70 14.4
»	» »	10 20 m.	2	+70 15.2		+2.8	+3.4	+70 14.6	
» II	» »	11 46 m.	1	+70 29.2		+3.0	+2.3	+70 29.9	+70 29.9
Borås	» »	4 14 s.	1	+70 3.2		+3.0	+0.3	+70 5.9	+70 6.2
»	» »	4 24 s.	2	+70 4.0		+2.8	+0.3	+70 6.5	
Svenljunga	» »	7 21 s.	1	+69 49.3		+3.0	−0.2	+69 52.5	+69 52.4
»	» »	7 30 s.	2	+69 49.2		+2.8	−0.3	+69 52.3	

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\vartheta$	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Borgstena	Août 26	5h36ms.	1	+69°59'.3		+3'.0	−1'.1	+70° 3'.4	+70° 4'.6
»	» »	5 44 s.	2	+70 2.0		+2.8	−1.1	+70 5.9	
Herrljunga	» 27	6 44 m.	1	+70 21.1		+3.0	+0.6	+70 23.5	+70 24.6
»	» »	6 54 m.	2	+70 23.5		+2.8	+0.6	+70 25.7	
Lagmansholm	» »	10 42 m.	1	+70 27.2		+3.0	+1.3	+70 28.9	+70 29.8
»	» »	10 53 m.	2	+70 29.2		+2.8	+1.3	+70 30.7	
Alingsås	» »	5 58 s.	1	+70 33.1		+3.0	−0.8	+70 36.9	+70 36.9
Lerum	» »	7 21 s.	1	+70 2.8		+3.0	−1.7	+70 7.5	+70 8.2
»	» »	7 34 s.	2	+70 4.4		+2.8	−1.7	+70 8.9	
Partilled	» 29	9 55 m.	1	+70 9.5		+3.0	−0.6	+70 13.1	+70 13.4
»	» »	10 6 m.	2	+70 10.5		+2.8	−0.5	+70 13.8	
Marstrand I	» 30	7 20 s.	1	+70 10.9		+3.1	−2.2	+70 16.2	+70 17.6
»	» »	7 30 s.	2	+70 14.0		+2.8	−2.2	+70 19.0	
Hållö	Sept. 1er	7 0 m.	1	+70 41.7		+3.1	+0.2	+70 44.6	+70 44.4
»	» »	7 11 m.	2	+70 41.9		+2.7	+0.4	+70 44.2	
Lysekil	» »	1 12 s.	1	+70 25.0		+3.1	−0.6	+70 28.7	+70 25.7
»	» »	1 30 s.	2	+70 21.0		+2.7	−0.6	+70 24.3	
»	» »	1 52 s.	1	+70 22.4		+3.1	−0.7	+70 26.2	
»	» »	1 59 s.	2	+70 20.1		+2.7	−0.7	+70 23.5	
Fiskebäckskil II	» »	3 43 s.	1	+70 15.9		+3.1	+0.7	+70 18.3	+70 22.6[1]
»	» »	3 49 s.	2	+70 24.8		+2.7	+0.7	+70 26.8	
Grebbestad I	» 3	2 32 s.	1	+70 54.4		+3.1	−0.5	+70 58.0	+70 58.4
»	» »	2 44 s.	2	+70 55.8		+2.7	−0.4	+70 58.9	
» II	» »	5 54 s.	1	+70 48.9		+3.1	+0.2	+70 51.8	+70 52.1
»	» »	6 4 s.	2	+70 50.0		+2.7	+0.3	+70 52.4	
» III	» 4	7 42 m.	1	+70 52.4		+3.1	+0.8	+70 54.7	+70 54.7
Fjellbacka	» »	2 7 s.	1	+70 50.9		+3.1	−1.2	+70 55.2	+70 56.4
»	» »	2 18 s.	2	+70 53.7		+2.7	−1.2	+70 57.6	
Strömstad	» 5	11 24 m.	1	+71 2.7		+3.1	+0.4	+71 5.4	+71 6.7
»	» »	11 39 m.	2	+71 5.5		+2.7	+0.2	+71 8.0	
Nord-Koster	» »	4 14 s.	1	+70 47.1		+3.1	−0.5	+70 50.7	+70 50.8
»	» »	4 24 s.	2	+70 47.8		+2.7	−0.5	+70 51.0	
Fredrikshald	» 6	11 39 m.	1	+71 26.3		+3.1	+0.9	+71 28.5	+71 29.0
»	» »	11 49 m.	2	−71 27.6		−2.7	−0.8	−71 29.5	
Kornsö	» »	4 59 s.	1	+70 55.9		+3.1	−1.1	+71 0.1	+71 0.3
»	» »	5 10 s.	2	+70 57.0		+2.7	−0.8	+71 0.5	
Hökedalen	» 7	11 14 m.	1	+70 51.4		+3.1	+0.2	+70 54.3	+70 54.6
»	» »	11 24 m.	2	+70 52.3		+2.6	0.0	+70 54.9	
Vestra Ed	» »	2 57 s.	1	+70 52.4		+3.1	−1.0	+70 56.5	+70 57.6
»	» »	3 6 s.	2	+70 55.1		+2.6	−1.0	+70 58.7	
Bäckefors	» »	6 55 s.	1	+70 44.3		+3.1	−1.1	+70 48.5	+70 49.1
»	» »	7 5 s.	2	+70 46.0		+2.6	−1.1	+70 49.7	
Mellerud	» 8	10 35 m.	1	+70 43.6		+3.1	+1.2	+70 45.5	+70 46.4
»	» »	10 47 m.	2	+70 45.6		+2.6	+1.0	+70 47.2	
Åmål	» »	2 44 s.	1	+70 50.8		+3.1	−0.3	+70 54.2	+70 53.4
»	» »	2 55 s.	2	+70 49.8		+2.6	−0.3	+70 52.7	

[1]) L'aiguille n. 2 présente plusieurs positions d'équilibre différentes.

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\theta$	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Ånimskog	Sept. 9	5^h52^mm.	1	$+70^0 46'.0$		$+3'.1$	$-0'.1$	$+70^0 49'.2$	$+70^0 52'.2$
»	» »	6 4 m.	2	+70 52.6		+2.6	−0.1	+70 55.3	
Brålanda I	» »	9 50 m.	1	+70 30.2		+3.1	+1.3	+70 32.0	+70 32.8
»	» »	11 44 m.	2	+70 32.1		+2.6	+1.1	+70 33.6	
» II	» »	0 34 s.	1	+70 36.2		+3.1	+0.3	+70 39.0	+70 39.0
Upphärad	» »	6 46 s.	1	+70 23.6		+3.1	−0.2	+70 26.9	+70 25.8
»	» »	6 56 s.	2	+70 21.9		+2.6	−0.2	+70 24.7	
Eltängen	» 10	8 27 m.	1	+70 26.2		+3.1	+2.4	+70 26.9	+70 26.8
»	» »	8 35 m.	2	+70 26.5		+2.6	+2.4	+70 26.7	
Uddevalla	» »	0 32 s.	1	+70 20.4		+3.1	+0.8	+70 22.7	+70 22.7
Venersborg	» »	6 49 s.	1	+70 25.0		+3.1	−0.8	+70 28.9	+70 30.2
»	» »	6 58 s.	2	+70 28.1		+2.6	−0.8	+70 31.5	
Salstad	» 11	9 44 m.	1	+70 35.6		+3.1	$-2.4i$	+70 41.1	+70 39.9
»	» »	9 56 m.	2	+70 33.7		+2.6	$-2.4i$	+70 38.7	
Håkantorp	» »	6 40 s.	1	+70 35.7		+3.1	+0.1	+70 38.7	+70 38.7[1]
»	» »	6 53 s.	2	+70 36.7		+2.6	+0.6	+70 38.7	
Lidköping	» 12	0 18 s.	1	+70 51.3		+3.1	+2.2	+70 52.2	+70 52.2
»	» »	0 27 s.	2	+70 51.6		+2.6	+2.1	+70 52.1	
Skara	» »	6 16 s.	1	+70 28.6		+3.1	+0.6	+70 31.1	+70 27.9
»	» »	6 24 s.	2	+70 22.6		+2.6	+0.5	+70 24.7	
Stenstorp	» 13	2 32 s.	1	+70 24.4		+3.1	+1.5	+70 26.0	+70 27.1
»	» »	2 42 s.	2	+70 27.1		+2.6	+1.5	+70 28.2	
Falköping	» 14	10 16 m.	1	+70 18.4		+3.1	+0.4	+70 21.1	+70 21.7
»	» »	10 26 m.	2	+70 20.2		+2.5	+0.4	+70 22.3	
Kettilstorp I	» »	3 20 s.	1	+69 59.3		+3.1	+1.1	+70 1.3	+70 1.2
»	» »	3 30 s.	2	+69 59.7		+2.5	+1.1	+70 1.1	
» II	» »	5 36 s.	1	+69 59.6		+3.1	+1.5	+70 1.2	+70 1.4
»	» »	5 44 s.	2	+70 0.6		+2.5	+1.4	+70 1.7	
Mullsjö I	» 15	8 49 m.	1	+70 10.2		+3.1	+0.4	+70 12.9	+70 11.9
»	» »	8 57 m.	2	+70 9.1		+2.5	+0.7	+70 10.9	
» II	» »	9 22 m.	1	+70 15.6		+3.1	+1.1	+70 17.6	+70 17.6
Sköfde	» »	2 42 s.	1	+70 31.6		+3.1	+0.4	+70 34.3	+70 34.1
»	» »	2 54 s.	2	+70 31.9		+2.5	+0.5	+70 33.9	
Tibro	» 16	9 44 m.	1	+70 28.7		+3.1	+1.2	+70 30.6	+70 31.0
»	» »	9 58 m.	2	+70 30.3		+2.5	+1.4	+70 31.4	
Rödesund	» 17	9 44 m.	1	+70 25.4		+3.1	+3.0	+70 25.5	+70 26.3
»	» »	9 52 m.	2	+70 27.8		+2.5	+3.2	+70 27.1	
Motala	» 18	0 39 s.	1	+70 29.3		+3.1	+0.3	+70 32.1	+70 32.1
»	» »	0 51 s.	2	+70 29.8		+2.5	+0.2	+70 32.1	
Godegård	» 19	6 8 m.	1	+70 30.2		+3.2	−1.3	+70 34.7	+70 34.8
»	» »	6 17 m.	2	+70 31.0		+2.5	−1.4	+70 34.9	
Lerbäck	» »	10 56 m.	1	+70 39.9		+3.2	−0.2	+70 43.3	+70 43.3
Hallsberg	» »	2 39 s.	1	+71 1.4		+3.2	$0.0i$	+71 4.6	+71 5.8
»	» »	2 50 s.	2	+71 4.8		+2.5	$+0.2i$	+71 7.1	
Kilsmo	» »	5 26 s.	1	+70 44.3		+3.2	$-0.3i$	+70 47.8	+70 48.8
»	» »	5 34 s.	2	+70 46.9		+2.5	$-0.4i$	+70 49.8	

[1]) Un peu agité.

Stations	Date	Heure T. civil.	Aig.	Inclinaison observée	Poids	Correction de l'équil. imparf. $\Delta\vartheta$	Variat. de l'inclin. ε	Inclinaison au 1er sept. 1892	Moyenne adoptée
	1892								
Vingåker	Août 20	10^h15^mm.	1	$-70^0 59'.9$		$-3'.2$	$-0'.1\,i$	$-71^0\ 3'.2$	$+71^0\ 2'.8$
»	» »	10 24 m.	2	+70 59.6		+2.5	$-0.2\,i$	+71 2.3	
Bullerö	» 23	3 48 s.	1	+70 37.9		+3.2	+0.8	+70 40.3	+70 38.5
»	» »	3 57 s.	2	+70 35.0		+2.4	+0.7	+70 36.7	
Hufvudskär	» 24	2 27 s.	1	+70 40.4		+3.2	+1.3	+70 42.3	+70 40.0
»	» »	2 37 s.	2	+70 36.5		+2.4	+1.2	+70 37.7	
Sandhamn	» 25	5 12 s.	1	+70 41.6		+3.2	+0.2	+70 44.6	+70 43.8
»	» »	5 20 s.	2	+70 40.8		+2.4	+0.1	+70 43.1	
Stockholm	» 28	3 4 s.	1	+70 42.4		+3.2	+1.6	+70 44.0	+70 46.0
»	» »	3 17 s.	2	+70 47.3		+2.3	+1.5	+70 48.1	
Upsal IV	Oct. 25	0 32 s.	1	+71 12.7		−3.0	+0.7	+71 9.0	+71 10.5[1]
»	» »	0 41 s.	1	+71 15.0		−3.0	+0.6	+71 11.6	
»	» »	0 52 s.	2	+71 12.6		−2.1	+0.6	+71 9.9	
»	» »	1 0 s.	2	+71 14.0		−2.1	+0.5	+71 11.4	

[1]) Les observations faites à Upsal le 25 octobre ont été corrigées de la variation diurne moyenne qui résulte des observations faites à Pawlowsk pendant les années 1881—1890.

Tableau XVI. — Valeurs absolues des éléments magnétiques au 1er juillet 1892.

Stations	Latitude Nord	Longitude de Stockholm	Composante horizontale		Déclinaison occidentale		Inclinaison	
Upsal IV	$59^0 51'.5$	$0^0 25'.9$ O.	0.16135	0.16216	$7^0 35'.1$	$7^0 44'.8$	$71^0 10'.5$	$71^0\ 0'.4$
» III	59 51.3	0 25.6 O.	—		7 45.9		—	
» I	59 51.2	0 25.6 O.	0.16298		7 50.1		70 50.3	
» II	59 51.2	0 25.6 O.	—		7 47.0		—	
Stockholm	59 20.6	0 0.0	0.16214		8 14.9		70 46.0	
Gustafsberg	59 19.6	0 19.7 E.	0.16230		8 14.6		70 42.2	
Udden	59 19.5	0 18.6 E.	0.15904		8 49.2		71 19.2	
Sandhamn	59 17.3	0 51.8 E.	0.16204		7 20.0		70 43.8	
Bullerö	59 12.1	0 47.6 E.	0.16299		7 19.9		70 38.5	
Dalarö	59 7.8	0 20.8 E.	0.16380		7 47.4		70 29.0	
Jutholmen	59 7.5	0 21.3 E.	0.16368		8 0.1		70 29.2	
Fredrikshald	59 7.2	6 40.7 O.	0.15626		11 47.1		71 29.0	
Hallsberg	59 4.2	2 56.6 O.	0.16029		9 4.2		71 5.8	
Kilsmo	59 4.2	2 31.3 O.	0.16052		—		70 48.8	
Åmål	59 3.0	5 21.7 O.	0.16055		11 26.3		70 53.4	
Vingåker	59 2.7	2 10.7 O.	0.16009		8 46.5		71 2.8	
Hufvudskär	58 57.8	0 30.6 E.	0.16192		7 45.7		70 40.0	

Stations	Latitude Nord	Longitude de Stockholm	Composante horizontale		Déclinaison occidentale		Inclinaison	
Lerbäck	58°57′.1	3° 0′.8 O.	0.16229		9° 8′.8		70°43′.3	
Kornsö	58 56.5	6 24.0 O.	0.15928		11 46.9		71 0.3	
Strömstad	58 56.3	6 53.5 O.	0.15887		12 2.4		71 6.7	
Vestra Ed	58 54.7	6 7.4 O.	0.16058		11 38.2		70 57.6	
Nord-Koster	58 54.1	7 2.3 O.	0.16142		11 44.0		70 50.8	
Ånimskog	58 53.7	5 29.1 O.	0.16072		—		70 52.2	
Hökedalen	58 53.3	6 10.2 O.	0.16065		11 38.7		70 54.6	
Bäckefors	58 48.5	5 53.7 O.	0.16128		11 13.4		70 49.1	
Godegård	58 44.8	2 53.3 O.	0.16279		9 7.0		70 34.8	
Mellerud	58 42.2	5 35.7 O.	0.16149		10 56.3		70 46.4	
Grebbestad III	58 41.7	6 48.4 O.	0.16029		11 24.3		70 54.7	
» II	58 41.6	6 48.2 O.	0.16110	0.16051	12 0.9	11°52′.3	70 52.1	70°55′.1
» I	58 41.6	6 48.2 O.	0.16015		12 11.6		70 58.4	
Norrköping	58 35.8	1 52.3 O.	—		—		70 32.6	
Fjellbacka	58 35.7	6 46.1 O.	0.16082		12 0.6		70 56.4	
Brålanda I	58 34.2	5 41.5 O.	0.16239	0.16246	11 43.1	11 42.9	70 32.8	70 35.9
» II	—	—	0.16253		11 42.7		70 39.0	
Motala	58 32.3	3 0.6 O.	0.16245		9 4.3		70 32.1	
Rödesund	58 32.2	3 33.4 O.	0.16352		9 43.2		70 52.2	
Lidköping	58 30.4	4 53.5 O.	0.16088		10 14.2		70 26.3	
Tibro	58 25.6	3 53.4 O.	0.16291		10 22.7		70 31.0	
Sköfde	58 23.3	4 13.0 O.	0.16302		10 22.4		70 34.1	
Skara	58 23.0	4 37.0 O.	0.16411		10 3.4		70 27.9	
Venersborg	58 22.8	5 44.2 O.	0.16307		10 45.4		70 30.2	
Uddevalla	58 21.0	6 7.3 O.	0.16250		—		70 22.7	
Salstad	58 20.8	5 27.7 O.	0.16190		11 13.6		70 39.9	
Hållö	58 20.4	6 49.9 O.	0.16330		11 33.8		70 44.4	
Håkantorp	58 18.5	5 8.9 O.	0.16258		10 21.8		70 38.7	
Lysekil	58 16.4	6 37.0 O.	0.16489		12 21.3		70 25.7	
Stenstorp	58 16.4	4 20.4 O.	0.16394		10 43.8		70 27.1	
Fiskebäckskil I	58 15.1	6 35.6 O.	—	0.16424	12 6.5	12 6.5	—	70 22.6
» II	—	—	0.16424		—		70 22.6	
Falköping	58 10.5	4 30.1 O.	0.16462		10 14.9		70 21.7	
Upphärad	58 9.6	5 44.8 O.	0.16414		11 21.7		70 25.8	
Herrljunga	58 4.8	5 1.7 O.	0.16402		10 59.0		70 24.6	
Kettilstorp I	58 2.4	4 20.4 O.	0.16698	0.16687	10 36.9	10 24.4	70 1.2	70 1.3
» II	—	4 20.8 O.	0.16676		10 11.9		70 1.4	
Lagmansholm	58 0.3	5 21.4 O.	0.16437		11 20.0		70 29.8	
Elfängen	57 57.7	5 55.9 O.	0.16344		10 56.8		70 26.8	
Alingsås	57 55.7	5 31.3 O.	0.16234		11 10.7		70 36.9	
Mullsjö I	57 55.2	4 10.4 O.	0.16422	0.16684	9 30.3	9 30.3	70 11.9	70 14.8
» II	—	—	0.16945		—		70 17.6	
Marstrand I	57 53.3	6 28.7 O.	0.16475	0.16420	11 46.6	11 49.3	70 17.6	70 17.6
» II	—	—	0.16364		11 52.0		—	
Borgstena	57 52.9	5 2.8 O.	0.16714		10 58.2		70 4.6	
Lerum	57 46.3	5 47.6 O.	0.16544		11 8.2		70 8.2	
Partilled	57 44.7	5 57.4 O.	0.16518		11 13.8		70 13.4	

Stations	Latitude Nord	Longitude de Stockholm	Composante horizontale		Déclinaison occidentale		Inclinaison	
Borås öfre	57°43′.6	5° 7′.1 O.	0.16643		11°26′.7		70° 6′.2	
Nässjö	57 39.3	3 21.3 O.	0.16886		8 14.0		69 40.7	
Fritsla I	57 33.5	5 15.7 O	0.16467	0.16402	10 41.2	10°28′.5	70 14 4	70°22′.2
» II	57 33.4	5 15.7 O.	0.16337		10 15.8		70 29.9	
Hook	57 30.9	3 46.5 O.	0.16790		7 52.6		69 48.8	
Svenljunga	57 29.7	4 56.6 O.	0.16760		10 52.9		69 52.4	
Kongsbacka	57 29.5	5 58.8 O.	0.16508		10 52.3		70 12.7	
Björketorp	57 25.8	5 32.3 O.	0.16744		11 4.9		69 58.2	
Säfsjö	57 24.3	3 23.2 O.	—		9 16.2		—	
Klefshult	57 21.3	3 57.8 O.	0.16765		9 58.6		69 47.6	
Åsa I	57 21.2	5 56.1 O.	0.16592	0.16584	11 13.6	11 14.1	70 4.0	70 4′.4
» II	—	—	0.16575		11 14.6		70 4.7	
Veddige	57 16.3	5 43.0 O.	0.16492		11 6.0		70 11.2	
Backa	57 14.7	5 52.4 O.	0.16470		11 5.9		70 15.7	
Refteled öfre	57 10.5	4 27.8 O.	0.16851		10 23.2		69 43.2	
Kärda	57 10.2	4 8.2 O.	0.16880		10 15.5		69 38.8	
Lamhult	57 10.2	3 28.4 O.	0.16807		9 33.6		69 48.6	
Smålandsstenar	57 9.8	4 38.6 O.	0.16848		10 42.5		69 47.2	
Ätran	57 7.4	5 6.1 O.	0.16642		11 18.8		69 54.3	
Varberg	57 6.6	5 48.3 O.	0.16692		12 30.3		70 2.4	
Kinnared II	57 1.6	4 56.8 O.	0.16642	0.16624	11 30.4	11 3.6	70 10.6	70 12.6
» I	57 1.4	4 57.0 O.	0.16606		10 36.7		70 14.5	
Moheda	57 0.2	3 28.6 O.	0.16736		—		69 44.4	
Alfvestad	56 54.2	3 30.2 O.	0.16925		8 40.2		69 35.5	
Falkenberg	56 54.2	5 34.1 O.	0.16706		12 12.2		69 49.9	
Fröslida	56 52.7	5 0.4 O.	0.16816		10 30.0		69 39.8	
Tutaryd	56 51.0	4 0.7 O	0.16898		9 50.3		69 42.1	
Ljungby	56 49.9	4 6.9 O.	0.16888		9 41.2		69 32.6	
Lidhult	56 49.7	4 36.8 O.	0.17004		10 10.2		69 37.7	
Getinge	56 49.2	5 19.4 O.	0.16750		11 49.3		69 50.8	
Bolmen I	56 49.0	4 21.2 O.	0.16892	0.16908	10 16.5	10 14.3	69 33.2	69 34.6
» II	—	—	0.16923		10 12.1		69 35.9	
Vislanda	56 47.1	3 35.6 O.	0.16892		8 57.1		—	
Skallinge I	56 46.9	4 52.0 O.	0.16654	0.16520	11 12.6	11 39.0	69 57.2	70 3.6
» II	—	—	0.16385		12 5.5		70 10.1	
Sennan	56 46.2	5 4.7 O.	0.16916		10 35.7		69 36.4	
Halmstad	56 40.3	5 11.3 O.	0.16987		11 46.5		69 31.2	
Liatorp I	56 39.7	3 46.9 O.	0.16853	0.16832	9 33.2	9 33.2	69 41.2	69 41.2
» II	—	—	0.16810		—		—	
Eldsberga	56 36.0	5 4.0 O.	0.16848		11 19.9		69 39.0	
Elmhult	56 33.3	3 54.9 O.	0.17016		9 6.1		—	
Laholm I	56 30.8	5 0.6 O.	0.16940	0.17002	11 37.5	11 22.5	69 23.8	69 23.1
» II	—	—	0.17065		11 7.5		69 22.4	
Grefvie I	56 23.5	5 16.3 O.	0.17027	0.17040	11 2.2	11 6.0	69 33.0	69 33.0
» II	—	—	0.17052		11 9.8		—	
Vittsjö	56 20.3	4 23.4 O.	0.16856		11 21.5		69 32.7	
Hästveda	56 17.6	4 8.0 O.	0.17068		10 25.6		69 16.8	

Stations	Latitude Nord	Longitude de Stockholm	Composante horizontale		Déclinaison		Inclinaison	
Engelholms hamn	56°16′.4	5°13.2 O.	0.17090		10°47′.5		69°19′.4	
Engelholm	56 14.7	5 11.8 O.	0.17226		10 27.9		69 11.3	
Höganäs	56 12.3	5 30.4 O.	0.17090		—		69 22.8	
Tyringe I	56 9.7	4 27.5 O.	0.17232	0.17042	10 11.2	10°11′.2	69 5.8	69°18′.0
» II	—	—	0.16852		—		69 30.1	
Hessleholm	56 9.5	4 17.3 O.	—		10 25.8		—	
Qviinge backe	56 9.5	3 57.5 O.	0.17078		9 26.1		69 10.9	
Kattarp	56 8.7	5 16.6 O.	0.17122		11 42.1?		69 22.0	
Perstorp	56 8.4	4 39.6 O.	0.17005		10 52.0		69 30.2	
Åstorp I	56 8.2	5 6.4 O.	0.16988	0.16970	10 38.5	10 41.0	69 30.0	69 30.7
» II	—	—	0.16952		10 43.6		69 31.4	
Klippan I	56 8.1	4 55.7 O.	0.17268	0.17258	10 30.3	10 37.1	69 1.0	69 2.2
» II	—	—	0.17248		10 43.9		69 3.4	
Billesholms grufva I	56 3.4	5 4.6 O.	0.17164	0.17176	10 32.6?	10 32.6?	69 13.4	69 13.4
» » II	—	—	0.17187		—		—	
Sölvesborg	56 3.2	3 28.4 O.	0.17180		7 35.8		69 15.6	
Kristianstad	56 1.8	3 54.3 O.	0.17236		9 16.1		69 2.7	
Tollarp	55 56.2	4 4.3 O.	0.17311		10 3.5		69 2.0	
Hör	55 56.2	4 30.8 O.	0.17248?		10 31.4		69 5.9	
Åhus	55 55.6	3 45.5 O.	0.17492		8 38.7		68 49.0	
Hildesborg	55 55.1	5 14.6 O.	0.17388		10 56.7		68 54.2	
Uranibourg	55 54.4	5 21.4 O.	0.17311	0.17312	11 15.1	10 37.2	68 57.2	68 57.2
Bäckviken	55 54.3	5 19.9 O.	0.17312		9 59.4?		—	
Efveröd	55 54.2	3 58.7 O.	0.17295		10 0.2		—	
Teckomatorp	55 52.3	4 58.0 O.	0.17436		10 10.4		68 49.2	
Landskrona	55 51.9	5 13.5 O.	0.17351		10 54.3		68 53.4	
Hörby	55 51.4	4 23.7 O.	0.17396		10 32.3		68 54.4	
Eslöf	55 50.2	4 45.3 O.	0.17353		10 41.8		69 4.6	
Kjeflinge	55 47.6	4 57.0 O.	0.17479		9 53.3		68 45.1	
Löberöd	55 46.6	4 32.8 O.	0.17344		10 40.4		69 2.8	
Vollsjö	55 42.0	4 16.4 O.	0.17379		11 11.8		68 52.9	
Lund I	55 41.9	4 52.0 O.	0.17402	0.17168	—	9 33.1	68 45.6	68 45.6
» II	—	—	0.16934		9 33.1		—	
Copenhague	55 41.2	5 28.7 O.	0.17336		10 53.2		68 50.4	
Malmö	55 36.9	5 3.7 O.	0.17421		10 40.4		68 46.0	
Cimbrishamn	55 33.3	3 42.4 O.	0.17473		9 54.7		68 46.3	
Tomelilla	55 32.8	4 6.5 O.	0.17177		8 43.0		69 4.6	
Svedala	55 30.5	4 49.4 O.	0.17351		7 19.9		69 13.6	
Rydsgård	55 28.4	4 27.9 O.	0.17644		10 25.3		68 40.0	
Ystad	55 25.8	4 14.5 O.	0.17722		10 15.8		68 20.6	
Klagstorp	55 23.8	4 40.8 O.	0.17540		10 25.8		68 43.8	
Trelleborg	55 22.5	4 53.7 O.	0.17428		7 14.4		68 46.2	

UEBER

EINE EINFACHE METHODE ZUR PHOTOGRAPHISCHEN DARSTELLUNG DES ULTRAROTHEN SPEKTRUMS

VON

KNUT ÅNGSTRÖM.

MIT EINER TAFEL.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 10 April 1895).

UPSALA 1895,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Wie bekannt, ist es bis jetzt nur gelungen einen ganz kleinen Theil des ultrarothen Spektrums direkt zu photographieren, und die spektrobolometrische Methode ist noch die einzige, welche uns ein Mittel giebt nähere Kenntniss über die Vertheilung und Stärke der längsten Wellenlängen zu erreichen. Es ist auch zu bemerken, dass diese Methode ein Mittel zur quantitativen Vergleichung der verschiedensten Theile des Spektrums giebt, was wohl kaum durch eine direkte photographische Aufnahme möglich ist.

Die Durchmusterung des ultrarothen Spektrums mit Zuhülfe des Spektrobolometers ist jedoch mit den bis jetzt gewöhnlichen Arbeitsmethoden so ausserordentlich mühsam und zeitverchwendend, dass man ohne Schwierigkeit voraussagen konnte, dass, wenn die Arbeitsmethode nicht weiter entwickelt würde, die Forschungen in diesem Gebiete nur langsam würden verfolgt werden können.

In einer Mittheilung zu der »Britisch Association» den 11 Aug. 1894 [1]), hat aber Prof. Langley, der erste Entwickler der spektrobolometrischen Methode, dieselbe so vervollkommnet, dass die Arbeit jetzt beinahe ebenso leicht und mit beinahe ebenso grosser Schärfe in dem ultrarothen wie in den übrigen Theilen des Spektrums ausgeführt werden kann. Dies wird ermöglicht, theils durch eine bis jetzt noch nicht erreichte Präcision in der Herstellung der optischen Theile des Instrumentes, theils auch durch Ersatz der Beobachter durch die photographische Platte. Durch die optischen Verbesserungen wird eine solche Schärfe und Dispersion gewonnen, dass das Instrument nicht nur die beiden *D*-linien, sondern auch die zwischen diesen befindliche Nickellinie im Sonnenspektrum als verschiedene Linien angiebt. Durch die Möglichkeit die Angaben des Spektrobolometers auf photographischem Wege aufzunehmen, wird die Arbeit des Beobachters natürlich im höchsten Grade erleichtert.

1) »Nature», Vol. 51, p. 12, 1 Nov. 1894.

Das Princip der neuen Methode ist kurz das folgende. Das Fernrohr und die Scala des Galvanometers werden durch eine photographische Platte ersetzt, auf welche der von dem Galvanometerspiegel reflectierte Lichtstrahl fällt. Der Theodolit des Spektrobolometers wird von einem sehr soliden Uhrwerk getrieben, welches auch der photographischen Platte eine vertikale Bewegung mittheilt. Der Motor ist mit solcher Präcision ausgeführt, dass die beiden Bewegungen, die des Theodolits und die der Platte so weit wie möglich synchron sind. Für jede Bogenminute, welche der Bolometerstreifen gedreht wird, bewegt sich die photographische Platte 1 cm.

Mit dem von LANGLEY konstruierten Instrument ist wohl die äusserste Grenze der Empfindlichkeit und Schärfe, welche auf diesem Wege mit zur Zeit befindlichen Hülfsmitteln möglich ist, erreicht. Nur von reich dotierten Instituten kann aber ein solches Instrument angeschafft werden.

Ich habe mir deswegen die Aufgabe gestellt einen Versuch zu machen die photographische Registrierungsmethode zu vereinfachen und werde in dem Folgenden beschreiben, wie ich eine einfache Lösung dieser Frage gefunden habe.

Das Princip ist die photographische Platte fest mit dem Bolometertubus zu verbinden, wobei beide gleichzeitig bewegt werden können, und den von dem Galvanometerspiegel reflektierten Lichtstrahl auf die Platte zu projiciieren. Dabei muss aber die Bewegung des Lichtpunktes bei Drehung des Galvanometerspiegels senkrecht auf die Bewegung der Platte stattfinden.

Fig. 1 und 2 geben eine schematische Darstellung der Anordnung. An dem fest gebautem Theodolite A ist ein leichter horizontaler Arm DE befestigt, so dass dieser mit dem Tubus C des Bolometers um die Ache drehbar ist.

Auf das Ende dieses Armes wird die photographische Platte P in ihrer Kasette in horizontaler Lage aufgelegt. Beinahe senkrecht über der Platte steht der dem Bolometer zugehörige Galvanometer G. Das Licht von einer Lichtquelle L geht durch einen Spalt O und fällt unter einem Winkel von 45^0 auf den Spiegel des Galvanometers. Nach dieser ersten Reflexion wird der Strahl in vertikaler Richtung durch den Spiegel S reflektiert und das Bild des Spaltes fällt auf die photographische Platte P. Bei einer Drehung des Galvanometerspiegels bewegt sich dieses Bild längs der Richtung des Bolometerarmes (in dem Plan der Tafel in Fig. 2), bei einer Drehung des Armes aber beschreibt der Lichtstrahl eine Linie senkrecht auf die erste Richtung. Wird der Tubus und damit der Arm DE gedreht, bewegt sich der Bolometerstreif durch die ver-

schiedenen Theile des Spektrums und der Galvanometer giebt bei jeder Stellung die diesbezügliche Intensität der Strahlung an. Zufolgedessen wird die Lage des Lichtpunktes auf der Platte in jedem Augenblick durch die Drehung des Armes und die Drehung des Galvanometerspiegels bestimmt. In der Kurve, welche der Lichtpunkt in dieser Weise beschreibt, sind also die gegen den Arm senkrechten Richtungen proportional der Drehung im Spektrum und die Richtungen längs des Armes proportional der auf jede Drehung bezüglichen Strahlung. Weil die photographische Platte und der Bolometerstreif fest mit einander verbunden sind, ist natürlich hier die Bewegung vollständig synchron.

Zwischen den Galvanometerspiegel und den Spiegel S wurde eine Linse eingeschoben, die ein scharfes Bild der Spaltöffnung O auf die Platte wirft. Diese ist von einem kleinen Kästchen KK' umgeben um fremdes Licht abzuhalten und deswegen ist auch ein konisches Papprohr HH' auf das Kästchen gestellt. Die eine Seite des Kästchens wird durch zwei Theile gebildet, welche aufgeklappt werden können um die Einführung der Platte zu erleichtern, und welche zwischen einander eine horizontale Öffnung von 4 cm Breite für die freie Bewegung des Armes lassen. Der obere Deckel hat eine in der Längesrichtung des Bolometerarmes gehende sehr enge Spaltöffnung, durch welche das Lichtbild (dessen Längenrichtung senkrecht zur Spaltöffnung fällt) zu einem Punkte begrenzt wird.

Mit dieser Anordnung wird eine Präcisionsbewegung des Theodolites vollständig überflüssig und es ist nur nöthig dass die Bewegung des Bolometertubus ziemlich gleichförmig und ohne Sprünge stattfindet. Ich habe mit gutem Erfolg ein sehr einfaches durch ein Gewicht getriebenes Räderwerk angewandt, dessen Bewegung durch eine kräftige Luftbremse gedämpft wurde. Durch Veränderung dieser Luftbremse könnte die Bewegung schneller oder langsamer werden. Die schnellste Drehung, welche ich benutzt habe, war 10 Bogenminuten per Minute. Dabei war der Arm und also der Abstand der Platte von der Theodolitenachse 2 m. Bei einer Drehung des Bolometertubus von 1^0 beschreibt also das Lichtbild auf der photographischen Platte einen Bogen von 3,48 cm Länge, oder jede Bogenminute entspricht einer Bewegung der Platte von 0,58 mm. Will man die Bewegung der Platte grösser werden lassen, kann man dies natürlich durch Verlängerung des Armes bewirken. Im Verhältniss zu den übrigen Hülfsmitteln, die zu meiner Verfügung standen, war aber die oben angegebene Bewegung der Platte eine genügend grosse. Eine grössere Dispersion des Spektrums ist auch für eine orientierende Untersuchung vieler Fragen kaum nöthig.

Eine andere Lösung des Problems die Bolometerangaben photographisch zu registrieren will ich auch bei dieser Gelegenheit beiläufig erwähnen, obschon ich dieselbe nicht geprüft habe. Fig. 3 skizziert diese Anordnung. Der Lichtstrahl, welcher von dem Galvanometerspiegel G unter einem Winkel von 45^0 auf den Spiegel S_1 fällt, wird in vertikaler Richtung reflektiert, und dann vom Spiegel S_{11}, dessen Reflexionsebene senkrecht auf der Reflexionsebene des ersten Spiegels S_1 steht, wieder in horizontaler Richtung reflektiert und auf die photographische Platte projiciiert. Dieser letzte Spiegel ist auf dem Bolometertubus T über der Achse des Theodolites befestigt. Wird der Tubus gedreht, bewegt sich der Lichtpunkt auf der Platte in horizontaler Richtung, dreht sich der Galvanometerspiegel, bewegt er sich in vertikaler. Mit dieser Anordnung hat man den Vortheil, dass die Bewegung leichter bedeutend vergrössert werden kann. Bei einem Abstand zwischen S_{11} und P von 5 m bewegt sich z. B. der Lichtpunkt 2,9 mm in horizontaler Richtung bei einer Drehung des Theodolites von $1'$.

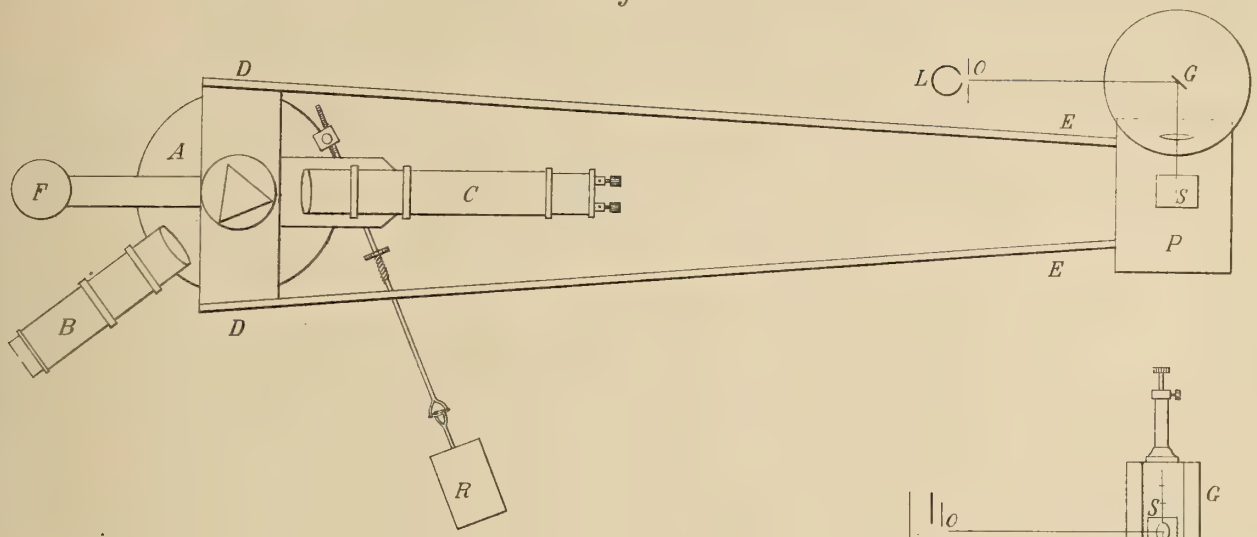
Ich habe bisher nur Gelegenheit gehabt die erste Methode auf die Strahlung einiger Gasflammen zu prüfen, habe mich aber dadurch von der Brauchbarkeit derselben genügend überzeugt. Die photographische Aufnahme des Spektrums der Bunsenflamme zeigt z. B. ausser den zwei grossen maxima, welche zuerst von JULIUS angegeben wurden und deren Ursache von mir näher untersucht wurde, noch sehr deutlich die zwei ganz kleinen Maxima näher dem sichtbaren Theil des Spektrums, welche von PASCHEN in der Strahlung der Knallgasflamme und Bunsenflamme angegeben sind [1]). Von der D-linie gerechnet sind die Abstände dieser vier ersten Maxima im Spectrum eines Steinsalzprismas von 60^0 brechendem Winkel:

$1^0\ 25'\ 12''$	wovon	die	Wellenl.	$1{,}48\ \mu$
$1^0\ 34'\ 32''$	»	»	»	$1{,}96\ \mu$
$1^0\ 45'\ 35''$	»	»	»	$2{,}80\ \mu$
$2^0\ 6'\ 0''$	»	»	»	$4{,}34\ \mu$

Mit dieser kleinen vorläufigen Notize habe ich nur zeigen wollen, dass man mit ganz beschränkten Hülfsmitteln die photographische Registrierung der Bolometerangaben ausführen kann und einen Apparat herstellen, der im Verhältniss zu dem LANGLEY'schen wenigstens denselben Dienst liefern kann wie das Spektroskop à Vision directe zu dem grösseren Spektralapparate, also die orientierende Arbeit zu erleichtern.

1) PASCHEN, Wied. Ann. B. *52*, S. 222, 1894 u. B. *53*, S. 335, 1894.

Fig. 1.



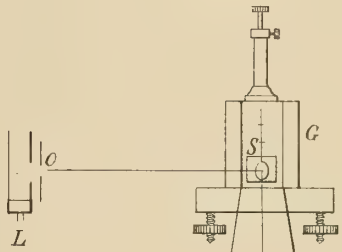


Fig. 2.

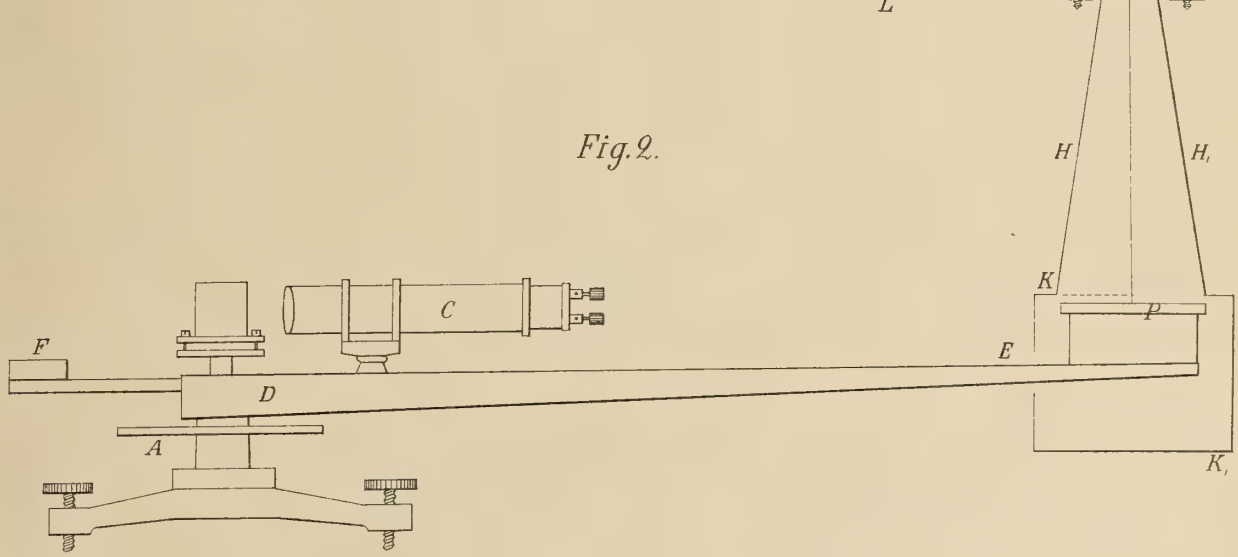
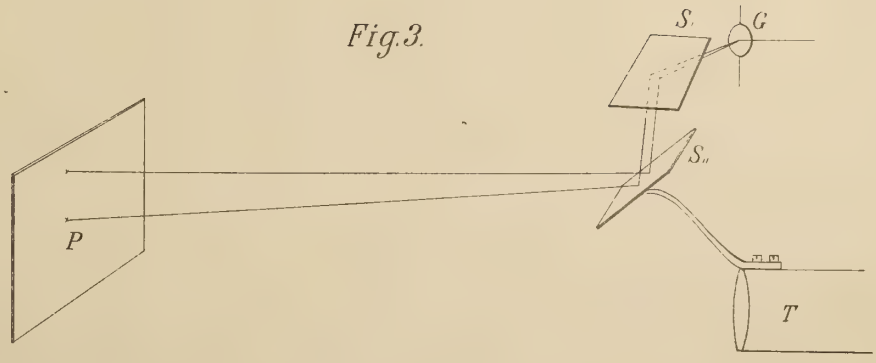


Fig. 3.



NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ

VOL. XVII

FASC. II.

1898.

SMITHSONIAN INSTITUTION
JUN 4 1928
NATIONAL MUSEUM

PROPERTY OF
THE AMERICAN ASSOCIATION
FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ VOL. XVII.

FASCICULUS POSTERIOR.

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXCVIII.

INDEX

HUJUS FASCICULI.

		Pag.	Tab.
	Introductio	I—XVII.	
	1. Sectio Physico-Mathematica:		
I.	Berger, A.: Recherches sur les Nombres Polygonaux	1— 38.	
II.	Bohlin, K.: Formeln und Tafeln zur gruppenweise Berechnung der allgemeinen Störungen benachbarter Planeten	1—225.	
III.	Söderblom, A.: Sur la Fonction elliptique fondamentale $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$	1— 56.	
	2. Sectio Medica et Historiæ Naturalis:		
I.	Kjellman, F. R.: Zur Organographie und Systematik der Aegagropilen	1— 26.	I—III.

SECTIO PHYSICO-MATHEMATICA.

RECHERCHES

SUR

LES NOMBRES POLYGONAUX

PAR

A. BERGER.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 9 Mars 1895).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1895.

I. Définition et propriétés élémentaires.

Soit a un nombre entier satisfaisant à l'inégalité

$$a \geqq 3 \ , \tag{1}$$

le nombre polygonal $r^{ième}$ de l'ordre a, que nous désignons par $P(a,r)$, est, d'après la définition[1]), égal à la somme des r termes de la progression arithmétique

$$1 \ , \ a-1 \ , \ 2a-3 \ , \ 3a-5 \ , \ \ldots\ldots \ (r-1)a-2r+3 \ ,$$

dont le premier terme est l'unité et dont la différence est égale à $a-2$. Par suite nous aurons

$$P(a,r) = \frac{(a-2)r^2-(a-4)r}{2} \tag{2}$$

sous la supposition, que r soit un nombre entier positif. Il est cependant préférable d'étendre la notion de nombre polygonal aux cas, où le nombre r est négatif ou nul, et nous établirons dans ce mémoire la définition suivante:

Définition. Soit a *un nombre entier, supérieur ou égal à* 3, *nous désignons par les nombres polygonaux de l'ordre* a *tous les nombres, qu'on obtient de l'expression*

$$P(a,r) = \frac{(a-2)r^2-(a-4)r}{2} \ ,$$

en y faisant r *successivement égal à tous les nombres entiers positifs et négatifs et nul.*

---

1) Voir Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des DIOPHANTUS von Alexandria. Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von G. WERTHEIM. Leipzig 1894.

Il s'ensuit de cette définition, que tous les nombres polygonaux sont des nombres entiers positifs ou nuls, et que $P(a,r)$ ne s'évanouit que pour $r = 0$ et pour $r = -1$, si $a = 3$. Nous appelerons le nombre entier a, qui entre dans l'expression $P(a,r)$ l'ordre du nombre polygonal $P(a,r)$, et de même nous appelerons le nombre r le rang du nombre polygonal $P(a,r)$. Les nombres polygonaux de l'ordre a forment une progression à double entrée

$$\ldots . 6a-15 , 3a-8 , a-3 , 0 , 1 , a , 3a-3 , 6a-8 , 10a-15 , \ldots$$

Les nombres polygonaux de l'ordre troisième, quatrième, cinquième, sixième .... sont aussi appelés nombres triangulaires, carrés, pentagonaux, hexagonaux ....

De la définition ci-dessus on déduit immédiatement les formules suivantes:

$$(3) \quad P(a,0) = 0 , \; P(a,1) = 1 , \; P(a,-1) = a-3 , \; P(a,2) = a ,$$

$$(4) \quad P(a,r) - P(a,-r-1) = -(a-3)(2r+1) ,$$

$$(5) \quad P(a,r) - P(a,-r) = -(a-4)r ,$$

$$(6) \quad P(a,r) - P(a,-r+1) = 2r-1 ,$$

$$(7) \quad P(a,r) - P(a,-r+2) = a(r-1) .$$

Table des nombres polygonaux pour $3 \leqq a \leqq 10$, $-6 \leqq r \leqq 7$.

r	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(3,r)$	15	10	6	3	1	0	0	1	3	6	10	15	21	28
$P(4,r)$	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49
$P(5,r)$	57	40	26	15	7	2	0	1	5	12	22	35	51	70
$P(6,r)$	78	55	36	21	10	3	0	1	6	15	28	45	66	91
$P(7,r)$	99	70	46	27	13	4	0	1	7	18	34	55	81	112
$P(8,r)$	120	85	56	33	16	5	0	1	8	21	40	65	96	133
$P(9,r)$	141	100	66	39	19	6	0	1	9	24	46	75	111	154
$P(10,r)$	162	115	76	45	22	7	0	1	10	27	52	85	126	175

Pour les nombres polygonaux du même ordre nous obtiendrons de la définition les relations

$$P(a,r+1) - P(a,r) = (a-2)r + 1 \quad , \tag{8}$$

$$P(a,r+2) - 2P(a,r+1) + P(a,r) = a - 2 \quad , \tag{9}$$

$$P(a,r+3) - 3P(a,r+2) + 3P(a,r+1) - P(a,r) = 0 \quad , \tag{10}$$

et pour les nombres polygonaux du même rang nous aurons

$$P(a+1,r) - P(a,r) = \frac{r^2 - r}{2} \quad , \tag{11}$$

$$P(a+2,r) - 2P(a+1,r) + P(a,r) = 0 \quad . \tag{12}$$

Maintenant nous examinerons, si deux nombres polygonaux $P(a,r)$ et $P(a,s)$ du même ordre a puissent être égaux. De l'équation

$$P(a,r) = P(a,s) \tag{13}$$

on tire, d'après la définition, l'égalité

$$(a-2)r^2 - (a-4)r = (a-2)s^2 - (a-4)s \quad , \tag{14}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(r-s)\left\{r + s - \frac{a-4}{a-2}\right\} = 0 \quad . \tag{15}$$

En supposant que $r \gtrless s$, nous obtiendrons de l'équation (15)

$$r + s = \frac{a-4}{a-2} \quad , \tag{16}$$

ce qui exige, que la fraction, qui se trouve dans le second membre, soit un nombre entier. Les seules solutions permises de l'équation (13) seront donc

$$a = 3 \ , \ s = -r - 1 \tag{17}$$

et

$$a = 4 \ , \ s = -r \quad , \tag{18}$$

et de l'équation (13) nous obtiendrons

$$P(3,r) = P(3,-r-1) \ , \ P(4,r) = P(4,-r) \quad , \tag{19}$$

formules, qui peuvent aussi être déduites des équations (4) et (5). Ces deux cas sont, par suite, les seuls, où deux nombres polygonaux de même ordre mais de rangs différents sont égaux entre eux. On en conclut, que si dans l'expression

$$P(a,r) = \frac{(a-2)r^2 - (a-4)r}{2} \tag{20}$$

r est égal successivement à tous les nombres entiers, nous en obtiendrons pour $a = 3$ tous les nombres triangulaires et chaque nombre triangulaire deux fois; pour $a = 4$ nous obtiendrons de cette manière tous les nombres carrés et chaque nombre carré (excl. 0) deux fois; pour $a \geqq 5$ nous obtiendrons de même tous les nombres polygonaux de l'ordre a et chaque nombre de cette espèce une seule fois. De plus on conclura, que pour $a = 3$ nous obtiendrons de l'équation (20) tout nombre triangulaire une seule fois en y faisant successivement $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$, et que pour $a = 4$ nous obtiendrons de la même équation tout nombre carré une seule fois en y substituant successivement $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Pour les valeurs spéciales nous obtiendrons de l'équation (20) les formules suivantes:

$$P(3,r) = \frac{r^2+r}{2},\ P(4,r) = r^2,\ P(5,r) = \frac{3r^2-r}{2},\ P(6,r) = 2r^2 - r, \tag{21}$$

$$P(7,r) = \frac{5r^2-3r}{2},\ P(8,r) = 3r^2-2r,\ P(9,r) = \frac{7r^2-5r}{2},\ P(10,r) = 4r^2-3r.$$

En posant pour $|x| < 1$

$$S = \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,r)x^r, \tag{22}$$

nous en obtiendrons, après avoir multiplié les deux membres par $1 - x$,

$$(1-x)S = \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,r)x^r - \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,r)x^{r+1} \tag{23}$$

ou, si l'on remplace r par $r+1$ dans la première somme du second membre,

$$(1-x)S = P(a,1)x + \sum_{r=1}^{r=\infty} \{P(a,r+1) - P(a,r)\}x^{r+1} \tag{24}$$

ou, d'après les formules (3) et (8),

$$(25) \qquad (1-x)S = x + \sum_{r=1}^{r=\infty} \{(a-2)r+1\} x^{r+1}$$

et par suite, en exécutant la sommation dans le second membre,

$$(26) \qquad (1-x)S = x + \frac{(a-2)x^2}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{1-x}$$

ou, d'après l'équation (22),

$$(27) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,r)\, x^r = \frac{x + (a-3)x^2}{(1-x)^3} .$$

En posant pour $|x| < 1$

$$(28) \qquad S_1 = \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,-r)\, x^r ,$$

nous en tirerons, en multipliant par $1-x$ et en observant que $P(a,0) = 0$,

$$(29) \qquad (1-x)S_1 = \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,-r)\, x^r - \sum_{r=0}^{r=\infty} P(a,-r)\, x^{r+1}$$

et par suite, en remplaçant r par $r-1$ dans la dernière somme du second membre,

$$(30) \qquad (1-x)S_1 = \sum_{r=1}^{r=\infty} \{P(a,-r) - P(a,-r+1)\} x^r$$

ou par application de la formule (8), après avoir y remplacé r par $-r$,

$$(31) \qquad (1-x)S_1 = \sum_{r=1}^{r=\infty} \{(a-2)r - 1\} x^r$$

et, par suite,

$$(32) \qquad (1-x)S_1 = \frac{(a-2)x}{(1-x)^2} - \frac{x}{1-x}$$

ou, d'après l'équation (28),

$$(33) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,-r)\, x^r = \frac{x^2 + (a-3)x}{(1-x)^3} .$$

Des équations (27) et (33) nous obtiendrons ce théorème.

Théorème I. Si l'on désigne par a *un nombre entier, supérieur ou égal à* 3, *et par* x *une quantité, qui satisfait à l'inégalité*

$$|x|<1 ,$$

ou aura

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,r)x^r = \frac{x+(a-3)x^2}{(1-x)^3}$$

et

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} P(a,-r)x^r = \frac{x^2+(a-3)x}{(1-x)^3} .$$

De la formule (2) on déduit immédiatement les inégalités

(34) $P(3,r-1)=P(3,-r)<P(3,r)$ pour $r\geqq 1$,

(35) $P(4,-r+1)<P(4,r)=P(4,-r)$ pour $r\geqq 1$,

(36) $P(a,-r+1)<P(a,r)<P(a,-r)$ pour $r\geqq 1$, $a\geqq 5$,

et en y faisant successivement $r=1, 2, 3, 4, \ldots$ nous aurons les formules

(37) $P(3,0)=P(3,-1)<P(3,1)=P(3,-2)<P(3,2)=P(3,-3)<P(3,3)=\ldots$,

(38) $P(4,0)<P(4,1)=P(4,-1)<P(4,2)=P(4,-2)<P(4,3)=P(4,-3)<\ldots$,

(39) $P(a,0)<P(a,1)<P(a,-1)<P(a,2)<P(a,-2)<P(a,3)<P(a,-3)<\ldots$,

par lesquelles les nombres polygonaux du même ordre sont rangés d'après leurs grandeurs.

Maintenant nous évaluerons la somme de la série

$$\sum_r \frac{1}{P(a,r)} ,$$

où r est égal successivement à tous les nombres, pour lesquels $P(a,r)$ obtient des valeurs positives et chaque valeur une seule fois. D'après ce qui est dit auparavant, nous calculerons donc les sommes des trois séries

$$(40) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(3,r)}, \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(4,r)}, \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)}$$

pour $a \geqq 5$, où l'apostrophe indique, qu'en exécutant la sommation de la troisième série le nombre $r = 0$ doit être exclu. Nous avons évidemment

$$(41) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(3,r)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}\right)$$

ou, d'après quelques réductions,

$$(42) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(3,r)} = 2 \ .$$

D'après une formule connue on a

$$(43) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(4,r)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Pour l'évaluation de la somme de la troisième série (40) nous procédons de la manière suivante. Nous avons d'après l'équation (2)

$$(44) \qquad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{2}{(a-2)r^2 - (a-4)r} \ ,$$

d'où l'on tire, en remplaçant r par $-r$ dans le second membre,

$$(45) \qquad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{2}{(a-2)r^2 + (a-4)r} \ ,$$

et des équations (44) et (45) nous obtiendrons par addition

$$(46) \qquad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \frac{2}{a-2} \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{r^2 - \left(\frac{a-4}{a-2}\right)^2}$$

ou

$$(47) \qquad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \frac{2}{a-2} \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \frac{1}{r^2 - \left(\frac{a-4}{a-2}\right)^2} + \frac{2(a-2)}{(a-4)^2} \ .$$

Par application de la formule connue

$$(48) \qquad \pi \cot \pi x = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \frac{x}{x^2 - r^2}$$

nous déduirons de l'équation (47)

$$(49) \qquad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \frac{2(a-2)}{(a-4)^2} + \frac{2\pi}{a-4} \cot \frac{2\pi}{a-2} .$$

Nous résumons les formules (42), (43), 49) dans le théorème suivant.

Théorème II. En désignant par a *un nombre entier, nous aurons*

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(3,r)} = 2 , \quad \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(4,r)} = \frac{\pi^2}{6}$$

et pour $a \geqq 5$

$$\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)} = \frac{2(a-2)}{(a-4)^2} + \frac{2\pi}{a-4} \cot \frac{2\pi}{a-2} .$$

Pour des valeurs spéciales du nombre a nous déduirons de ce théorème les formules suivantes:

$$(50) \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(5,r)} = 6 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} , \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(6,r)} = 2 ,$$

$$\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(7,r)} = \frac{10}{9} + \frac{2\pi}{3}\sqrt{1-2\sqrt{\frac{1}{5}}} , \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(8,r)} = \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} ,$$

$$\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(10,r)} = \frac{4}{9} + \frac{\pi}{3} , \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(12,r)} = \frac{5}{16} + \frac{\pi}{4}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{1}{5}}} ,$$

$$\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(14,r)} = \frac{6}{25} + \frac{\pi\sqrt{3}}{5} , \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(18,r)} = \frac{8}{49} + \frac{\pi}{7}(\sqrt{2}+1) .$$

II. Relations entre des séries et des produits infinis.

Soit z une variable et q une quantité constante, qui satisfait à l'inégalité

$$(51) \qquad |q| < 1 ,$$

et définissons une fonction $F(z)$ au moyen de l'égalité

$$(52) \quad F(z) = (1+qz)(1+q^{a-1}z)(1+q^{2a-3}z)(1+q^{3a-5}z)\ldots ,$$

où l'on désigne par a un nombre entier supérieur ou égal à 3. En transformant ce produit en une série ordonnée suivant les puissances positives et entières de la variable z, nous obtiendrons une égalité de la forme

$$F(z) = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r z^r \ , \tag{53}$$

où il reste à déterminer les coefficients A_r, qui ne dépendent pas de z. Remplaçons pour cet effet z par $q^{a-2}z$, nous obtiendrons de l'équation (52)

$$F(q^{a-2}z) = (1 + q^{a-1}z)\,(1 + q^{2a-3}z)\,(1 + q^{3a-5}z) \ldots . \ , \tag{54}$$

et des équations (52) et (54) on tire

$$F(z) = (1 + qz)F(q^{a-2}z) \tag{55}$$

et, par conséquent, d'après l'équation (53)

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} A_r z^r = (1 + qz) \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r q^{(a-2)r} z^r = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r q^{(a-2)r} z^r + \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r q^{(a-2)r+1} z^{r+1} \tag{56}$$

ou, si l'on remplace r par $r - 1$ dans la dernière somme dans le second membre,

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} A_r z^r = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r q^{(a-2)r} z^r + \sum_{r=1}^{r=\infty} A_{r-1} q^{(a-2)r-a+3} z^r \ . \tag{57}$$

En égalant entre eux les coefficients de z^r dans les deux membres de cette équation, nous en déduirons pour $r \geqq 1$

$$A_r = A_r q^{(a-2)r} + A_{r-1} q^{(a-2)r-a+3} \ , \tag{58}$$

d'où l'on tire

$$A_r = A_{r-1} \cdot \frac{q^{(a-2)r-a+3}}{1 - q^{(a-2)r}} \ . \tag{59}$$

Remplaçons r successivement par r, $r - 1, \ldots . 3, 2, 1$ dans l'équation (59), nous obtiendrons par multiplication des équations ainsi obtenues et en observant, que $A_0 = 1$,

$$A_r = \frac{q^{\frac{(a-2)r^2-(a-4)r}{2}}}{(1 - q^{a-2})\,(1 - q^{2(a-2)}) \ldots . (1 - q^{r(a-2)})} \tag{60}$$

ou, d'après l'équation (2),

$$A_r = \frac{q^{P(a,r)}}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})} \tag{61}$$

Des équations (52), (53), (61) nous obtiendrons la formule

$$\prod_{r=0}^{r=\infty}(1+q^{(a-2)r+1}z) = \sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{q^{P(a,r)}z^r}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})} \tag{62}$$

Par application de la formule (5) au second membre de l'équation (62), nous en déduirons

$$\prod_{r=0}^{r=\infty}(1+q^{(a-2)r+1}z) = \sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{q^{P(a,-r)}\cdot q^{-(a-4)r}z^r}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})}, \tag{63}$$

et en remplaçant z par $q^{a-4}z$ dans cette équation, nous aurons

$$\prod_{r=0}^{r=\infty}(1+q^{(a-2)r+a-3}z) = \sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{q^{P(a,-r)}z^r}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})}, \tag{64}$$

ce qui démontre le théorème suivant.

Théorème III. Si l'on désigne par a *un nombre entier supérieur ou égal à* 3, *par* z *une quantité quelconque et par* q *une quantité, qui satisfait à l'inégalité*

$$|q|<1,$$

ou aura

$$\prod_{r=0}^{r=\infty}(1+q^{(a-2)r+1}z) = \sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{q^{P(a,r)}z^r}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})}$$

et

$$\prod_{r=0}^{r=\infty}(1+q^{(a-2)r+a-3}z) = \sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{q^{P(a,-r)}z^r}{(1-q^{a-2})(1-q^{2(a-2)})\dots(1-q^{r(a-2)})}.$$

Supposons, que q satisfasse à l'inégalité (51), et que z soit une quantité quelconque, on a d'après une formule connue[1])

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^{2r})(1+q^{2r-1}z)(1+q^{2r-1}z^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}q^{r^2}z^r. \tag{65}$$

1) Voir H. Laurent, Traité d'Analyse. Tome IV. Paris 1889. p. 251—253.

Si l'on désigne par x une quantité, qui satisfait à la condition

$$|x|<1 , \tag{66}$$

et par ε l'unité positive ou négative, nous obtiendrons de la formule (65) par les substitutions

$$q = x^{\frac{a}{2}-1} , \quad z = \varepsilon x^{2-\frac{a}{2}} \tag{67}$$

l'égalité

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^{(a-2)r})(1+\varepsilon x^{(a-2)r-a+3})(1+\varepsilon x^{(a-2)r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \varepsilon^r x^{P(a,r)} . \tag{68}$$

Théorème IV. Soit a *un nombre entier supérieur ou égal à* 3, x *une quantité, dont la valeur absolue est inférieure à* 1, *et désignons par* ε *l'unité positive ou négative, nous aurons*

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^{(a-2)r})(1+\varepsilon x^{(a-2)r-a+3})(1+\varepsilon x^{(a-2)r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \varepsilon^r x^{P(a,r)} .$$

Introduisons dans cette équation successivement

$$a=3 , \ \varepsilon=+1 ; \ a=4 , \ \varepsilon=-1 ; \ a=5 , \ \varepsilon=-1 ; \ a=6 , \ \varepsilon=+1 , \tag{69}$$

nous en déduirons les quatre formules suivantes:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^r)(1+x^r)(1+x^{r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(3,r)} , \tag{70}$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^{2r})(1-x^{2r-1})(1-x^{2r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} , \tag{71}$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^{3r})(1-x^{3r-2})(1-x^{3r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} , \tag{72}$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^{4r})(1+x^{4r-3})(1+x^{4r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)} . \tag{73}$$

Maintenant nous simplifierons les premiers membres de ces équations. Puisqu'on obtient tous les nombres entiers positifs des deux expressions $2r-1$, $2r$, si l'on y remplace r successivement par tous les nombres entiers positifs, on aura l'identité

$$(74) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r-1}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) = \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{r}) \ ,$$

d'où l'on tire, après division par le second membre,

$$(75) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r-1}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1+x^{r}) = 1 \ .$$

En posant l'équation (70) sous la forme

$$(76) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1+x^{r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=-1} x^{P(3,r)} + \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} \ ,$$

et en remplaçant r par $r+1$ dans le second produit du premier membre et r par $-r-1$ dans la première somme du second membre, nous en obtiendrons

$$(77) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) \cdot \prod_{r=0}^{r=\infty}(1+x^{r}) = \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,-r-1)} + \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} \ .$$

Par application de l'équation (19) et en divisant les deux membres par 2, nous déduirons de l'équation (77)

$$(78) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1+x^{r}) = \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)}$$

ou, d'après l'identité (75),

$$(79) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-x^{2r}}{1-x^{2r-1}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} \ ,$$

formule, qui peut se mettre sous la forme

$$(80) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{r})^{(-1)^r} = \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} \ .$$

D'après l'équation (71) on a

$$(81) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r-1})^2 = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)} \ ,$$

et en y appliquant la formule (75), nous aurons

$$(82) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{2r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{(1+x^r)^2} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)}$$

ou

$$(83) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-x^r}{1+x^r} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)} .$$

Nous avons d'après l'équation (72)

$$(84) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{3r-2})(1-x^{3r-1})(1-x^{3r}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(5,r)} ;$$

puisqu'on obtient des trois expressions $3r-2$, $3r-1$, $3r$ tous les nombres entiers positifs et chaque nombre une seule fois par les substitutions $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$, nous déduirons de l'équation (84) la formule

$$(85) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^r) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(5,r)} .$$

Posons l'équation (73) sous la forme

$$(86) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{4r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1+x^{4r-3})(1+x^{4r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)} ;$$

des expressions $4r-3$, $4r-1$ on obtient tous les nombres positifs impairs par les substitutions $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$; par suite on obtiendra de l'équation (86)

$$(87) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-x^{4r}) \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty}(1+x^{2r-1}) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)}$$

ou

$$(88) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{(1-x^{4r})(1-x^{4r-2})}{1-x^{2r-1}} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)} ;$$

mais des expressions $4r-2$, $4r$ on obtient tous les nombres positifs pairs par les substitutions $r = 1, 2, 3, 4, \ldots$; l'équation (88) peut donc s'écrire

$$(89) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-x^{2r}}{1-x^{2r-1}} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)}$$

ou

$$(90) \qquad \prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^r)^{(-1)^r} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)} .$$

Des équations (80), (83), (85), (90) resulte ce théorème.

Théorème V. Si l'on désigne par x *une quantité, qui satisfait à la condition*

$$|x| < 1 ,$$

on aura

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^r)^{(-1)^r} = \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} ,$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-x^r}{1+x^r} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} ,$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^r) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} ,$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} (1-x^r)^{(-1)^r} = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} x^{P(6,r)} .$$

De la première et de la quatrième de ces formules on peut conclure, que tous les nombres hexagonaux coincident tout-à-fait aux nombres triangulaires, dont le rang est positif ou nul.

Par différentiation logarithmique on déduit des trois premières formules du théorème V

$$(91) \qquad \frac{d}{dx} \log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r-1} r x^{r-1}}{1-x^r} ,$$

$$(92) \qquad \frac{d}{dx} \log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{2 r x^{r-1}}{1-x^{2r}} ,$$

$$(93) \qquad \frac{d}{dx} \log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{r x^{r-1}}{1-x^r} .$$

Au moyen de ces formules les dérivées des logarithmes de trois séries, ordonnées suivant les puissances positives et entières de la variable x, sont développées en des fractions partielles. Maintenant nous déduirons

un développement semblable pour ces logarithmes. De l'équation (91) on tire, après une transformation legère du second membre,

$$(94) \qquad \frac{d}{dx}\log\sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1} r\, x^{r-1} \sum_{s=1}^{s=\infty} x^{r(s-1)}$$

$$= \sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1} r\, x^{rs-1} = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^{s-1}}{(1+x^s)^2}$$

et par intégration

$$(95) \qquad \log\sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^s}{s(1+x^s)} .$$

D'après l'équation (92) on a

$$(96) \qquad \frac{d}{dx}\log\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} 2r\, x^{r-1}\sum_{s=1}^{s=\infty} x^{2(s-1)r}$$

$$= -2\sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{r=1}^{r=\infty} r\, x^{(2s-1)r-1} = -2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^{2s-2}}{(1-x^{2s-1})^2} ,$$

d'où l'on tire, par intégration,

$$(97) \qquad \log\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)} = -2\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^{2s-1}}{(2s-1)(1-x^{2s-1})} .$$

De l'équation (93) on déduit

$$(98) \qquad \frac{d}{dx}\log\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} r\, x^{r-1}\sum_{s=1}^{s=\infty} x^{(s-1)r}$$

$$= -\sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{r=1}^{r=\infty} r\, x^{rs-1} = -\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^{s-1}}{(1-x^s)^2}$$

et par intégration

$$(99) \qquad \log\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{x^s}{s(1-x^s)} .$$

Nous résumons les formules (95), (97), (99) dans le théorème suivant.

Théorème VI. Soit x *une quantité, qui satisfait à l'inégalité*

$$|x| < 1 ,$$

on aura

$$\log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s(1+x^s)} ,$$

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{2s-1}}{(2s-1)(1-x^{2s-1})} ,$$

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^s}{s(1-x^s)} .$$

Cela établi, nous transformerons les seconds membres de ces trois équations en des séries, ordonnées suivant les puissances positives et entières de la variable x. De la première équation on tire

$$\log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} x^{rs} , \tag{100}$$

ou, en changeant l'ordre de sommation dans le second membre,

$$\log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{rs}}{s} . \tag{101}$$

De même nous obtiendrons de la seconde formule du théorème précédent

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{2s-1} \sum_{r=1}^{r=\infty} x^{r(2s-1)} \tag{102}$$

ou

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -2 \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{r(2s-1)}}{2s-1} . \tag{103}$$

Puisque la quantité $1-(-1)^s$ est égale à 0 ou à 2, suivant que le nombre s est pair ou impair, l'équation (103) peut s'écrire

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1-(-1)^s}{s} x^{rs} . \tag{104}$$

De la troisième formule du théorème précédent on déduit

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{r=\infty} x^{rs} \tag{105}$$

ou

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{rs}}{s} \,. \tag{106}$$

Pour la transformation des seconds membres des trois équations (101), (104), (106) nous nous servirons d'une formule générale, que nous démontrerons ici. Désignons pour cet effet par $f(r)$ et $f_1(r)$ deux fonctions bien déterminées pour tous les nombres entiers positifs r, et soit x une variable, on aura évidemment une égalité de la forme

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} f(r) f_1(s) x^{rs} = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k x^k \tag{107}$$

pour toutes les valeurs de la variable x, pour lesquelles les séries convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes. En effet, attribuons dans le premier membre à r et à s toutes les valeurs entières et positives, et combinons entre elles ces valeurs de toutes les manières possibles, nous n'obtiendrons de l'exposant rs que des nombres entiers positifs k; quant au coefficient c_k, celui-ci sera évidemment déterminé par l'égalité

$$c_k = \sum_r \sum_s f(r) f_1(s) \,, \tag{108}$$

où les nombres entiers positifs r et s sont combinés entre eux de toutes les manières, qui sont compatibles avec la condition

$$rs = k \,; \tag{109}$$

si l'on désigne par d un diviseur positif du nombre k et par d' le diviseur complémentaire, de sorte que l'on aura toujours

$$dd' = k \,, \tag{110}$$

l'équation (108) pourra donc s'écrire, d'après la notation de KRONECKER,

$$c_k = \sum_{dd'=k} f(d) f_1(d') \,, \tag{111}$$

où d est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre k, et où d' est déterminé par la formule (110) pour chaque diviseur d.

Introduisons maintenant l'expression du coefficient c_k, donnée par l'équation (111), dans l'équation (107), nous en obtiendrons la formule

$$(112) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r) \sum_{s=1}^{s=\infty} f_1(s) x^{rs} = \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k \sum_{dd'=k} f(d) f_1(d') \ ,$$

dont nous ferons usage pour la transformation des seconds membres des équations (101), (104), (106).

1) Substituons dans l'équation (112)

$$(113) \qquad f(r) = (-1)^{r-1} \ , \ f_1(s) = \frac{1}{s} \ ,$$

nous en obtiendrons

$$(114) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{rs}}{s} = \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k \sum_{dd'=k} \frac{(-1)^{d-1}}{d'} \ ,$$

et par application de cette formule au second membre de l'équation (101) et en ayant égard à la relation $dd' = k$, nous en déduirons

$$(115) \qquad \log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k} \sum_{dd'=k} (-1)^{d-1} d \ .$$

Posons pour tout nombre entier positif k

$$(116) \qquad \psi_3(k) = \sum_{dd'=k} (-1)^{d-1} d \ ,$$

de sorte que $\psi_3(k)$ soit égal à la somme des diviseurs impairs du nombre k, diminuée de la somme des diviseurs pairs du même nombre, l'équation (115) peut s'écrire

$$(117) \qquad \log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_3(k) x^k}{k} \ .$$

2) Par les substitutions

$$(118) \qquad f(r) = 1 \ , \ f_1(s) = \frac{1 - (-1)^s}{s}$$

nous déduirons de l'équation (112)

$$(119) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1-(-1)^s}{s} x^{rs} = \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k \sum_{dd'=k} \frac{1-(-1)^{d'}}{d'} \; ;$$

par suite l'équation (104) peut s'écrire

$$(120) \qquad \log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k} \sum_{dd'=k} \{1-(-1)^{d'}\} d \; .$$

Par application de la notation

$$(121) \qquad \psi_4(k) = \sum_{dd'=k} \{1-(-1)^{d'}\} d$$

nous obtiendrons de la formule (120)

$$(122) \qquad \log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_4(k) x^k}{k} \; .$$

3) Substituons dans l'équation (112)

$$(123) \qquad f(r) = 1 \; , \; f_1(s) = \frac{1}{s} \; ,$$

nous en déduirons

$$(124) \qquad \sum_{r=1}^{r=\infty} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{x^{rs}}{s} = \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k \sum_{dd'=k} \frac{1}{d'} \; ,$$

et par application de cette formule au second membre de l'équation (106), nous obtiendrons

$$(125) \qquad \log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k} \sum_{dd'=k} d \; .$$

Posons pour tout nombre entier positif k

$$(126) \qquad \psi_5(k) = \sum_{dd'=k} d \; ,$$

de sorte que $\psi_5(k)$ soit égal à la somme des diviseurs positifs du nombre k, l'équation (125) peut se mettre sous la forme

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_5(k)x^k}{k} . \tag{127}$$

Des équations (117), (122), (127) resulte le théorème suivant.

Théorème VII. Désignons par x *une quantité, qui satisfait à l'inégalité*

$$|x| < 1 ;$$

en employant les notations

$$\psi_3(k) = \sum_{dd'=k} (-1)^{d-1} d , \quad \psi_4(k) = \sum_{dd'=k} \{1-(-1)^{d'}\} d , \quad \psi_5(k) = \sum_{dd'=k} d ,$$

nous aurons

$$\log \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_3(k)x^k}{k} ,$$

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(4,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_4(k)x^k}{k} ,$$

$$\log \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi_5(k)x^k}{k} .$$

III. Sur les diviseurs des nombres entiers.

Dans ce paragraphe nous désignerons par $\varphi(a,k)$ le nombre des diviseurs polygonaux de l'ordre a du nombre entier positif k. Si l'on désigne par $E(x)$, où x est une quantité réelle quelconque, le plus grand des nombres entiers, qui ne surpassent pas x, la différence

$$E\left(\frac{k}{P(a,r)}\right) - E\left(\frac{k-1}{P(a,r)}\right)$$

sera évidemment égale à 1 ou à 0, suivant que $P(a,r)$ divise ou ne divise pas le nombre k, pourvu que $P(a,r)$ ne s'annule pas. En y faisant r successivement égal à tous les nombres entiers, pour lesquels $P(a,r)$ obtient des valeurs positives et chaque valeur une seule fois, nous trouverons, que la somme

$$\sum_r \left\{ E\left(\frac{k}{P(a,r)}\right) - E\left(\frac{k-1}{P(a,r)}\right)\right\}$$

sera égale à la totalité des nombres polygonaux de l'ordre a, qui divisent le nombre k; on aura donc

$$\varphi(a,k) = \sum_r \left\{ E\left(\frac{k}{P(a,r)}\right) - E\left(\frac{k-1}{P(a,r)}\right)\right\} , \tag{128}$$

où r est égal successivement à tous les nombres entiers positifs pour $a = 3$ et pour $a = 4$, mais égal à tous les nombres entiers positifs et négatifs pour $a \geqq 5$.

Remplaçons k successivement par $1, 2, 3, \ldots n-1, n$ dans l'équation (128), nous obtiendrons, par addition des égalités ainsi obtenues,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \sum_r \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ E\left(\frac{k}{P(a,r)}\right) - E\left(\frac{k-1}{P(a,r)}\right)\right\} \tag{129}$$

ou, en exécutant la sommation par rapport à k,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \sum_r E\left(\frac{n}{P(a,r)}\right) , \tag{130}$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque.

Puisque le nombre $E\left(\frac{n}{P(a,r)}\right)$ s'évanouit pour toutes les valeurs du nombre r, pour lesquelles $P(a,r) > n$, il suffit, que dans le second membre de l'équation précédente r parcourt les nombres entiers, qui satisfont aux inégalités

$$1 \leqq P(a,r) \leqq n , \tag{131}$$

et, en outre, à l'inégalité

$$r \geqq 1 , \tag{132}$$

si a est égal à 3 ou à 4.

Maintenant nous distinguerons les trois cas suivants:

1) Pour $a = 3$ on déduit des formules (130), (131), (132)

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(3,k) = \sum_{r=1}^{r=r_1} E\left(\frac{n}{P(3,r)}\right) , \tag{133}$$

où l'on désigne par r_1 le plus grand des nombres entiers positifs, qui satisfont à l'inégalité

$$P(3,r_1) \leqq n \ ; \tag{134}$$

par suite le nombre positif r_1 sera déterminé par les inégalités

$$P(3,r_1) \leqq n < P(3,r_1+1) \tag{135}$$

ou

$$\frac{r_1^2+r_1}{2} \leqq n < \frac{r_1^2+3r_1+2}{2} \ . \tag{136}$$

D'après la définition on a

$$E(x) = x - \varrho \ , \tag{137}$$

où $0 \leqq \varrho < 1$, et par application de cette formule nous obtiendrons de l'équation (133)

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(3,k) = n \sum_{r=1}^{r=r_1} \frac{1}{P(3,r)} - \sum_{r=1}^{r=r_1} \varrho_r \ , \tag{138}$$

où $0 \leqq \varrho_r < 1$, ou

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(3,k) = \sum_{r=1}^{r=r_1} \frac{1}{P(3,r)} - \frac{\varrho r_1}{n} \ , \tag{139}$$

où la quantité ϱ, qui est une valeur moyenne des quantités ϱ_r, est comprise entre 0 et 1.

En faisant croître n vers l'infini positif, il s'ensuit des inégalités (136) que r_1 tend aussi vers l'infini, mais que $\frac{r_1}{n}$ tend vers zéro; par suite nous obtiendrons de l'équation (139) pour $n = \infty$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(3,k) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(3,r)} \tag{140}$$

ou, d'après le théorème II,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(3,k) = 2 \ . \tag{141}$$

2) Pour $a = 4$ nous obtiendrons des formules (130), (131), (132)

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(4,k) = \sum_{r=1}^{r=r_1} E\left(\frac{n}{P(4,r)}\right) , \tag{142}$$

où r_1 est le plus grand des nombres entiers positifs, qui satisfont à l'inégalité

$$P(4,r_1) \leqq n , \tag{143}$$

et, par conséquent, le nombre entier positif r_1 sera donné par les inégalités

$$P(4,r_1) \leqq n < P(4,r_1+1) \tag{144}$$

ou

$$r_1^2 \leqq n < (r_1+1)^2 . \tag{145}$$

Appliquons maintenant la formule (137) à l'équation (142) nous en déduirons

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(4,k) = n \sum_{r=1}^{r=r_1} \frac{1}{P(4,r)} - \sum_{r=1}^{r=r_1} \varrho_r , \tag{146}$$

où $0 \leqq \varrho_r < 1$, et par suite

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(4,k) = \sum_{r=1}^{r=r_1} \frac{1}{P(4,r)} - \frac{\varrho^{r_1}}{n} , \tag{147}$$

où la quantité ϱ, qui est la moyenne arithmétique des quantités ϱ_r, est une fraction propre.

Pour $n = \infty$ ou déduit de l'équation (147), en ayant égard aux inégalités (145),

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(4,k) = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{1}{P(4,r)} \tag{148}$$

ou, d'après le théorème II,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(4,k) = \frac{\pi^2}{6} . \tag{149}$$

3) Pour $a \geqq 5$ on déduit des formules (130), (131)

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \sum_{r=-r_0}^{r=r_1}{}' E\left(\frac{n}{P(a,r)}\right) , \tag{150}$$

où l'on désigne par $-r_0$ le plus petit des nombres entiers négatifs, qui satisfont à l'inégalité

$$P(a,-r_0) \leqq n , \tag{151}$$

et par r_1 le plus grand des nombres entiers positifs, qui satisfont à l'inégalité

$$P(a,r_1) \leqq n . \tag{152}$$

Pour la détermination des nombres entiers positifs r_0 et r_1 nous aurons donc les inégalités

$$P(a,-r_0) \leqq n < P(a,-r_0-1) \tag{153}$$

et

$$P(a,r_1) \leqq n < P(a,r_1+1) \tag{154}$$

ou

$$\frac{(a-2)r_0^2 + (a-4)r_0}{2} \leqq n < \frac{(a-2)(r_0+1)^2 + (a-4)(r_0+1)}{2} \tag{155}$$

et

$$\frac{(a-2)r_1^2 - (a-4)r_1}{2} \leqq n < \frac{(a-2)(r_1+1)^2 - (a-4)(r_1+1)}{2} . \tag{156}$$

Par application de la formule (137) à l'équation (150) nous en déduirons

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = n \sum_{r=-r_0}^{r=r_1}{}' \frac{1}{P(a,r)} - \sum_{r=-r_0}^{r=r_1}{}' \varrho_r , \tag{157}$$

où $0 \leqq \varrho_r < 1$, ou en divisant par n

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \sum_{r=-r_0}^{r=r_1}{}' \frac{1}{P(a.r)} - \frac{\varrho(r_0+r_1)}{n} , \tag{158}$$

où ϱ désigne une fraction propre. En faisant croître n vers l'infini positif, il s'ensuit des inégalités (155) et (156), que les nombres positifs

r_0 et r_1 tendent vers l'infini, et que les quotients $\frac{r_0}{n}$ et $\frac{r_1}{n}$ tendent vers zéro. Par conséquent nous obtiendrons de l'équation (158) pour $n = \infty$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}{}' \frac{1}{P(a,r)}$$

ou, d'après le théorème II,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a,k) = \frac{2(a-2)}{(a-4)^2} + \frac{2\pi}{a-4} \cot \frac{2\pi}{a-2} . \tag{159}$$

Dés équations (141), (149), (159) nous obtiendrons le théorème suivant.

Théorème VIII. Chaque nombre entier positif a, *en moyenne*, 2 *diviseurs triangulaires et* $\frac{\pi^2}{6}$ *diviseurs quadratiques; si* a *est supérieur ou égal à* 5, *le nombre des diviseurs polygonaux de l'ordre* a *d'un nombre entier est, en moyenne, égal à*

$$\frac{2(a-2)}{(a-4)^2} + \frac{2\pi}{a-4} \cot \frac{2\pi}{a-2} .$$

Maintenant nous ferons usage du théorème VII pour la déduction de quelques propriétés des fonctions arithmétiques $\psi_3(k)$, $\psi_4(k)$, $\psi_5(k)$. Nous donnons ici une table des valeurs de ces trois fonctions pour $1 \leqq k \leqq 17$.

Table des fonctions $\psi_3(k)$, $\psi_4(k)$, $\psi_5(k)$, pour $1 \leqq k \leqq 17$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\psi_3(k)$	1	−1	4	−5	6	−4	8	−13	13	−6	12	−20	14	−8	24	−29	18
$\psi_4(k)$	2	4	8	8	12	16	16	16	26	24	24	32	28	32	48	32	36
$\psi_5(k)$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	18

De la première formule du théorème VII on tire par différentiation

$$(160)\qquad \sum_{r=0}^{r=\infty} x^{P(3,r)} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi_3(k) x^{k-1} = \sum_{r=0}^{r=\infty} P(3,r) x^{P(3,r)-1}$$

ou, en multipliant les deux membres par x,

$$(161)\quad (1+x+x^3+x^6+x^{10}+\ldots) \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi_3(k) x^k = \sum_{r=1}^{r=\infty} P(3,r) x^{P(3,r)} .$$

Soit n un nombre entier positif quelconque, et égalons entre eux les coefficients de x^n dans les deux membres de l'équation (161). Le coefficient de x^n dans le premier membre est égal à la somme

$$\psi_3(n) + \psi_3(n-1) + \psi_3(n-3) + \psi_3(n-6) + \psi_3(n-10) + \ldots$$

qui doit être continuée tant que les nombres n, $n-1$, $n-3$, $n-6$, ... sont positifs. Dans le second membre de l'équation (161) le coefficient de x^n est égal à 0, si n n'est pas un nombre triangulaire, mais d'ailleurs égal à n. Par là nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème IX. Soit n *un nombre entier positif, et formons une suite de nombres entiers*

$$n\ ,\ n-1\ ,\ n-3\ ,\ n-6\ ,\ n-10\ ,\ \ldots .$$

de la manière, qu'on diminue le nombre n *par tous les nombres triangulaires inférieurs à* n, *la somme*

$$\psi_3(n) + \psi_3(n-1) + \psi_3(n-3) + \psi_3(n-6) + \psi_3(n-10) + \ldots$$

sera égale à 0, *si* n *n'est pas un nombre triangulaire, mais égale à* n, *si* n *est un nombre triangulaire.*

Exemple 1. Pour $n = 9, 10, 11$ on en obtiendra

$$\psi_3(9) + \psi_3(8) + \psi_3(6) + \psi_3(3) = 0 ,$$
$$\psi_3(10) + \psi_3(9) + \psi(7) + \psi_3(4) = 10 ,$$
$$\psi_3(11) + \psi_3(10) + \psi_3(8) + \psi_3(5) + \psi_3(1) = 0 .$$

Exemple 2. Pour $n = 14, 15, 16$ on aura

$$\psi_3(14) + \psi_3(13) + \psi_3(11) + \psi_3(8) + \psi_3(4) = 0 ,$$
$$\psi_3(15) + \psi_3(14) + \psi_3(12) + \psi_3(9) + \psi_3(5) = 15 ,$$
$$\psi_3(16) + \psi_3(15) + \psi_3(13) + \psi_3(10) + \psi_3(6) + \psi_3(1) = 0 .$$

Par différentiation nous obtiendrons de la seconde formule du théorème VII

$$(162)\quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r x^{P(4,r)} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty}\psi_4(k)x^{k-1} = -\sum_{r=-\infty}^{r=\infty}(-1)^r P(4,r)\,x^{P(4,r)-1}\ ,$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres par $\frac{x}{2}$,

$$(163)\quad \left(\frac{1}{2}-x+x^4-x^9+x^{16}-\ldots\right)\sum_{k=1}^{k=\infty}\psi_4(k)x^k = -\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r P(4,r)\,x^{P(4,r)}\ .$$

Maintenant nous égalerons entre eux les coefficients de x^n des deux membres de cette équation, n étant un nombre entier positif quelconque. Le coefficient de x^n dans le premier membre est égal à la somme

$$\frac{\psi_4(n)}{2}-\psi_4(n-1)+\psi_4(n-4)-\psi_4(n-9)+\psi_4(n-16)-\ldots\ ,$$

qui doit être continuée tant que les nombres n , $n-1$, $n-4$, $n-9$, ... restent positifs. Le coefficient de x^n dans le second membre de l'équation (163) est égal à 0 , si n n'est pas un nombre carré, mais égal à n , si n est un nombre carré de rang impair, et égal à $-n$, si n est un nombre carré de rang pair. Par suite, le coefficient de x^n est égal à $(-1)^{n-1}n$, si n est un nombre carré quelconque. De ce qui précède resulte ce théorème.

Théorème X. Désignons par n *un nombre entier positif quelconque, et formons une suite de nombres entiers*

$$n\ ,\ n-1\ ,\ n-4\ ,\ n-9\ ,\ n-16\ ,\ldots.$$

de la manière, qu'on diminue le nombre n *par tous les nombres carrés inférieurs à* n , *la somme*

$$\frac{\psi_4(n)}{2}-\psi\,(n-1)+\psi_4(n-4)-\psi_4(n-9)+\psi_4(n-16)-\ldots.$$

sera égale à 0 , *si* n *n'est pas un nombre carré, mais égale à* $(-1)^{n-1}n$, *si* n *est un nombre carré.*

Exemple 1. Pour $n = 8, 9, 10$ nous obtiendrons de ce théorème

$$\frac{\psi_4(8)}{2} - \psi_4(7) + \psi_4(4) = 0 ,$$

$$\frac{\psi_4(9)}{2} - \psi_4(8) + \psi_4(5) = 9 ,$$

$$\frac{\psi_4(10)}{2} - \psi_4(9) + \psi_4(6) - \psi_4(1) = 0 .$$

Exemple 2. Pour $n = 15, 16, 17$ nous aurons

$$\frac{\psi_4(15)}{2} - \psi_4(14) + \psi_4(11) - \psi_4(6) = 0 ,$$

$$\frac{\psi_4(16)}{2} - \psi_4(15) + \psi_4(12) - \psi_4(7) = -16 ,$$

$$\frac{\psi_4(17)}{2} - \psi_4(16) + \psi_4(13) - \psi_4(8) + \psi_4(1) - 0 .$$

De même nous obtiendrons de la troisième formule du théorème VII, par différentiation,

$$(164) \quad \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r x^{P(5,r)} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi_5(k) x^{k-1} = - \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r P(5,r) x^{P(5,r)-1}$$

ou, en multipliant les deux membres par x,

$$(165) \quad (1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots) \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi_5(k) x^k = - \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} (-1)^r P(5,r) x^{P(5,r)} .$$

Soit n un nombre entier positif quelconque, et égalons entre eux les coefficients de x^n dans les deux membres de l'équation (165). Le coefficient de x^n dans le premier membre est égal à la somme

$$\psi(n) - \psi_5(n-1) - \psi_5(n-2) + \psi_5(n-5) + \psi_5(n-7) - \ldots ,$$

qui doit être continuée tant que les nombres n, $n-1$, $n-2$, $n-5$, $n-7$, ... sont positifs. Dans le second membre de l'équation (165) le

coefficient de x^n est égal à 0, si n n'est pas un nombre pentagonal, mais égal à n, si n est un nombre pentagonal de rang impair, et égal à $-n$, si n est un nombre pentagonal de rang pair. Nous aurons donc le théorème suivant.

Théorème XI. Soit n *un nombre entier positif, et formons une suite de nombres entiers*

$$n,\ n-1,\ n-2,\ n-5,\ n-7,\ n-12,\ n-15,\ \ldots.$$

de la manière, qu'on diminue le nombre n *par tous les nombres pentagonaux inférieurs à* n, *la somme*

$$\psi_5(n) - \psi_5(n-1) - \psi_5(n-2) + \psi_5(n-5) + \psi_5(n-7) - \ldots.$$

sera égale à 0, *si* n *n'est pas un nombre pentagonal, mais égal à* n, *si* n *est un nombre pentagonal de rang impair, et égal à* $-$n, *si* n *est un nombre pentagonal de rang pair.*

Exemple 1. Pour $n = 6, 7, 8$ nous en obtiendrons

$$\psi_5(6) - \psi_5(5) - \psi_5(4) + \psi_5(1) = 0\ ,$$
$$\psi_5(7) - \psi_5(6) - \psi_5(5) + \psi_5(2) = -7\ ,$$
$$\psi_5(8) - \psi_5(7) - \psi_5(6) + \psi_5(3) + \psi_5(1) = 0\ .$$

Exemple 2. Pour $n = 11, 12, 13$ nous aurons

$$\psi_5(11) - \psi_5(10) - \psi_5(9) + \psi_5(6) + \psi_5(4) = 0\ ,$$
$$\psi_5(12) - \psi_5(11) - \psi_5(10) + \psi_5(7) + \psi_5(5) = 12\ ,$$
$$\psi_5(13) - \psi_5(12) - \psi_5(11) + \psi_5(8) + \psi_5(6) - \psi_5(1) = 0\ .$$

IV. Sur une généralisation des sommes de Gauss.

Désignons par $\varphi(x)$ une fonction réelle ou complexe d'une variable réelle x, et supposons, que $\varphi(x)$ soit finie et continue pour $0 \leqq x \leqq 1$, et que la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction ne possèdent que des nombres limités de maxima et de minima dans cet intervalle. En posant

$$a_m = 2\int_0^1 \varphi(t)\cos 2m\pi t\,dt \tag{166}$$

pour $m \geqq 0$, et

$$b_m = 2\int_0^1 \varphi(t)\sin 2m\pi t\,dt \tag{167}$$

pour $m \geqq 1$, on a les formules connues

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty}(a_m \cos 2m\pi x + b_m \sin 2m\pi x) \tag{168}$$

pour $0 < x < 1$, et

$$\frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} a_m\ . \tag{169}$$

En définissant pour tous les nombres entiers m les quantités a_m et b_m au moyen des égalités (166) et (167), on aura évidemment

$$a_{-m} = a_m\ ,\ b_{-m} = -b_m\ ,\ b_0 = 0\ , \tag{170}$$

et, par suite, les formules (168) et (169) pourront s'écrire de la manière suivante:

$$2\varphi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty}(a_m \cos 2m\pi x + b_m \sin 2m\pi x) \tag{171}$$

pour $0 < x < 1$ et

$$\varphi(0)+\varphi(1) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} a_m\ . \tag{172}$$

Dans ce mémoire nous ferons usage de la seconde de ces formules. En introduisant dans l'équation (172) la valeur du coefficient a_m, donnée par l'équation (166), nous en obtiendrons

$$\varphi(0)+\varphi(1) = 2\sum_{m=-\infty}^{m=\infty}\int_0^1 \varphi(t)\cos 2m\pi t\,dt\ , \tag{173}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(0)+\varphi(1) = \lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\int_0^1 2\varphi(t)\cos 2m\pi t\,dt \tag{174}$$

ou

$$(175)\quad \varphi(0)+\varphi(1)=\lim_{N=\infty}\left\{\sum_{m=-N}^{m=N}\int_0^1\varphi(t)e^{2m\pi ti}dt+\sum_{m=-N}^{m=N}\int_0^1\varphi(t)e^{-2m\pi ti}dt\right\}$$

ou, si l'on remplace m par $-m$ dans la première somme dans le second membre,

$$(176)\qquad \frac{\varphi(0)+\varphi(1)}{2}=\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\int_0^1\varphi(t)e^{-2m\pi ti}dt\ ,$$

formule, qui subsiste sous la supposition, que la fonction $\varphi(x)$ soit finie et continue et n'ait qu'un nombre limité de maxima et de minima dans l'intervalle $0\leqq x\leqq 1$.

Cela établi, désignons par h un nombre entier positif et par $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons, que $f(x)$ soit finie et continue, et que la partie réelle et la partie imaginaire de cette fonction n'aient que des nombres limités de maxima et de minima dans l'intervalle $0\leqq x\leqq h$.

En désignant par k un quelconque des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots\ h-2,\ h-1\ ,$$

la fonction $f(x+k)$ aura évidemment ces mêmes propriétés dans l'intervalle $0\leqq x\leqq 1$; introduisons donc

$$(177)\qquad \varphi(x)=f(x+k)$$

dans l'équation (176), nous en déduirons la formule

$$(178)\qquad \frac{f(k)+f(k+1)}{2}=\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\int_0^1 f(t+k)e^{-2m\pi ti}dt\ ,$$

qui subsiste pour $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ h-1$. Par suite nous obtiendrons de l'équation (178)

$$(179)\qquad \sum_{k=0}^{k=h-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}=\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\sum_{k=0}^{k=h-1}\int_0^1 f(t+k)e^{-2m\pi ti}dt$$

ou, en substituant $t=x-k$ dans l'intégrale du second membre et en observant, que k et m sont des nombres entiers,

$$(180)\qquad \sum_{k=0}^{k=h-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}=\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\sum_{k=0}^{k=h-1}\int_{k}^{k+1}f(x)e^{-2m\pi xi}\,dx$$

ou, puisque la fonction sous le signe d'intégration ne dépend pas de k,

$$(181)\qquad \sum_{k=0}^{k=h-1}\frac{f(k)+f(k+1)}{2}=\lim_{N=\infty}\sum_{m=-N}^{m=N}\int_{0}^{h}f(x)e^{-2m\pi xi}\,dx\ .$$

De cette égalité KRONECKER a déduit la formule de réciprocité concernant les sommes de GAUSS [1]). En suivant la méthode de KRONECKER, nous déduirons de l'équation (181) une formule plus générale. Désignons pour cet effet par λ et μ deux nombres entiers positifs et par ϱ un nombre entier arbitraire, et soit p un nombre entier positif croissant vers l'infini. Par les substitutions

$$(182)\qquad f(x)=e^{-\frac{(\lambda x^2+\varrho x)\pi i}{\mu}},\quad h=2\mu\ ,\quad N=2p\lambda$$

nous obtiendrons de l'équation (181), puisque $f(2\mu)=f(0)$,

$$(183)\qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1}e^{-\frac{(\lambda k^2+\varrho k)\pi i}{\mu}}=\lim_{p=\infty}\sum_{m=-2p\lambda}^{m=2p\lambda}\int_{0}^{2\mu}e^{-\frac{\lambda x^2\pi i}{\mu}-\frac{\varrho x\pi i}{\mu}-2mx\pi i}\,dx\ .$$

Quant au terme du second membre, correspondant à la valeur $m=2p\lambda$, on peut facilement s'assurer, que celui-ci s'évanouira pour $p=\infty$, et par application de la notation

$$(184)\qquad S=\sum_{r=0}^{r=2\mu-1}e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}}$$

nous déduirons ainsi de l'équation (183)

$$(185)\qquad S=\lim_{p=\infty}\sum_{m=-2p\lambda}^{m=2p\lambda-1}\int_{0}^{2\mu}e^{-\frac{\lambda x^2\pi i}{\mu}-\frac{\varrho x\pi i}{\mu}-2mx\pi i}\,dx\ .$$

Transformons maintenant la somme finie, qui se trouve dans le second membre de cette équation, au moyen de la substitution

$$(186)\qquad m=2\lambda s+r\ ,$$

1) Voir Vorlesungen über Mathematik von L. KRONECKER. Erster Band. Herausgegeben von E. NETTO. Leipzig 1894, p. 110—115.

nous en déduirons

$$(187) \qquad S = \lim_{p=\infty} \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} \sum_{s=-p}^{s=p-1} \int_0^{2\mu} e^{-\frac{\lambda x^2 \pi i}{\mu} - \frac{\varrho x \pi i}{\mu} - 2(2\lambda s + r) x \pi i} dx ,$$

d'où l'on tire, en posant dans l'intégrale

$$(188) \qquad x = y - 2\mu s$$

et en observant, que λ, μ, ϱ, r, s sont des nombres entiers réels,

$$(189) \qquad S = \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} \lim_{p=\infty} \sum_{s=-p}^{s=p-1} \int_{2\mu s}^{2\mu(s+1)} e^{-\frac{\lambda \pi i y^2}{\mu} - \frac{\varrho \pi i y}{\mu} - 2r\pi i y} dy .$$

De cette équation on déduit, puisque la fonction sous le signe d'intégration ne dépend pas de s,

$$(190) \qquad S = \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} \lim_{p=\infty} \int_{-2\mu p}^{2\mu p} e^{-\frac{\lambda \pi i y^2}{\mu} - \frac{\varrho \pi i y}{\mu} - 2r\pi i y} dy$$

et, par suite, μ étant un nombre positif,

$$(191) \qquad S = \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda \pi i y^2}{\mu} - \frac{\varrho \pi i y}{\mu} - 2r\pi i y} dy .$$

En transformant l'intégrale, qui se trouve dans le second membre de cette équation, par la substitution

$$(192) \qquad y = x \left| \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right| - \frac{\varrho}{2\lambda} - \frac{\mu r}{\lambda} ,$$

nous en obtiendrons

$$(193) \qquad S = \left| \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right| \cdot \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi i x^2 + \frac{\pi i}{\lambda}\left(\mu r^2 + \varrho r + \frac{\varrho^2}{4\mu}\right)} dx$$

ou, d'après l'équation (184),

$$(194) \qquad \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2 + \varrho r)\pi i}{\mu}} = \left| \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \right| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi i x^2} dx \cdot e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \cdot \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2 + \varrho r)\pi i}{\lambda}} .$$

Pour $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\varrho = 0$ on en tire

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi i x^2} dx = \frac{|\sqrt{2}|}{1+i}, \tag{195}$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (194)

$$\left|\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\right| \cdot \frac{1+i}{|\sqrt{2}|} \cdot \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2+\varrho r)\pi i}{\lambda}}. \tag{196}$$

Si l'on désigne, en général, par $(\sqrt{z})$ celle des deux racines carrées de la quantité z, dont la partie réelle est positive ou nulle, en observant, que dans le dernier cas la partie imaginaire sera positive, l'équation (196) peut se mettre sous la forme

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2+\varrho r)\pi i}{\lambda}}. \tag{197}$$

Nous avons démontré cette formule pour tous les nombres entiers positifs λ et μ et pour tous les nombres entiers réels ϱ. Maintenant nous montrerons, comment l'égalité (197) se modifie dans les cas, ou λ et μ prennent des valeurs négatives. En remplaçant λ, μ, ϱ par μ, $-\lambda$, $-\varrho$ dans l'équation (197), nous en tirerons

$$\left(\sqrt{\frac{\mu i}{-\lambda}}\right) \sum_{r=0}^{r=-2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2-\varrho r)\pi i}{\lambda}} = e^{-\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} \tag{198}$$

pour $\lambda < 0$, $\mu > 0$, ou

$$\left|\sqrt{\frac{\mu}{-\lambda}}\right| \cdot \frac{1+i}{|\sqrt{2}|} \cdot e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \cdot \sum_{r=0}^{r=-2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2-\varrho r)\pi i}{\lambda}} = \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} \tag{199}$$

ou

$$\left|\sqrt{\frac{-\lambda}{\mu}}\right| \cdot \frac{1-i}{|\sqrt{2}|} \cdot \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=-2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2-\varrho r)\pi i}{\lambda}} \tag{200}$$

et, par suite,

$$\left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2 \pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=-2\lambda-1} e^{\frac{(\mu r^2-\varrho r)\pi i}{\lambda}} \tag{201}$$

sous la supposition, que $\lambda < 0$, $\mu > 0$. Les formules (197) et (201) peuvent être remplacées par une seule formule

$$(202) \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2\pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2|\lambda|-1} e^{\frac{(\mu r^2+\varrho r \operatorname{sgn}\lambda)\pi i}{\lambda}},$$

qui subsiste pour $\lambda \gtrless 0$, $\mu > 0$. Cela fait, remplaçons λ, μ, ϱ par $-\lambda$, $-\mu$, $-\varrho$ dans l'équation (202), nous en obtiendrons

$$(203) \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=-2\mu-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2\pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2|\lambda|-1} e^{\frac{(\mu r^2-\varrho r \operatorname{sgn}\lambda)\pi i}{\lambda}}$$

pour $\lambda \gtrless 0$, $\mu < 0$. Cela établi, nous remplaçons les équations (202) et (203) par la seule formule

$$(204) \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=2|\mu|-1} e^{-\frac{(\lambda r^2+\varrho r)\pi i}{\mu}} = e^{\frac{\varrho^2\pi i}{4\lambda\mu}} \sum_{r=0}^{r=2|\lambda|-1} e^{\frac{(\mu r^2+\varrho r \operatorname{sgn}\lambda \operatorname{sgn}\mu)\pi i}{\lambda}},$$

qui subsiste pour tous les nombres entiers positifs ou négatifs λ, μ et pour tous les nombres entiers réels ϱ. Cette formule est une généralisation de la formule de reciprocité, donnée par KRONECKER,

$$(205) \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) \sum_{r=0}^{r=2|\mu|-1} e^{-\frac{\lambda r^2\pi i}{\mu}} = \sum_{r=0}^{r=2|\lambda|-1} e^{\frac{\mu r^2\pi i}{\lambda}},$$

laquelle se déduit de l'équation (204) par la substitution $\varrho = 0$.

Désignons, comme auparavant, par a un nombre entier, supérieur ou égal à 3, et par n un nombre entier positif quelconque, et introduisons dans l'équation (204)

$$(206) \qquad \lambda = 2 - a\,,\ \mu = n\,,\ \varrho = a - 4\,,$$

nous aurons

$$(207) \qquad |\lambda| = a - 2\,,\ \operatorname{sgn}\lambda = -1\,;\ |\mu| = n\,,\ \operatorname{sgn}\mu = +1\,,$$

et par suite nous obtiendrons de l'équation (204), en ayant égard à la définition (2),

$$(208) \qquad \left(\sqrt{\frac{(2-a)i}{n}}\right) \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(a,r)\pi i}{n}} = e^{-\frac{(a-4)^2\pi i}{4(a-2)n}} \sum_{r=0}^{r=2a-5} (-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}}.$$

Maintenant nous ferons quelques réductions dans cette formule. Nous avons d'abord

$$(209) \qquad \left(\sqrt{\frac{(2-a)i}{n}}\right) = \left|\sqrt{\frac{a-2}{2n}}\right|(1-i) \; ;$$

en outre la somme dans le second membre peut se mettre sous la forme

$$(210) \qquad \sum_{r=0}^{r=2a-5}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} = \sum_{r=0}^{r=a-3}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} + \sum_{r=a-2}^{r=2a-5}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}}$$

ou, si l'on remplace r par $r+a-2$ dans la dernière somme,

$$(211) \qquad \sum_{r=0}^{r=2a-5}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} = \{1+(-1)^{a(n-1)}\}\sum_{r=0}^{r=a-3}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} \; .$$

Par application des formules (209) et (211) à l'équation (208), nous en obtiendrons

$$(212) \qquad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(a,r)\pi i}{n}} =$$

$$\frac{1+(-1)^{a(n-1)}}{1-i} \cdot e^{-\frac{(a-4)^2\pi i}{4(a-2)n}} \cdot \left|\sqrt{\frac{2n}{a-2}}\right| \cdot \sum_{r=0}^{r=a-3}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} \; ,$$

ce qui démontre le théorème suivant.

Théorème XII. Si l'on désigne par n *un nombre entier positif quelconque et par* a *un nombre entier, supérieur ou égal à* 3, *on aura*

$$\sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(a,r)\pi i}{n}} = \frac{1+(-1)^{a(n-1)}}{1-i} e^{-\frac{(a-4)^2\pi i}{4(a-2)n}} \cdot \left|\sqrt{\frac{2n}{a-2}}\right| \cdot \sum_{r=0}^{r=a-3}(-1)^r e^{-\frac{(nr^2+2r)\pi i}{a-2}} \; .$$

Au moyen de cette formule la somme dans le premier membre, qui est composée de $2n$ termes, est réduite à une somme de $a-2$ termes. Pour des valeurs petites du nombre a la dernière somme peut être calculée sans difficulté, quel que soit le nombre n, et pour ces valeurs du nombre a nous avons donc évalué la première somme pour tous les nombres entiers positifs n.

Pour $a=3, 4, 5, 6$ nous obtiendrons de cette manière les résultats suivants :

1) Pour $a = 3$ nous obtiendrons du théorème XII pour tout nombre entier positif n

$$(213)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(3,r)\pi i}{n}} = \frac{1+(-1)^{n-1}}{1-i} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4n}} \cdot |\sqrt{2n}|\,,$$

et par suite on aura

$$(214)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(3,r)\pi i}{n}} = 0 \text{ pour } n \equiv 0\,,\ \text{mod } 2\,,$$

$$= (1+i)e^{-\frac{\pi i}{4n}} |\sqrt{2n}| \text{ pour } n \equiv 1\,,\ \text{mod } 2\,.$$

2) Pour $a = 4$ nous obtiendrons pour tout nombre entier positif n

$$(215)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(4,r)\pi i}{n}} = (1+i)(1+i^{-n})\,|\sqrt{n}|\,,$$

d'où l'on tire

$$(216)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(4,r)\pi i}{n}} = 2(1+i)\,|\sqrt{n}| \text{ pour } n \equiv 0\,,\ \text{mod } 4\,,$$

$$= 2\,|\sqrt{n}| \text{ pour } n \equiv 1\,,\ \text{mod } 4\,,$$

$$= 0 \text{ pour } n \equiv 2\,,\ \text{mod } 4\,,$$

$$= 2i\,|\sqrt{n}| \text{ pour } n \equiv 3\,,\ \text{mod } 4\,.$$

3) Pour $a = 5$ nous obtiendrons du théorème XII

$$(217)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(5,r)\pi i}{n}} = 0 \text{ pour } n \equiv 0\,,\ 2\,,\ 3\,,\ 4\,,\ \text{mod } 6\,,$$

$$= (1+i)(\sqrt{3}-i)e^{-\frac{\pi i}{12n}} \left|\sqrt{\frac{n}{2}}\right| \text{ pour } n \equiv 1\,,\ \text{mod } 6\,,$$

$$= (1+i)(\sqrt{3}+i)e^{-\frac{\pi i}{12n}} \left|\sqrt{\frac{n}{2}}\right| \text{ pour } n \equiv 5\,,\ \text{mod } 6\,.$$

4) Pour $a = 6$ nous déduirons de même

$$(218)\quad \sum_{r=0}^{r=2n-1} e^{\frac{2P(6,r)\pi i}{n}} = 0 \text{ pour } n \equiv 0 \text{ , mod } 2 \text{ ,}$$

$$= (1+i)e^{-\frac{\pi i}{4n}} \left| \sqrt{2n} \right| \text{ pour } n \equiv 1 \text{ , mod } 2 \text{ .}$$

Errata.

Page 1,	ligne	23,	au	lieu	de	1894	lisez	1890
» 22,	»	14,	»	»	»	ϱ^{r_1}	»	ϱr_1
» 23,	»	15,	»	»	»	ϱ^{r_1}	»	ϱr_1
» 26,	»	22,	»	»	»	$\psi(7)$	»	$\psi_3(7)$
» 27,	»	23,	»	»	»	$\psi(n-1)$	»	$\psi_4(n-1)$
» 28,	»	8,	»	»	»	-0	»	$=0$
» 28,	»	18,	»	»	»	$\psi(n)$	»	$\psi_5(n)$

FORMELN UND TAFELN

ZUR

GRUPPENWEISE BERECHNUNG DER ALLGEMEINEN STÖRUNGEN

BENACHBARTER PLANETEN

VON

KARL BOHLIN.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 19 Mai 1895).

UPSALA 1896,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung . . . . . pag. 1.

Analytische Entwicklungen.

1. Die Differentialgleichungen der Störungen . . . . . » 7.
2. Entwicklung der Störungsfunction . . . . . » 16.
3. Elimination des Argumentes ε' . . . . . » 50.
4. Wiedereinführung der Grössen $\gamma_i^{s,n}$. Summation in Bezug auf i. Controllformeln . . . . . » 62.
5. Elimination des Argumentes g' . . . . . » 69.
6. Die Reihen für T und $Qa^2\frac{\partial \Omega}{\partial Z}$ . . . . . » 81.
7. Entwicklung der Störungsfunction und der Störungen nach Potenzen von w . . . . . » 103.
8. Zerlegung des Argumentes θ. Integration der Differentialgleichung für W . . . . . » 108.
9. Störungen der mittleren Anomalie . . . . . » 129.
10. Störungen des Radiusvectors . . . . . » 144.
11. Störungen der dritten Coordinate . . . . . » 150.

Allgemeine Zahlencoëfficienten, Tafel I—XVIII . . . . . » 162.

Numerisches Beispiel für $\mu = \frac{1}{3}$, enthaltend

Tafeln der verschiedenen Störungsausdrücke, Tafel XIX—XXXVII ausgenommen » 198.

Besondere Glieder . . . . . » 217.

Zusammenstellung der Formeln . . . . . » 219.

Die vorliegende Abhandlung enthält die Resultate einer Untersuchung, ob und in wie fern es möglich wäre, die allgemeinen Störungen für mehrere benachbarte Planeten collectiv zu berechnen. In gewissem Sinne ist schon z. B. die Leverrierssche oder jede andere Methode, bei welcher die Störungen nach Potenzen der Excentricitäten und Neigungen analytisch entwickelt werden, eine zu diesem Zweck anwendbare. Sind nämlich die Entwicklungsgrössen, welche von dem Verhältnisse der mittleren Bewegungen resp. der halben grossen Achsen abhängen, einmal numerisch gegeben, so erlaubt es diese Form der Störungsausdrücke, alle mögliche verschiedene Werthe der Excentriciteten und Neigungen mit Leichtigkeit und wenig Aufwand von Arbeit numerisch zu berücksichtigen und somit die Störungen für eine Anzahl Planeten, welche sämmtlich dieselbe mittlere Bewegung aber sonst verschiedene Elemente hätten, zu berechnen.

Die Annahme mehrerer Planeten mit denselben mittleren Bewegungen trifft nun in der Wirklichkeit nicht zu, und die supponirte Anwendung der erwähnten Störungsentwicklungen zur Collectivberechnung mehrerer Planeten bleibt desshalb nur ein formelles Beispiel. Man müsste um den Gedanken praktisch auszuführen eine Form der Störungen finden, welche ausser nach den Excentriciteten und Neigungen auch in Bezug auf das Verhältniss der mittleren Bewegungen eine Potenzentwicklung enthielte, und somit die Berechnung der Störungen für mehrere Planeten mit nahe gleichen mittleren Bewegungen ermöglichte.

Dass diese Aufgabe formell ausführbar ist, wenn es sich um eine beschränkte Genauigkeit handelt, ist unmittelbar einleuchtend. Für zwei Planeten, deren übrige Elemente gleich wären, aber deren mittlere Bewegungen sich um ein Paar Bogensekunden unterschieden, würde man ja um so mehr dieselben Störungsausdrücke gelten lassen können, als sich die mittleren Bewegungen selbst durch die Störungen um diesen Betrag ändern können, und also der Unterschied der Störungen beider Planeten den Störungen zweiter Ordnung gleich zu stellen wären. Es

handelt sich nur um die Grenzen der mittleren Bewegungen, innerhalb welchen eine derartige gemeinsame Berechnung der Störungen zulässig bleibt.

Das Hauptprincip der vorgeschlagenen Methode[1]) besteht einfach darin, dass für das Verhältniss der mittleren Bewegungen ein rationaler Bruch μ_0 als Ausgangspunkt angenommen wird und die Störungen nach Potenzen von

$$w = 1 - \frac{\mu}{\mu_0}$$

entwickelt werden. Das bei dem numerischen Beispiele zum Grund gelegte Verhältniss ist

$$\mu_0 = \frac{1}{3}$$

und dasselbe bezieht sich also, wenn der störende Körper Jupiter ist, auf Planeten, deren mittlere Bewegungen um 900″ herum liegen.

In derselben Weise wäre die Rechnung für andere Verhältnisse wie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ u. s. w. auszuführen, und es ist anzunehmen, dass wenige solche Verhältnisse ausreichen würden, um das ganze Gebiet der kleinen Planeten zu umfassen.

Es wurde die HANSENsche Form der Differentialgleichungen gewählt, und die Entwicklung der Störungsfunction wurde bis zu Gliedern vierten Grades, bez. zweiten Grades für die Neigungsstörungen, in den Excentricitäten und Neigungen getrieben, wodurch die Möglichkeit offen steht, die numerische Rechnung, welche bis jetzt nur Glieder zweiten Grades inclusive aufnimmt, je nach dem Bedarf zu erweitern. (Vergl. Abschnitt 7).

Um den erreichten Genauigkeitsgrad anschaulich zu machen, rechnete ich mit den am Ende angeführten Tafeln und Formeln[2]) die Jupiterstörungen der Planeten ⑨ Metis und ㉜ Pomona, welche hier unten angeführt werden, und denen zur Seite die LESSERschen Störungen derselben Planeten[3]) angeführt sind.

---

[1]) Vergl. Zur Frage der Convergenz der Reihenentwicklungen in der Störungstheorie A. N. N:o 2882 und Eine neue Annäherungsmethode in der Störungstheorie. Bih. t. K. Svenska Vet. Akad. Handl. Band 14 Afd. I N:o 5. 1888.

[2]) Vergl. A. N. N:o 3294.

[3]) Vergl. A. N. N:o 1189, 1379, 1597.

Störungen der Metis.

$n = 962.''8856$ $\varphi = 7^0\ 5.'0$ $i = 5^0\ 36.'0$

	$n\delta z$ Bohlin Cos	$n\delta z$ Bohlin Sin	$n\delta z$ Lesser Cos	$n\delta z$ Lesser Sin
0−0	− 25.″00ε		− 24.″99nt	
1−0	− 4.79 ε	− 0.″99ε	− 4.90 nt	− 0.″95nt
2−0	+ 0.14 ε	+ 0.03 ε	+ 0.15 nt	+ 0.03 nt
1−1	−107.7	− 58.2	−108.0	− 59.7
2−2	+111.9	− 62.7	+124.0	− 67.8
3−3	− 5.7	− 19.9	− 5.4	− 20.8
4−4	− 2.9	− 1.3	− 2.9	− 1.7
5−5	− 0.7	+ 0.5	− 0.7	+ 0.4
1−0	− 1.7	+ 11.4	− 2.6	+ 8.7
2−1	− 0.1	+ 0.9	0.0	+ 0.9
3−2	− 4.4	+ 2.8	− 5.0	+ 3.1
4−3	+ 0.1	+ 0.7	+ 0.1	+ 0.8
5−4	+ 0.2	0.0	+ 0.2	+ 0.1
0−1	− 20.3	+ 3.0	− 20.1	+ 3.0
1−2	+148.1	−103.2	+163.0	−114.0
2−3	+182.3	+183.9	+180.1	+184.6
3−4	+ 6.4	− 2.0	+ 7.0	− 1.4
4−5	+ 0.3	− 1.4	+ 0.3	− 1.6
5−6	− 0.8	− 0.4	− 0.4	− 0.3
2−0	0.0	+ 0.1	+ 0.1	− 0.3
3−1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.2	0.0
4−2	0.0	0.0	0.0	0.0
−1−1	− 0.7	+ 0.1	− 0.6	+ 0.1
0−2	+ 0.8	− 2.3	+ 0.6	− 1.7
1−3	+571.6	+136.7	+570.7	+141.8
2−4	+ 14.8	− 18.8	+ 11.1	− 15.7
3−5	+ 2.9	+ 6.3	+ 1.6	+ 2.8
4−6	+ 1.0	0.0	+ 0.6	− 0.1

	v Bohlin Cos	v Bohlin Sin	v Lesser Cos	v Lesser Sin
0−0	+ 0.″06ε		+ 0.″06nt	
1−0	+ 0.50 ε	− 2.″39ε	+ 0.48 nt	− 2.″45nt
1−1	+ 21.2	− 39.6	+ 22.1	− 40.0
2−2	+ 40.0	+ 71.5	+ 42.7	+ 77.7
3−3	+ 10.5	+ 0.2	+ 11.1	+ 0.3
4−4	+ 1.2	− 2.0	+ 1.4	− 2.1
5−5	− 0.3	− 0.6	− 0.3	− 0.6
6−6	− 0.3	0.0	− 0.2	0.0
1−0	− 1.8	− 0.4	− 1.9	− 0.4
2−1	+ 0.5	− 1.9	+ 0.5	− 2.0
3−2	− 0.4	− 0.2	− 0.5	− 0.4
4−3	+ 0.1	+ 0.1	− 0.1	+ 0.1
5−4	+ 0.1	+ 0.1	0.0	0.0

	v Bohlin		v Lesser	
	Cos	Sin	Cos	Sin
0−1	+ 2."9	− 1."1	+ 2."8	− 1."0
1−2	+30.2	+45.9	+32.1	+48.8
2−3	−94.4	+94.6	−95.3	+95.7
3−4	+ 1.7	+ 4.2	+ 1.6	+ 4.7
4−5	+ 1.1	+ 0.1	+ 1.2	+ 0.2
5−6	+ 0.5	− 0.3	+ 0.2	− 0.3
2−0	− 0.2	0.0	0.0	0.0
3−1	0.0	+ 0.1	0.0	0.0
4−2	0.0	0.0	0.0	0.0
−1−1	+ 0.3	+ 0.6	+ 0.2	+ 0.5
0−2	+ 2.0	+ 3.8	+ 1.8	+ 3.1
1−3	−18.5	+38.0	−18.6	+37.8
2−4	+ 7.3	+ 6.7	+ 6.7	+ 5.3
3−5	− 3.5	+ 1.9	− 1.6	+ 1.0
4−6	+ 0.1	+ 0.7	+ 0.1	+ 0.4

	$\frac{u}{\cos i}$ Bohlin		$\frac{u}{\cos i}$ Lesser	
	Cos	Sin	Cos	Sin
0−0	− 0."26 ε		− 0."21 nt	
1−0	+ 2.08 ε	− 0."40 ε	+ 1.71 nt	− 0."39 nt
1−1	+ 0.2	+ 0.2	− 0.1	− 1.2
2−2	+ 0.8	+ 0.4	+ 0.6	+ 0.2
3−3	+ 0.1	0.0	+ 0.1	0.0
1−0	− 0.2	− 1.0	− 0.2	− 0.9
2−1	+ 1.3	+ 0.5	+ 1.0	+ 0.3
3−2	+ 0.2	− 0.2	+ 0.2	− 0.2
4−3	0.0	− 0.1	0.0	− 0.1
0−1	+ 2.4	+ 2.1	+ 1.7	+ 1.8
1−2	+ 4.6	− 1.4	+ 4.1	− 1.4
2−3	− 3.9	+17.1	− 3.0	+13.9
3−4	+ 0.6	+ 0.5	+ 0.4	+ 0.4
3−1	− 0.1	0.0	− 0.1	0.0
4−2	0.0	0.0	0.0	0.0
−1−1	+ 1.1	+ 0.4	+ 0.9	+ 0.3
0−2	− 2.6	+ 1.6	− 2.0	+ 1.1
1−3	+ 0.5	− 2.2	+ 1.0	− 0.9
2−4	+ 1.2	− 0.2	+ 1.2	− 0.3
3−5	− 0.2	+ 0.6	− 0.1	+ 0.3

Störungen der Pomona.

$n = 852.''8299$ $\varphi = 4^0\ 43.'7$ $i = 5^0\ 29.'1$

	$n\delta z$ Bohlin Cos	$n\delta z$ Bohlin Sin	$n\delta z$ Lesser Cos	$n\delta z$ Lesser Sin
0−0	− 33.″37 ε		− 33.″30 nt	
1−0	− 6.85 ε	+ 0.″07 ε	− 6.79 nt	− 0.″26 nt
2−0	+ 0.14 ε	0.00 ε	+ 0.14 nt	0.00 nt
1−1	+ 6.7	− 169.3	+ 6.3	− 170.0
2−2	+ 20.2	+ 252.6	+ 20.6	+ 259.7
3−3	− 1.2	− 6.0	− 1.2	− 7.1
4−4	+ 0.9	+ 5.6	+ 0.9	+ 6.0
5−5	− 0.3	− 1.7	− 0.3	− 1.6
1−0	+ 0.1	+ 14.4	− 0.4	+ 11.8
2−1	− 0.1	− 1.8	− 0.4	− 1.6
3−2	− 0.4	− 6.1	− 0.4	− 6.1
4−3	+ 0.1	+ 0.5	0.0	+ 0.5
5−4	0.0	0.0	0.0	0.0
0−1	+ 0.9	+ 40.6	+ 1.7	+ 39.9
1−2	+ 22.8	+ 305.4	+ 24.2	+ 310.1
2−3	− 93.3	− 923 6	− 90.8	− 900.1
3−4	− 3.7	− 26.2	− 3.5	− 25.2
4−5	+ 1.0	+ 5.3	+ 1.1	+ 5.8
5−6	− 0.2	− 1.4	− 0.3	− 1.6
2−0	− 0.3	− 0.1	− 0.4	− 0.1
3−1	+ 0.1	− 0.1	+ 0.1	− 0.1
4−2	0.0	0.0	0.0	0.0
−1−1	+ 1.2	+ 1.3	+ 1.4	+ 1.6
0−2	+ 2.9	+ 5.6	+ 3.7	+ 6.6
1−3	+ 237.5	+ 1517.8	+ 241.5	+ 1491.2
2−4	− 9.8	− 59.5	− 11.7	− 67.7
3−5	− 3.4	− 17.5	− 5.9	− 29.7
4−6	+ 0.5	+ 2.4	+ 0.6	+ 2.9

	v Bohlin Cos	v Bohlin Sin	v Lesser Cos	v Lesser Sin
0−0	− 0.″00 ε		+ 0.″01 nt	
1−0	− 0.03 ε	− 3.″42 ε	+ 0.13 nt	− 3.″40 nt
1−1	− 58.6	+ 2.3	− 59.0	+ 2.2
2−2	− 151.3	+ 12.1	− 155.5	+ 12.3
3−3	+ 18.1	− 2.2	+ 18.4	− 2.2
4−4	− 4.3	+ 0.7	− 4.3	+ 0.7
5−5	+ 1.3	− 0.2	+ 1.3	− 0.2
6−6	− 0.4	+ 0.1	− 0.4	+ 0.1
1−0	− 2.7	0.0	− 2.7	− 0.1
2−1	− 0.9	0.0	− 0.9	− 0.2
3−2	0.0	0.0	− 0.1	+ 0.1
4−3	+ 0.1	0.0	+ 0.2	− 0.1
5−4	0.0	0.0	− 0.1	0.0

	v Bohlin		v Lesser	
	Cos	Sin	Cos	Sin
0−1	+ 3."1	0."0	+ 3."1	− 0."2
1−2	− 71.8	+ 5.4	− 71.1	+ 5.5
2−3	+447.3	− 45.2	+438.0	− 44.3
3−4	+ 16.9	− 2.4	+ 16.9	− 2.4
4−5	− 3.9	+ 0.7	− 3.8	+ 0.7
5−6	+ 1.2	− 0.3	+ 1.2	− 0.3
2−0	− 0.2	− 0.2	− 0.1	− 0.3
3−1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1
4−2	0.0	− 0.1	0.0	− 0.1
−1−1	+ 1.2	− 0.7	+ 1.3	− 0.9
0−2	− 0.8	− 0.8	− 0.8	− 1.1
1−3	+ 89.7	− 12.2	+ 87.8	− 12.0
2−4	+ 23.3	− 3.8	+ 24.7	− 4.2
3−5	+ 10.1	− 2.0	+ 16.9	− 3.4
4−6	− 1.7	+ 0.4	− 2.4	+ 0.6

	$\frac{u}{\text{Cos } i}$ Bohlin		$\frac{u}{\text{Cos } i}$ Lesser	
	Cos	Sin	Cos	Sin
0−0	− 0."19ε		− 0."22nt	
1−0	+ 2.35 ε	+ 1."75ε	+ 2.72 nt	+ 2."21nt
1−1	+ 1.2	− 0.1	+ 3.1	− 0.7
2−2	+ 1.5	− 0.7	+ 2.1	− 1.0
3−3	− 0.3	+ 0.1	− 0.3	+ 0.3
1−0	+ 0.8	− 1.2	+ 1.1	− 1.4
2−1	+ 1.1	− 1.6	+ 1.5	− 2.0
3−2	− 0.2	+ 0.4	− 0.3	+ 0.5
4−3	+ 0.1	− 0.1	+ 0.1	− 0.1
0−1	− 1.4	− 1.7	− 3.9	− 3.7
1−2	+ 4 4	+ 5.0	+ 5.4	+ 5.7
2−3	− 23.2	− 24.3	− 31.0	− 26 8
3−4	− 0.7	− 0.7	− 1.2	− 0.9
2−0	+ 0.2	− 0.3	+ 0.2	− 0.3
3−1	0.0	+ 0.1	− 0.1	+ 0.1
4−2	0.0	0.0	0.0	0.0
−1−1	− 1.2	− 1.6	− 1.5	− 1.7
0−2	− 2.9	− 3.4	− 3.8	− 4.1
1−3	+ 1.9	+ 2.0	+ 3.9	+ 3.6
2−4	− 2.0	− 2.1	− 2.2	− 2.0
3−5	− 1.1	− 1.0	− 1.9	− 1.6

1. Die Differentialgleichungen der Störungen.

Bekanntlich hat Hansen die Formeln zur Berechnung der Örter eines Planeten folgendermassen gestaltet:

$$n_0 z = \bar{\varepsilon} - e_0 \operatorname{Sin} \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{r} \operatorname{Cos} \bar{f} = a_0 (\operatorname{Cos} \bar{\varepsilon} - e_0)$$

(1) $$\bar{r} \operatorname{Sin} \bar{f} = a_0 \operatorname{Cos} \varphi_0 \operatorname{Sin} \bar{\varepsilon}$$

$$v = \bar{f} + \pi_0$$

$$r = \bar{r} (1 + \nu)$$

$$a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m) \ ,$$

wobei $a_0 , e_0 \ldots$ osculirende Elemente sind, ν die Störung des Radiusvectors und $n_0 z$ die gestörte mittlere Anomalie ist.

Setzt man

(2) $$W = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 + 2 \frac{h}{h_0} \xi \frac{\bar{\varrho}}{a_0} \operatorname{Cos} \bar{\omega} + 2 \frac{h}{h_0} \eta \frac{\bar{\varrho}}{a_0} \operatorname{Sin} \bar{\omega} \ ,$$

so wird

(3) $$\frac{dz}{dt} = 1 + \overline{W} + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2$$

und

(4) $$\frac{d 2\nu}{dt} = - \frac{\overline{\partial W}}{\partial \zeta} \ .$$

Substituirt man in (2) die Functionen

(5) $$\xi = \frac{e}{\operatorname{Cos}^2 \varphi_0} \operatorname{Cos} (\chi - \pi_0) - \frac{e_0}{\operatorname{Cos}^2 \varphi_0}$$

$$\eta = \frac{e}{\operatorname{Cos}^2 \varphi_0} \operatorname{Sin} (\chi - \pi_0) \ .$$

so bekommt man, indem noch auf die Relation

$$e_0 \bar{\varrho} \operatorname{Cos} \bar{\omega} = a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0 - \bar{\varrho}$$

Rücksicht genommen wird,

$$(6) \qquad W = \frac{2\bar{\varrho}}{h_0 a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} he \operatorname{Cos}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega}) + \frac{2\bar{\varrho}}{h_0 a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} h - \frac{h_0}{h} - 1 .$$

Mittels der Hülfsgleichungen

$$f = \bar{f} - \bar{\omega} - (\chi - \pi_0 - \bar{\omega})$$

$$1 = \frac{r}{a \operatorname{Cos}^2 \varphi} + \frac{re \operatorname{Cos} f}{a \operatorname{Cos}^2 \varphi}$$

$$h = \frac{an}{\operatorname{Cos} \varphi} = \frac{k^2(1+m)}{r^2 \frac{dv}{dt}}$$

leitet HANSEN aus den bekannten Relationen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{r^2} n \operatorname{Cos} \varphi \; ; \quad \frac{dr}{dt} = \frac{an}{\operatorname{Cos} \varphi} e \operatorname{Sin} f$$

folgende Beziehungen ab:

$$r \frac{dv}{dt} - h = \operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) he \operatorname{Cos}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega}) + \operatorname{Sin}(\bar{f} - \bar{\omega}) he \operatorname{Sin}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega})$$

$$\frac{dr}{dt} = \operatorname{Sin}(\bar{f} - \bar{\omega}) he \operatorname{Cos}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega}) - \operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) he \operatorname{Sin}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega}) ,$$

welche wieder unmittelbar den Ausdruck

$$he \operatorname{Cos}(\chi - \pi_0 - \bar{\omega}) = \left[r \frac{dv}{dt} - h \right] \operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) + \frac{dr}{dt} \operatorname{Sin}(\bar{f} - \bar{\omega})$$

ergeben. Setzt man denselben unter Berücksichtigung der Relation

$$\frac{1}{h_0 a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} = \frac{h_0}{k^2(1+m)}$$

in (6) ein, so entsteht

$$W = \frac{2 h_0 \bar{\varrho}}{k^2(1+m)} \operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega})\, r \frac{dv}{dt} + \frac{2 h_0 \bar{\varrho}}{k^2(1+m)} \operatorname{Sin}(\bar{f} - \bar{\omega}) \frac{dr}{dt}$$

$$- \frac{2\bar{\varrho}}{h_0 a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} [\operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) - 1]\, h - \frac{h_0}{h} - 1 \ .$$

Durch Differentiation dieses Ausdrückes nach t erhält Hansen bei Substitution von

$$k^2(1+m) \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \quad \text{für} \quad \frac{d^2 v}{dt^2}$$

$$k^2(1+m) \frac{\partial \Omega}{\partial r} \quad \text{für} \quad \frac{d^2 r}{dt^2}$$

die Gleichung

$$(7) \quad \frac{dW}{dt} = h_0 \left\{ 2 \frac{\bar{\varrho}}{r} \operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) - 1 + 2 \frac{h^2 \bar{\varrho}}{h_0^2 a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} [\operatorname{Cos}(\bar{f} - \bar{\omega}) - 1] \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

$$+ 2 h_0 \frac{\bar{\varrho}}{r} \operatorname{Sin}(\bar{f} - \bar{\omega})\, r \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

sowie noch

$$(8) \quad \frac{d \frac{h_0}{h}}{dt} = h_0 \frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\overline{dW}}{dt} \ .$$

Für die Breitenstörungen hat man ebenso

$$(9) \quad \frac{dU}{dt} = hr \frac{\bar{\varrho}}{a_0} \operatorname{Sin}(\bar{\omega} - \bar{f}) \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \operatorname{Cos} i$$

$$(10) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\overline{dU}}{d\tau} \ .$$

Die Grösse u wird aus der letzten Gleichung oder auch als

$$u = \bar{U}$$

gefunden.

Wir brauchen noch die Gleichung

$$\frac{h_0}{h} = \frac{dz}{dt} (1+\nu)^2 \ ,$$

welche mit Rücksicht auf (3) in die folgende übergeht

$$\frac{h_0}{h} = (1 + \overline{W}) \frac{1+\nu}{1-\nu} \,. \tag{11}$$

Führen wir sowohl diesen Ausdruck, sowie den Winkel $\bar{\varepsilon}$ als unabhängige Veränderliche durch die Relation

$$n_0 z = \bar{\varepsilon} - e_0 \operatorname{Sin} \bar{\varepsilon} \,,$$

wovon

$$n_0 \frac{dz}{dt} = \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} (1 - e_0 \operatorname{Cos} \bar{\varepsilon})$$

oder

$$n_0 \frac{1+\overline{W}}{1-\nu^2} = \frac{\bar{r}}{a_0} \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} \,, \tag{12}$$

in die Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\frac{d\,W}{d\bar{\varepsilon}} = T \,,$$

wobei

$$\begin{aligned} T = \frac{h_0 \bar{r}}{a_0 n_0} \Bigg\{ \Big[2 \frac{\bar{\varrho}}{r} \operatorname{Cos} (\bar{f} - \bar{\omega}) - 1 \Big] \frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}} \\ + 2 \frac{\bar{\varrho}}{a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} [\operatorname{Cos} (\bar{f} - \bar{\omega}) - 1] \frac{(1-\nu)^3}{(1+\overline{W})^3} \frac{1}{1+\nu} \Bigg\} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \\ + 2 \frac{h_0 \bar{r}}{a_0 n_0} \frac{\bar{\varrho}}{r} \operatorname{Sin} (\bar{f} - \bar{\omega}) \frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}} r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \,. \end{aligned} \tag{13}$$

Setzen wir in der Störungsfunction

$$v = \bar{f} + \pi_0$$

und

$$r = \bar{r}(1+\nu) \,,$$

so wird dieselbe eine Function der Veränderlichen $\bar{f}$ und $\bar{r}$, und wir haben dann

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{f}}$$

(14)

$$r \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \bar{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{r}} .$$

Ersetzen wir auch sonst in der Gleichung (13) r mit $\bar{r}(1+\nu)$, so ergiebt sich aus derselben, da noch

$$\frac{h_0}{a_0 n_0} = \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi_0} ,$$

$$T = \frac{1}{\operatorname{Cos} \varphi_0} \left\{ \left[2 \frac{\bar{\varrho}}{1+\nu} \operatorname{Cos} (\bar{f} - \bar{\omega}) - \bar{r} \right] \frac{1-\nu^2}{1+\bar{W}} \right.$$

$$\left. + \frac{2 \bar{\varrho} \bar{r}}{a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} [\operatorname{Cos} (\bar{f} - \bar{\omega}) - 1] \frac{(1-\nu)^3}{(1+\bar{W})^3} \frac{1}{1+\nu} \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{f}}$$

$$+ \frac{2}{\operatorname{Cos} \varphi_0} \frac{\bar{\varrho}}{1+\nu} \operatorname{Sin} (\bar{f} - \bar{\omega}) \frac{1-\nu^2}{1+\bar{W}} \bar{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{r}} .$$

Da nun

$$\frac{d\bar{f}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{a_0 \operatorname{Cos} \varphi_0}{\bar{r}} , \quad \frac{d\bar{r}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{e_0 \bar{r} \operatorname{Sin} \bar{f}}{\operatorname{Cos} \varphi_0} ,$$

so wird

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{f}} \frac{a_0 \operatorname{Cos} \varphi_0}{\bar{r}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{r}} \frac{e_0 \bar{r} \operatorname{Sin} \bar{f}}{\operatorname{Cos} \varphi_0} ,$$

woraus

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{f}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\varepsilon}} \frac{\bar{r}}{a_0 \operatorname{Cos} \varphi_0} - \bar{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{r}} \frac{e_0 \bar{r} \operatorname{Sin} \bar{f}}{a_0 \operatorname{Cos}^2 \varphi_0} .$$

Eliminirt man hiermit $\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{f}}$, so lässt sich T in der folgenden Form schreiben:

(15)

$$T = M a_0 \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\varepsilon}} + N a_0 \bar{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{r}} ,$$

wobei

$$M = \frac{1}{a_0^2 \operatorname{Cos}^2\varphi_0}\left\{\left[\frac{2\bar{\varrho}\bar{r}}{1+\nu}\operatorname{Cos}(\bar{f}-\bar{\omega}) - \bar{r}^2\right]\frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}}\right.$$

$$\left. + \frac{2\bar{\varrho}\bar{r}^2}{a_0 \operatorname{Cos}^2\varphi_0}[\operatorname{Cos}(\bar{f}-\bar{\omega}) - 1]\frac{(1-\nu)^3}{(1+\overline{W})^3}\frac{1}{1+\nu}\right\}$$

(16)

$$N = \frac{1}{a_0 \operatorname{Cos}\varphi_0}\left\{2\bar{\varrho}\operatorname{Sin}(\bar{f}-\bar{\omega})\frac{1-\nu}{1+\overline{W}} - \left\{\left[\frac{2\bar{\varrho}}{1+\nu}\operatorname{Cos}(\bar{f}-\bar{\omega}) - \bar{r}\right]\frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\bar{\varrho}\bar{r}}{a_0 \operatorname{Cos}^2\varphi_0}[\operatorname{Cos}(\bar{f}-\bar{\omega}) - 1]\frac{(1-\nu)^3}{(1+\overline{W})^3}\frac{1}{(1+\nu)}\right\}\frac{e_0\bar{r}\operatorname{Sin}\bar{f}}{a_0 \operatorname{Cos}^2\varphi_0}\right\} .$$

Setzen wir aber

$$a_1 = a_0(1+\nu) , \tag{17}$$

woraus

$$r = a_1(1 - e_0 \operatorname{Cos}\bar{\varepsilon}) , \tag{18}$$

so können wir den Ausdruck T auch in folgender Weise stellen:

$$T = M a_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\varepsilon}} + N a_1 r \frac{\partial \Omega}{\partial r} . \tag{19}$$

Die neuen Ausdrücke für M und N werden dann aus (16) erhalten, indem man mit $1+\nu$ dividirt. Der Einfachkeit halber lassen wir jetzt die Indices Null weg und setzen überdies ϱ, r, f u. s. w. statt $\bar{\varrho}, \bar{r}, \bar{f}$. Somit wird

$$M = \frac{1}{a^2 \operatorname{Cos}^2\varphi}\left\{\left[\frac{2\varrho r}{1+\nu}\operatorname{Cos}(f-\omega) - r^2\right]\frac{1-\nu}{1+\overline{W}}\right.$$

$$\left. + \frac{2\varrho r^2}{a \operatorname{Cos}^2\varphi}[\operatorname{Cos}(f-\omega) - 1]\frac{(1-\nu)^3}{(1+\overline{W})^3}\frac{1}{(1+\nu)^2}\right\}$$

$$N = \frac{1}{a \operatorname{Cos}\varphi}\left\{2\varrho \operatorname{Sin}(f-\omega)\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{1}{1+\overline{W}}\right. \tag{20}$$

$$- \left[\left(\frac{2\varrho}{1+\nu}\operatorname{Cos}(f-\omega) - r\right)\frac{1-\nu}{1+\overline{W}}\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\varrho r}{a \operatorname{Cos}^2\varphi}[\operatorname{Cos}(f-\omega) - 1]\frac{(1-\nu)^3}{(1+\nu)^2}\frac{1}{(1+\overline{W})^3}\right]\frac{er \operatorname{Sin} f}{a \operatorname{Cos}^2\varphi}\right\} .$$

Entwickelt man diese Grössen nach Potenzen von $\overline{W}$ und ν, so dass sie folgendermassen angesetzt werden

$$M + M_w \overline{W} + M_\nu \nu$$

$$N + N_w \overline{W} + N_\nu \nu \ ,$$

so bekommt man die Formeln zur Berechnung der Störungen zweiter Ordnung inclusive.

Die Differentialgleichung, welche den Breitenstörungen zum Grunde liegt, hat die Form

$$(21) \qquad \mathrm{Sec}\, i \frac{dU}{d\varepsilon} = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi_0} \left(\frac{\bar{r}}{a_0}\right)^3 \frac{\bar{\varrho}}{a_0} \mathrm{Sin}\,(\bar{\omega} - \bar{f}) \frac{(1-\nu)(1-\nu^2)}{(1+\overline{W})^2} a_0^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \ .$$

Schreiben wir auch hier als Factor zu der Derivirten von der Störungsfunction a_1 statt a_0, so können wir die Gleichung folgendermassen ansetzen:

$$(22) \qquad \mathrm{Sec}\, i \frac{dU}{d\varepsilon} = Q a_1^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \ ,$$

wobei dann

$$(23) \qquad Q = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \frac{\varrho}{a} \mathrm{Sin}\,(\omega - f) \frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)(1+\overline{W})^2} \ .$$

Auch hier sind also r, ϱ u. s. w. statt $\bar{r}, \bar{\varrho}$ u. s. w. und a statt a_0 geschrieben worden. Die Grösse Q wird ähnlich wie M und N nach Potenzen von $\overline{W}$ und ν entwickelt, um die Störungen höherer Ordnung ermitteln zu können.

In den Gleichungen

$$\frac{dn\delta z}{dt} = n \frac{(\overline{W} + \nu^2)}{1-\nu^2}$$

$$(24) \qquad 2\frac{d\nu}{dt} = -\frac{\partial \overline{W}}{\partial \zeta}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \tau}$$

wollen wir zuerst die partiellen Differentialkoëfficienten durch Einführung der excentrischen Anomalie transformiren. Weil

$$n\zeta = \eta - e \operatorname{Sin} \eta \ ,$$

folgt unmittelbar

$$\overline{\frac{\partial W}{\partial \zeta}} = \overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} \frac{an}{r} \ .$$

Ferner wird, weil

$$\zeta = \tau + \delta\zeta \ ,$$

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial \tau}} = \overline{\frac{\partial U}{\partial \zeta}} = \overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}} \frac{an}{r} \ .$$

Führen wir nun gleichzeitig ε als unabhängige Veränderliche ein, so wird, da

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{r}{an} \frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}} \ ,$$

$$\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \frac{\overline{W}+\nu^2}{1+\overline{W}} (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon)$$

(25)
$$\frac{d2\nu}{d\varepsilon} = -\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} \frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}}$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}} \frac{1-\nu^2}{1+\overline{W}} \ .$$

Will man nur Störungen erster Ordnung berücksichtigen, so vereinfachen sich die Formeln sehr bedeutend. Das vollständige Formelsystem für diesen Fall möge hier zusammengestellt werden, wobei nun auch nach HANSEN die excentrische Anomalie in den Coëfficienten M, N, Q eingeführt wird.

(26)
$$\frac{dW}{d\varepsilon} = Ma \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} + Nar \frac{\partial \Omega}{\partial r} = T \ .$$

(27)
$$M = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} \Big[-\Big(3 - \frac{3}{2} e^2\Big) + 2e \operatorname{Cos} \varepsilon - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Cos} 2\varepsilon$$
$$+ e^2 \operatorname{Cos} (\eta + \varepsilon) - 3e \operatorname{Cos} \eta + (4 - e^2) \operatorname{Cos} (\eta - \varepsilon) - e \operatorname{Cos} (\eta - 2\varepsilon) \Big]$$

$$N = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} \Big[e \operatorname{Sin} \varepsilon - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{Sin} 2\varepsilon$$
$$+ e^2 \operatorname{Sin} (\eta + \varepsilon) - e \operatorname{Sin} \eta - (2 - e^2) \operatorname{Sin} (\eta - \varepsilon) + e \operatorname{Sin} (\eta - 2\varepsilon) \Big]$$

$$\text{Sec}\, i \frac{dU}{d\varepsilon} = Q\, a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \tag{28}$$

$$Q = e \,\text{Sin}\, \varepsilon - \frac{1}{2} e^2 \,\text{Sin}\, 2\varepsilon \tag{29}$$

$$+ \frac{1}{2} e^2 \,\text{Sin}\,(\eta + \varepsilon) - \frac{3}{2} e \,\text{Sin}\, \eta + \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \text{Sin}\,(\eta - \varepsilon) - \frac{1}{2} e \,\text{Sin}\,(\eta - 2\varepsilon)$$

$$\frac{d(n\delta z)}{d\varepsilon} = \overline{W}(1 - e \,\text{Cos}\, \varepsilon)$$

$$\frac{d2\nu}{d\varepsilon} = -\overline{\frac{\partial W}{\partial \eta}} \tag{30}$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = \overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}} \,.$$

Wir werden im Folgenden ein Argument θ einführen, welches durch die Gleichung

$$\theta = \mu_0 (\varepsilon - e \,\text{Sin}\, \varepsilon) - g' \tag{31}$$

definirt sei. Hier bedeutet μ_0 ein rationales Verhältniss, welches von dem Verhältnisse μ nicht sehr verschieden ist. Für diejenigen kleinen Planeten, deren mittlere Bewegung ungefähr das dreifache des störenden Planeten beträgt, wäre z. B. $\mu_0 = \frac{1}{3}$ zu setzen. Weil

$$g' = n't + n'\delta z' \tag{32}$$

und

$$nz = nt + n\delta z,$$

erhält man aus (31)

$$\theta = (\mu_0 - \mu) nz + \mu n \delta z - n' \delta z' \tag{33}$$

oder indem wir setzen

$$1 - \frac{\mu}{\mu_0} = w \;;\quad \mu = \mu_0 (1 - w) \;, \tag{34}$$

$$\theta = \mu_0 [w\, nz + (1 - w) n \delta z] - n' \delta z' \,. \tag{35}$$

wovon

$$n\delta z = \frac{1}{1-w}\left[\frac{1}{\mu_0}\theta - wnz + \frac{1}{\mu_0}n'\delta z'\right]. \tag{36}$$

Durch Differentiation von (35) erhält man

$$\frac{d\theta}{d\varepsilon} = \mu_0\left[w + (1-w)\,\overline{W}\right](1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) - \frac{dn'\delta z'}{d\varepsilon}, \tag{37}$$

welches die Differentialgleichung für θ ist.

2. Entwicklung der Störungsfunction.

Bestimmt man die Hülfswinkel J, Ψ, Φ mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega')\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(i-i')\\
\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega')\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(\Omega-\Omega')\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(i-i')
\end{aligned} \tag{38}$$

und die Winkel Π und Π' als

$$\Pi = \pi - \sigma - \Phi\,, \quad \Pi' = \pi' - \sigma' - \Psi \tag{39}$$

definirt werden, so erhält man

$$\mathrm{Cos}\,H = \mathrm{Cos}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Cos}\,(f'+\Pi') + \mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')\,\mathrm{Cos}\,J, \tag{40}$$

wo H der Winkel zwischen den Radii vectores der beiden Körper ist. In dieser Formel haben wir f und f' statt $\overline{f}$ und $\overline{f}'$ geschrieben und die in derselben vorkommenden Winkel π und π' sind die constanten Perihellängen. Wenn man diess berücksichtigt, ist die Formel (40) ein ganz strenger Ausdruck von Cos H. Im Folgenden werden wir diejenigen

Störungen zweiter Ordnung unberücksichtigt lassen, welche von den Störungen erster Ordnung der Bahnebene abhängig sind. Dementsprechend werden wir in (40) diejenige Approximation machen, dass die von der Neigung und der Knotenlänge abhängigen Grössen, welche darin enthalten sind und streng genommen veränderlich sind, als Constanten aufgefasst werden sollen. In Übereinstimmung hiermit bestimmen wir Π und Π' aus den Formeln

$$\Pi = \pi - \Omega - \Phi \quad \Pi' = \pi' - \Omega' - \Psi \ . \tag{41}$$

Setzen wir

$$f - f' + \Pi - \Pi' = V \tag{42}$$

und

$$2 \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2} J \operatorname{Sin} (f + \Pi) \operatorname{Sin} (f' + \Pi') = \vartheta \ , \tag{43}$$

so ist

$$\operatorname{Cos} H = \operatorname{Cos} V - \vartheta$$

und

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = \left(\frac{\Delta_0}{a}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \vartheta \ , \tag{44}$$

wenn wir nämlich bezeichnen

$$\left(\frac{\Delta_0}{a}\right)^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{2}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \operatorname{Cos} V \ . \tag{45}$$

In diesen Ausdrücken ist a der Wert der halben grossen Achse und

$$\alpha = \frac{a}{a'} \ ; \tag{46}$$

für r hätten wir $\bar{r}(1 + r)$ einzuführen, werden aber diese Operation bis auf späteres aufschieben. Aus (44) ergiebt sich nun

$$\frac{a}{\Delta} = \frac{a}{\Delta_0} - \left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^3 \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{r}{a} \frac{r'}{a'} \vartheta + \left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^5 \cdot \frac{3}{2\alpha^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \vartheta^2 - \dots \tag{47}$$

und für die Störungsfunction

$$\Omega = \frac{1}{\Delta} - \frac{r \operatorname{Cos} H}{r'^2}$$

die Beziehung

$$
\begin{aligned}
a\Omega = {} & \frac{a}{\Delta_0} - \alpha^2 \frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \operatorname{Cos} V \\
& - \vartheta \frac{1}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\left\{\left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^3 - \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right\} \\
& + \vartheta^2 \frac{3}{2\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^5 \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{48}
$$

oder, wie wir auch diese Gleichung vorteilhaft stellen können,

$$
\begin{aligned}
a\Omega = {} & D_1 - \operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}J \,.\, D_3 \frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'} \operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi') \\
& + \operatorname{Sin}^4\frac{1}{2}J \,.\, D_5 \frac{6}{\alpha^2}\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi')\right]^2 \\
& - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{a}{\Delta_0} - \alpha^2 \frac{r}{a}\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \operatorname{Cos} V \\
D_3 &= \left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^3 - \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \\
D_5 &= \left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^5 \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Der weiteren Entwicklung werden die GYLDÉN'schen Formeln [1])

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\Delta_0} &= \frac{a'}{r'} C_0^{(1)} + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2 \frac{r}{a} C_1^{(1)} \operatorname{Cos} V + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 C_2^{(1)} \operatorname{Cos} 2V + \ldots \\
\left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^3 &= \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 C_0^{(3)} + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^4 \frac{r}{a} C_1^{(3)} \operatorname{Cos} V + 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^5\left(\frac{r}{a}\right)^2 C_2^{(3)} \operatorname{Cos} 2V + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^s &= \left(\frac{a'}{r'}\right)^s C_0^{(s)} + \Sigma 2\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n \operatorname{Cos} n V \,.\, \left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s} \,.\, C_n^{(s)}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

[1]) Undersökningar af theorien för himlakropparnes rörelser. Bih. t. K. Svenska Akad. handlingar. Band 6 N:o 8 und 9. und Band 7 N:o 2. 1881, 82.

zum Grunde gelegt. Die letzte der ausgeschriebenen Formeln generirt bei Änderung des Index s alle die übrigen. Die $C_n^{(s)}$ sind durch den folgenden Formelmechanismus definiert

(52)
$$\lambda = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{r'}\right)^2$$

$$C_n^{(1)} = \gamma_0^{1.n} - \gamma_1^{1.n}\lambda + \gamma_2^{1.n}\lambda^2 - \ldots$$

$$C_n^{(3)} = \gamma_0^{3.n} - \gamma_1^{3.n}\lambda + \gamma_2^{3.n}\lambda^2 - \ldots$$

$$C_n^{(5)} = \gamma_0^{5.n} - \gamma_1^{5.n}\lambda + \gamma_2^{5.n}\lambda^2 - \ldots$$

$$\gamma_i^{1.n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2i-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2i} \cdot \alpha^{n+2i+1} \beta_{n+i}^{2i+1}$$

$$\beta_n^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Sin}^{2n}\varphi \, d\varphi}{(1 - \alpha^2 \operatorname{Sin}^2\varphi)^{i/2}} \cdot$$

Nachdem die $\gamma_i^{1.n}$ berechnet worden sind, ergeben sich die $\gamma_i^{3.n}$ durch die Formeln

$$\vartheta_0^{1.n} = (2n+1)\gamma_0^{1.n} + 4\gamma_1^{1.n}$$

$$\vartheta_1^{1.n} = (2n+5)\gamma_1^{1.n} + 8\gamma_2^{1.n}$$

$$\vartheta_2^{1.n} = (2n+9)\gamma_2^{1.n} + 12\gamma_3^{1.n}$$

. . . . . .

$$\vartheta_i^{1.n} = (2n+4i+1)\gamma_i^{1.n} + (4i+4)\gamma_{i+1}^{1.n} ,$$

$$\gamma_0^{3.n} = \beta^2 \vartheta_0^{1.n}$$

$$\gamma_1^{3.n} = \beta^2[\vartheta_1^{1.n} + \gamma_0^{3.n}]$$

$$\gamma_2^{3.n} = \beta^2[\vartheta_2^{1.n} + \gamma_1^{3.n}]$$

. . . . . .

$$\gamma_i^{3.n} = \beta^2[\vartheta_i^{1.n} + \gamma_{i-1}^{3.n}]$$

ferner die $\gamma_i^{5.n}$ durch die Formelsysteme

$$\vartheta_0^{3.n} = (2n+3)\gamma_0^{3.n} + 4\gamma_1^{3.n}$$

$$\vartheta_1^{3.n} = (2n+7)\gamma_1^{3.n} + 8\gamma_2^{3.n}$$

. . . . . .

$$\vartheta_i^{3.n} = (2n+4i+3)\gamma_i^{3.n} + (4i+4)\gamma_{i+1}^{3.n} ,$$

$$\gamma_0^{5.n} = \frac{1}{3}\beta^2 \vartheta_0^{3.n}$$

$$\gamma_1^{5.n} = \beta^2\left(\frac{1}{3}\vartheta_1^{3.n} + \gamma_0^{5.n}\right)$$

. . . . . .

$$\gamma_i^{5.n} = \beta^2\left(\frac{1}{3}\vartheta_i^{3.n} + \gamma_{i-1}^{5.n}\right) ,$$

Ganz allgemein ist

$$\vartheta_i^{m.n} = (m+2n+4i)\gamma_i^{m.n} + (4i+4)\gamma_{i+1}^{m.n}$$

und

$$\gamma_i^{m+2.n} = \beta^2\left[\frac{1}{m}\vartheta_i^{m.n} + \gamma_{i-1}^{m+2.n}\right] .$$

In diesen Formeln ist

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} .$$

Die Nummer (52) möge allen diesen Formeln gelten. Die numerischen Werte der γ sind in der Tafel XIX enthalten.

Die Reihenentwicklungen (51) definiren die negativen Potenzen der Grösse Δ_0, gelten aber auch, wie unmittelbar ersichtlich ist, als Ausdrücke der Grössen D_1, D_3, D_5 . . aus (50) vorausgesetzt, dass man in denselben

(53)
$$\gamma_0^{1.n} \text{ mit } \gamma_0^{1.n} - \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{für} \quad n = 1$$

$$\gamma_0^{3\,n} \text{ mit } \gamma_0^{3.n} - \alpha^3 \quad \text{für} \quad n = 0$$

ersetzt.

Das allgemeine Glied der Reihe (51) besteht aus dem Produkt von

$$\left(\frac{r}{a}\,\frac{r'}{a'}\right)^n \operatorname{Cos} n\,V$$

mit

$$2\,C_n^{(s)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s},$$

welche letztere Grösse nach (52) die Form

$$2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s}\Big\{\gamma_0^{s.n}-\gamma_1^{s.n}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]+\gamma_2^{s.n}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]^2$$

$$-\gamma_3^{s.n}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]^3+\gamma_4^{s.n}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\right]^4$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big\}$$

besitzt. Man leitet hieraus die Entwicklung

$$2\,C_n^{(s)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s}= \quad 2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s}\left[\gamma_0^{s.n}-\gamma_1^{s.n}+\gamma_2^{s.n}-\gamma_3^{s.n}+\ldots\right]$$

$$+2\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2+s}\left[\gamma_1^{s.n}-2\gamma_2^{s.n}+3\gamma_3^{s.n}-4\gamma_4^{s.n}+\ldots\right]$$

$$+2\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+4+s}\left[\gamma_2^{s.n}-3\gamma_3^{s.n}+6\gamma_4^{s.n}-10\gamma_5^{s.n}+\ldots\right]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+2\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2i+s}\left[\gamma_i^{s.n}-\frac{i+1}{1}\gamma_{i+1}^{s.n}+\frac{i+1\,.\,i+2}{1\,.\,2}\gamma_{i+2}^{s.n}\right.$$

$$\left.-\frac{i+1\,.\,i+2\,.\,i+3}{1\,.\,2\,.\,3}\gamma_{i+3}^{s.n}-\ldots\right]$$

ab, welche mit Anwendung der Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{s.n} - \gamma_1^{s.n} + \gamma_2^{s.n} - \gamma_3^{s.n} + \gamma_4^{s.n} - \gamma_5^{s.n} + \ldots &= \Gamma_0^{s.n} \\
\gamma_1^{s.n} - 2\gamma_2^{s.n} + 3\gamma_3^{s.n} - 4\gamma_4^{s.n} + 5\gamma_5^{s.n} - \ldots &= \Gamma_1^{s.n} \\
\gamma_2^{s.n} - 3\gamma_3^{s.n} + 6\gamma_4^{s.n} - 10\gamma_5^{s.n} + \ldots &= \Gamma_2^{s.n} \\
\gamma_3^{s.n} - 4\gamma_4^{s.n} + 10\gamma_5^{s.n} - \ldots &= \Gamma_3^{s.n} \qquad (54) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\gamma_i^{s.n} - \frac{i+1}{1}\gamma_{i+1}^{s.n} + \frac{i+1 \,.\, i+2}{1 \,.\, 2}\gamma_{i+2}^{s.n} - \ldots &= \Gamma_i^{s.n}
\end{aligned}$$

in die folgende übergeht

$$\begin{aligned}
2\,C_n^{(s)}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s} &= 2\Gamma_0^{s.n}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+s} \\
&+ 2\,\Gamma_1^{s.n}\left(\frac{r}{a}\right)^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2+s} \\
&+ 2\,\Gamma_2^{s.n}\left(\frac{r}{a}\right)^4\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+4+s} \qquad (55) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 2\,\Gamma_i^{s.n}\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2i+s} .
\end{aligned}$$

Jedes Glied der Reihe $\left(\frac{a}{\Delta_0}\right)^s$ lässt sich also in der Form

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n \mathrm{Cos}\, n\,V \,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2(n+i)+s}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.2\,\Gamma_i^{s.n} \qquad (56)$$

schreiben.

Zunächst zu entwickeln ist nun die Grösse

$$\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n \mathrm{Cos}\, n\,V\,,$$

was nicht anders ist als der reele Theil von

$$\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n e^{\sqrt{-1}n(f-f'+\Pi-\Pi')}$$

oder von

$$\left[\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}f}\right]^n\left[\frac{r'}{a'}e^{-\sqrt{-1}f'}\right]^n e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}.$$

Nun ist

$$\frac{r}{a}\operatorname{Cos} f = \operatorname{Cos}\varepsilon - e = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^{-1} - e$$

$$\frac{r}{a}\operatorname{Sin} f = \sqrt{1-e^2}\operatorname{Sin}\varepsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{-1}}y - \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{-1}}y^{-1}$$

wo

$$y = e^{\sqrt{-1}\varepsilon} \quad . \tag{57}$$

Mithin wird

$$\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}f} = \frac{1+\sqrt{1-e^2}}{2}y + \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{2}y^{-1} - e$$

oder, indem man bezeichnet

$$1+\sqrt{1-e^2} = \varkappa \ , \tag{58}$$

$$\frac{2}{\varkappa}\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}f} = \frac{\left(y-\frac{e}{\varkappa}\right)^2}{y} \tag{59}$$

und

$$\left(\frac{2}{\varkappa}\right)^n\left[\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}f}\right]^n = \frac{\left(y-\frac{e}{\varkappa}\right)^{2n}}{y^n} \ ,$$

woraus fliesst

$$\left(\frac{2}{\varkappa}\right)^n\left[\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}f}\right]^n = y^n - \frac{e}{\varkappa}\frac{2n}{1}y^{n-1} + \left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2\frac{2n\,.\,2n-1}{1\,.\,2}y^{n-2}$$

$$-\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^3\frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2}{1\,.\,2\,.\,3}y^{n-3} + \left(\frac{e}{\varkappa}\right)^4\frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2\,.\,2n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}y^{n-4} - \ldots$$

Ganz ebenso ergiebt sich

$$\left(\frac{2}{x'}\right)^n \left[\frac{r'}{a'} e^{-\sqrt{-1}f'}\right]^n = y'^{-n} - \frac{e'}{x'}\frac{2n}{1} y'^{-n+1} + \left(\frac{e'}{x'}\right)^2 \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} y'^{-n+2}$$

$$- \left(\frac{e'}{x'}\right)^3 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y'^{-n+3} + \left(\frac{e'}{x'}\right)^4 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2 \,.\, 2n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y'^{-n+4} - \ldots,$$

indem nämlich die mit (57) und (58) analogen Bezeichnungen

$$y' = e^{\sqrt{-1}\varepsilon'}$$

$$1 + \sqrt{1 - e'^2} = x'$$

eingeführt worden sind. Somit wird

$$\left(\frac{4}{xx'}\right)^n \left[\frac{r}{a} e^{\sqrt{-1}f}\right]^n \left[\frac{r'}{a'} e^{\sqrt{-1}f'}\right]^n = y^n y'^{-n} - \frac{e}{x}\frac{2n}{1} y^{n-1} y'^{-n} - \frac{e'}{x'}\frac{2n}{1} y^n y'^{-n+1}$$

$$+ \left(\frac{e}{x}\right)^2 \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} y^{n-2} y'^{-n} + \frac{e}{x}\frac{e'}{x'}\frac{2n \,.\, 2n}{1 \,.\, 1} y^{n-1} y'^{-n+1} + \left(\frac{e'}{x'}\right)^2 \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} y^n y'^{-n+2}$$

$$- \left(\frac{e}{x}\right)^3 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^{n-3} y'^{-n} - \left(\frac{e}{x}\right)^2 \frac{e'}{x'} \frac{2n \,.\, 2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 1 \,.\, 2} y^{n-2} y'^{-n+1}$$

$$- \frac{e}{x}\left(\frac{e'}{x'}\right)^2 \frac{2n \,.\, 2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 1 \,.\, 2} y^{n-1} y'^{-n+2} - \left(\frac{e'}{x'}\right)^3 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^n y'^{-n+3}$$

(60)
$$+ \left(\frac{e}{x}\right)^4 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2 \,.\, 2n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y^{n-4} y'^{-n}$$

$$+ \left(\frac{e}{x}\right)^3 \frac{e'}{x'} \frac{2n \,.\, 2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^{n-3} y'^{-n+1}$$

$$+ \left(\frac{e}{x}\right)^2 \left(\frac{e'}{x'}\right)^2 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 2} y^{n-2} y'^{-n+2}$$

$$+ \frac{e}{x}\left(\frac{e'}{x'}\right)^3 \frac{2n \,.\, 2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2}{1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} y^{n-1} y'^{-n+3}$$

$$+ \left(\frac{e'}{x'}\right)^4 \frac{2n \,.\, 2n-1 \,.\, 2n-2 \,.\, 2n-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} y^n y'^{-n+4},$$

in dem wir die Glieder fünfter und höherer Ordnung vernachlässigen. Dieser Ausdruck ist noch mit

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2i+s}$$

oder, indem wir setzen

$$2i + s = m \tag{61}$$

mit

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+m}$$

zu multipliciren. Nun ist aber

$$\frac{a'}{r'} = \frac{1}{1 - e' \operatorname{Cos} \varepsilon'} = \frac{2}{\varkappa'}\left(1 - \frac{e'}{\varkappa'} y'\right)^{-1}\left(1 - \frac{e'}{\varkappa} y'^{-1}\right)^{-1} ,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\varkappa'}{2}\right)^{2n+m}\left(\frac{a}{r'}\right)^{2n+m} &= 1 - \frac{e'}{\varkappa'}\frac{2n+m}{1}(y' + y'^{-1}) \\
&+ \left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^2\left[\frac{2n+m.2n+m-1}{1\ .\ 2}(y'^2 + y'^{-2}) + \frac{2n+m.2n+m}{1\ .\ 1}\right] \\
&- \left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^3\left[\frac{2n+m.2n+m-1.2n+m-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}(y'^3 + y'^{-3})\right. \\
&\left. + \frac{2m+m\ .\ 2m+m\ .\ 2m+m-1}{1\ .\ 1\ .\ 2}(y' + y'^{-1})\right] \qquad (62) \\
&+ \left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^4\left[\frac{2n+m.2n+m-1.2n+m-2.2n+m-3}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}(y'^4 + y'^{-4})\right. \\
&\quad + \frac{2n+m.2n+m.2n+m-1.2n+m-2}{1\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3}(y'^2 + y'^{-2}) \\
&\quad \left. + \frac{2n+m.2n+m-1.2n+m.2n+m-1}{1\ .\ 2\ .\ 1\ .\ 2}\right] .
\end{aligned}$$

Führen wir die Multiplikation aus, und ordnet man das Resultat nach Potenzen von $\frac{e}{\varkappa}$ und $\frac{e'}{\varkappa}$, so ergiebt sich für das Glied

(63) $$\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}e^{\sqrt{-1}(f-f'+\Pi-\Pi')}\right]^n\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+m}$$

folgende Entwicklung

$$K^m_{0.0}(n.-n)y^n y'^{-n} \qquad \text{Faktor: } \left(\frac{\varkappa\varkappa'}{4}\right)^n\left(\frac{2}{\varkappa'}\right)^{2n+m}e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}.$$

$$+\frac{e}{\varkappa}K^m_{1.0}(n-1.-n)y^{n-1}y'^{-n}$$

$$+\frac{e'}{\varkappa'}[K^m_{0.1}(n.-n+1)y^n y'^{-n+1}+K^m_{0.1}(n-n-1)y^n y'^{-n-1}]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2[K^m_{2.0}(n-2.-n)y^{n-2}y'^{-n}]$$

$$+\frac{e}{\varkappa}\frac{e'}{\varkappa'}[K^m_{1.1}(n-1.-n+1)y^{n-1}y'^{-n+1}+K^m_{1.1}(n-1.-n-1)y^{n-1}y'^{-n-1}]$$

$$+\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^2[K^m_{0.2}(n.-n+2)y^n y'^{-n+2}+K^m_{0.2}(n.-n)y^n y'^{-n}+K_{0.2}(n.-n-2)y^n y'^{-n-2}]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^3K^m_{3.0}(n-3.-n)y^{n-3}y'^{-n}$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2\frac{e'}{\varkappa'}[K^m_{2.1}(n-2.-n+1)y^{n-2}y'^{-n+1}+K^m_{2.1}(n-2.-n-1)y^{n-2}y'^{-n-1}]$$

$$+\frac{e}{\varkappa}\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^2[K^m_{1.2}(n-1.-n+2)y^{n-1}y'^{-n+2}+K^m_{1.2}(n-1.-n)y^{n-1}y'^{-n}$$
$$+K^m_{1.2}(n-1.-n-2)y^{n-1}y'^{-n-2}]$$

$$+\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^3[K^m_{0.3}(n.-n+3)y^n y'^{-n+3}+K^m_{0.3}(n.-n+1)y^n y'^{-n+1}$$
$$+K^m_{0.3}(n.-n-1)y^n y'^{-n-1}+K^m_{0.3}(n.-n-3)y^n y'^{-n-3}]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^4K^m_{4.0}(n-4.-n)y^{n-4}y'^{-n}$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^3\frac{e'}{\varkappa'}[K^m_{3.1}(n-3.-n+1)y^{n-3}y'^{-n+1}+K^m_{3.1}(n-3.-n-1)y^{n-3}y'^{-n-1}]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^2[K^m_{2.2}(n-2.-n+2)y^{n-2}y'^{-n+2}+K^m_{2.2}(n-2.-n)y^{n-2}y'^{-n-2}$$

$$+K^m_{2.2}(n-2.-n-2)y^{n-2}y'^{-n-2}]$$

$$+\frac{e}{\varkappa}\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^3[K^m_{1.3}(n-1.-n+3)y^{n-1}y'^{-n+3}+K^m_{1.3}(n-1.-n+1)y^{n-1}y'^{-n+1}$$

$$+K^m_{1.3}(n-1.-n-1)y^{n-1}y'^{-n-1}+K^m_{1.3}(n-1.-n-3)y^{n-1}y'^{-n-3}]$$

$$+\left(\frac{e'}{\varkappa'}\right)^4[K^m_{0.4}(n.-n+4)y^ny'^{-n+4}+K^m_{0.4}(n.-n+2)y^ny'^{-n+2}+K^m_{0.4}(n.-n)y^ny'^{-n}$$

$$+K^m_{0.4}(n.-n-2)y^ny'^{-n-2}+K^m_{0.4}(n.-n-4)y^ny'^{-n-4}]\ .$$

Dabei haben die Coefficienten, für welche hier wie durchgängig im folgenden die sehr zur Übersicht beitragende Bezeichnungsweise von Gyldén[1]) angewandt worden ist, indem die Potenzen der Excentriciteten und die Argumente, welche mit jedem Coëfficienten zu verbinden sind, durch Indices angemerkt werden, folgende Werte.

$$K^m_{0.0}(n.-n)=1$$

$$K^m_{1.0}(n-1.-n) \quad =-\frac{2n}{1}$$

$$K^m_{0.1}(n.-n+1) \quad = \quad \frac{m}{1}$$

$$K^m_{0.1}(n.-n-1) \quad = \quad \frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{2.0}(n-2.-n) \quad = \quad \frac{2n\,.\,2n-1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{1.1}(n-1.-n+1)=-\frac{2n}{1}\,.\,\frac{m}{1}$$

$$K^m_{1.1}(n-1.-n-1)=-\frac{2n}{1}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

[1]) Vergl. Brendel. Om användningen af den absoluta störingstheorien. Iakttagelser och undersökningar på Stockholms observatorium. Band 4 N:o 3. 1889. Masal. Formeln und Tafeln zur Berechnung der absoluten Störungen der Planeten. Kongl. Svenska Vetenskapsakademiens handlingar. Band 23 N:o 7. 1889.

$$K^m_{0,2}(n.-n+2) = \frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{0,2}(n.-n) = \frac{m}{1}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{0,2}(n.-n-2) = \frac{2n+m\,.\,2n+m+1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{3,0}(n-3.-n) = -\frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$K^m_{2,1}(n-2.-n+1) = \frac{2n\,.\,2n-1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{m}{1}$$

$$K^m_{2,1}(n-2.-n-1) = \frac{2n\,.\,2n-1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{1,2}(n-1.-n+2) = -\frac{2n}{1}\,.\,\frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{1,2}(n-1.-n) = -\frac{2n}{1}\,.\,\frac{m}{1}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{1,2}(n-1.-n-2) = -\frac{2n}{1}\,.\,\frac{2n+m\,.\,2n+m+1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{0,3}(n.-n+3) = \frac{m\,.\,m+1\,.\,m+2}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$K^m_{0,3}(n.-n+1) = \frac{m\,.\,m+1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{0,3}(n.-n-1) = \frac{m}{1}\,.\,\frac{2n+m\,.\,2n+m+1}{1\,.\,2}$$

$$K^m_{0,3}(n.-n-3) = \frac{2n+m\,.\,2n+m+1\,.\,2n+m+2}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$K^m_{4,0}(n-4.-n) = \frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2\,.\,2n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

$$K^m_{3,1}(n-3.-n+1) = -\frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{m}{1}$$

$$K^m_{3,1}(n-3.-n-1) = -\frac{2n\,.\,2n-1\,.\,2n-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{2.2}(n-2.-n+2) = \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2}$$

$$K^m_{2.2}(n-2.-n) = \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{m}{1} \,.\, \frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{2.2}(n-2.-n-2) = \frac{2n \,.\, 2n-1}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1}{1 \,.\, 2}$$

$$K^m_{1.3}(n-1.-n+3) = -\frac{2n}{1} \,.\, \frac{m \,.\, m+1 \,.\, m+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$K^m_{1.3}(n-1.-n+1) = -\frac{2n}{1} \,.\, \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{1.3}(n-1.-n-1) = -\frac{2n}{1} \,.\, \frac{m}{1} \,.\, \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1}{1 \,.\, 2}$$

$$K^m_{1.3}(n-1.-n-3) = -\frac{2n}{1} \,.\, \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1 \,.\, 2n+m+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$K^m_{0.4}(n.-n+4) = \frac{m \,.\, m+1 \,.\, m+2 \,.\, m+3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

$$K^m_{0.4}(n.-n+2) = \frac{m \,.\, m+1 \,.\, m+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \frac{2n+m}{1}$$

$$K^m_{0.4}(n.-n) = \frac{m \,.\, m+1}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1}{1 \,.\, 2}$$

$$K^m_{0.4}(n.-n-2) = \frac{m}{1} \,.\, \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1 \,.\, 2n+m+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$K^m_{0.4}(n.-n-4) = \frac{2n+m \,.\, 2n+m+1 \,.\, 2n+m+2 \,.\, 2n+m+3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.$$

Das Gesetz dieser Formeln liegt offen. Die Werte der Coëfficienten ergeben sich aber unmittelbar in der Form von Summen der Produkte von verschiedenen Facultäten. Bei der numerischen Rechnung wurden die Coëfficienten K teils nach den oben angeführten Formeln, dann aber noch nach den erwähnten Summenformeln gerechnet und wurden dadurch vollständig kontrollirt. Die numerischen Werte dieser Coëfficienten sind in der Tafel I der beigefügten Tafelsammlung enthalten. Diese Zahlen wie überhaupt alle diese Tafeln erstrecken sich nur bis zum zweiten Grade der Excentriciteten inclusive.

Der Ausdruck (63) soll jetzt mit $\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}$ multiplicirt werden, und weil die letztere Grösse durch die Formel

$$\left(\frac{2}{\varkappa}\right)^{2i}\left(\frac{r}{a}\right)^{2i} = 1 - \frac{e}{\varkappa}\left[\frac{2i}{1}y + \frac{2i}{1}y^{-1}\right]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2\left[\frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}y^2 + \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1} + \frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}y^{-2}\right]$$

$$-\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^3\left[\frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}y^3 + \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}y\right.$$

$$\left.+\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}y^{-1} + \frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}y^{-3}\right]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^4\left[\frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2\,.\,2i-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}y^4 + \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}y^2\right.$$

$$+\frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}\cdot\frac{2i\,.\,2i-1}{1\,.\,2}$$

$$\left.+\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}y^{-2} + \frac{2i\,.\,2i-1\,.\,2i-2\,.\,2i-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}y^{-4}\right]$$

gegeben ist, erhält man für das allgemeine Glied der Reihe (56):

$$\left(\frac{r}{a}\,\frac{r'}{a'}\right)^n \operatorname{Cos} n\,V\,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2i+s}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.\,2\Gamma_i^{s.n}$$

den Ausdruck

$$K_{0.0}^{s.i}(n.-n)y^n y'^{-n} \qquad \text{Faktor: } \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{n+2i}.\left(\frac{2}{\varkappa'}\right)^{n+2i+s}.\,2\,\Gamma_i^{s.n}e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}$$

$$+\frac{e}{\varkappa}\left[K_{1.0}^{s.i}(n+1.-n)y^{n+1}y'^{-n} + K_{1.0}^{s.i}(n-1.-n)y^{n-1}y'^{-n}\right]$$

$$(64)\quad +\frac{e'}{\varkappa'}\left[K_{0.1}^{s.i}(n.-n+1)y^n y'^{-n+1} + K_{0.1}^{s.i}(n.-n-1)y^n y'^{-n-1}\right]$$

$$+\left(\frac{e}{\varkappa}\right)^2\left[K_{2.0}^{s.i}(n+2.-n)y^{n+2}y'^{-n} + K_{2.0}^{s.i}(n.-n)y^n y'^{-n} + K_{2.0}^{s.i}(n-2.-n)y^{n-2}y'^{-n}\right]$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wobei die Zahlencoëfficienten folgende Werte besitzen.

$$K^{s.i}_{0.0}(n.-n) = K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{1.0}(n+1.-n) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{1.0}(n-1.-n) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) + K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n)$$

$$K^{s.i}_{0.1}(n.-n+1) = K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{0.1}(n.-n-1) = K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{2.0}(n+2.-n) = \frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{2.0}(n.-n) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n)$$

$$K^{s.i}_{2.0}(n-2.-n) = \frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n) + K^{2i+s}_{2.0}(n-2.-n)$$

$$K^{s.i}_{1.1}(n+1.-n+1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{1.1}(n-1.-n+1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1) + K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{1.1}(n+1.-n-1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{1.1}(n-1.-n-1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1) + K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{0.2}(n.-n+2) = K^{2i+s}_{0.2}(n.-n+2)$$

$$K^{s.i}_{0.2}(n.-n) = K^{2i+s}_{0.2}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{0.2}(n.-n-2) = K^{2i+s}_{0.2}(n.-n-2)$$

$$K^{s.i}_{3.0}(n+3.-n) = -\frac{2i.2i-1.2i-2}{1.2.3} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{3.0}(n+1.-n) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) + \frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n)$$

$$K^{s.i}_{3.0}(n-1.-n) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) + \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{2.0}(n-2.-n)$$

$$K^{s.i}_{3.0}(n-3.-n) = -\frac{2i.2i-1.2i-2}{1.2.3} K^{2i+s}_{0.0}(n.-n) + \frac{2i.2i-1}{1.2} K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{2.0}(n-2.-n) + K^{2i+s}_{3.0}(n-3.-n)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n+2.-n+1) = \frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n+1)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n.-n+1) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n+1)-\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{1,1}(n-1.-n+1)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n-2.-n+1) = \frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n+1)-\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{1,1}(n-1.-n+1)+K^{2i+s}_{2,1}(n-2.-n+1)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n+2.-n-1) = \frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n-1)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n.-n-1) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n-1)-\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{1,1}(n-1.-n-1)$$

$$K^{s,i}_{2,1}(n-2.-n-1) = \frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{0,1}(n.-n-1)-\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{1,1}(n-1.-n-1)+K^{2i+s}_{2,1}(n-2.-n-1)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n+1.-n+2) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n+2)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n-1.-n+2) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n+2)+K^{2i+s}_{1,2}(n-1.-n+2)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n+1.-n) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n-1.-n) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n)\quad+K^{2i+s}_{1,2}(n-1.-n)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n+1.-n-2) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n-2)$$

$$K^{s,i}_{1,2}(n-1.-n-2) = -\frac{2i}{1}\,K^{2i+s}_{0,2}(n.-n-2)+K^{2i+s}_{1,2}(n-1.-n-2)$$

$$K^{s,i}_{0,3}(n.-n+3) = K^{2i+s}_{0,3}(n.-n+3)$$

$$K^{s,i}_{0,3}(n.-n+1) = K^{2i+s}_{0,3}(n.-n+1)$$

$$K^{s,i}_{0,3}(n.-n-1) = K^{2i+s}_{0,3}(n.-n-1)$$

$$K^{s,i}_{0,3}(n.-n-3) = K^{2i+s}_{0,3}(n.-n-3)$$

$$K^{s,i}_{4,0}(n+4.-n) = \frac{2i.2i-1.2i-2.2i-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,K^{2i+s}_{0,0}(n.-n)$$

$$K^{s,i}_{4,0}(n+2.-n) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,K^{2i+s}_{0,0}(n.-n)-\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\,.\,2\,.\,3}\,K^{2i+s}_{1,0}(n-1.-n)$$

$$K^{s,i}_{4,0}(n.-n) = \frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{0,0}(n.-n)-\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{1,0}(n-1.-n)$$
$$+\frac{2i.2i-1}{1\,.\,2}\,K^{2i+s}_{2,0}(n-2.-n)$$

$$K^{s.i}_{4.0}(n-2.-n) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)-\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n)$$
$$+\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{2.0}(n-2.-n)-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{3.0}(n-3.-n)$$

$$K^{s.i}_{4.0}(n-4.-n) = \frac{2i.2i-1.2i-2.2i-3}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}K^{2i+s}_{0.0}(n.-n)-\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{1.0}(n-1.-n)$$
$$+\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{2.0}(n-2.-n)-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{3.0}(n-3.-n)+K^{2i+s}_{4.0}(n-4.-n)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n+3.-n+1) = -\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n+1.-n+1) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)+\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n-1.-n+1) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)+\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{2.1}(n-2.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n-3.-n+1) = -\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n+1)+\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{2.1}(n-2.-n+1)+K^{2i+s}_{3.1}(n-3.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n+3.-n-1) = -\frac{2i.2i-1\ 2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n+1.-n-1) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)+\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n-1.-n-1) = -\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)+\frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n-1)$$
$$-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{2.1}(n-2.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{3.1}(n-3.-n-1) = -\frac{2i.2i-1.2i-2}{1\ .\ 2\ .\ 3}\ K^{2i+s}_{0.1}(n.-n-1)+\frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{1.1}(n-1.-n-1)$$
$$-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{2.1}(n-2.-n-1)+K^{2i+s}_{3.1}(n-3.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n+2.-n+2) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.2}(n.-n+2)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n.-n+2) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{0.2}(n.-n+2)-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n+2)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n-2.-n+2) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2}\ K^{2i+s}_{0.2}(n.-n+2)-\frac{2i}{1}\ K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n+2)+K^{2i+s}_{2.2}(n-2.-n+2)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n+2.-n) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n.-n) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n-2.-n) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n) + K^{2i+s}_{2.2}(n-2.-n)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n+2.-n-2) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n-2)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n.-n-2) = \frac{2i}{1}\cdot\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n-2) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n-2)$$

$$K^{s.i}_{2.2}(n-2.-n-2) = \frac{2i.2i-1}{1\ .\ 2} K^{2i+s}_{0.2}(n.-n-2) - \frac{2i}{1} K^{2i+s}_{1.2}(n-1.-n-2) + K^{2i+s}_{2.2}(n-2.-n-2)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n+1.-n+3) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n+3)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n-1.-n+3) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n+3) + K^{2i+s}_{1.3}(n-1.-n+3)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n+1.-n+1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n-1.-n+1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n+1) + K^{2i+s}_{1.3}(n-1.-n+1)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n+1.-n-1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n-1.-n-1) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n-1) + K^{2i+s}_{1.3}(n-1.-n-1)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n+1.-n-3) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n-3)$$

$$K^{s.i}_{1.3}(n-1.-n-3) = -\frac{2i}{1} K^{2i+s}_{0.3}(n.-n-3) + K^{2i+s}_{1.3}(n-1.-n-3)$$

$$K^{s.i}_{0.4}(n.-n+4) = K^{2i+s}_{0.4}(n.-n+4)$$

$$K^{s.i}_{0.4}(n.-n+2) = K^{2i+s}_{0.4}(n.-n+2)$$

$$K^{2.i}_{0.4}(n.-n) = K^{2i+s}_{0.4}(n.-n)$$

$$K^{s.i}_{0.4}(n.-n-2) = K^{2i+s}_{0.4}(n.-n-2)$$

$$K^{s.i}_{0.4}(n.-n-4) = K^{2i+s}_{0.4}(n.-n-4)$$

Die numerischen Werte dieser Coëfficienten sind in der Tafel II enthalten. Die Reihe (64) läuft nach Potenzen von den Grössen $\frac{e}{x}, \frac{e'}{x'}$. Wir führen zur einfacheren Schreibweise die Bezeichnung

(65) $$\eta_1 = \frac{e}{\varkappa}\,; \quad \eta'_1 = \frac{e'}{\varkappa'}$$

ein, so dass dann dieselbe Reihe nach Potenzen von η_1 und η'_1 geordnet ist. Jedes Glied derselben soll aber noch mit dem Coëfficienten

$$\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{2i+n}\left(\frac{\varkappa'}{2}\right)^{-(2i+n+s)}$$

multiplicirt werden. Nun ist

$$\varkappa = 1 + \sqrt{1-e^2}\ ,$$

wovon

(66) $$\frac{\varkappa}{2} = \frac{1}{1+\eta_1^2}\ .$$

Wir bekommen also

$$\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{2i+n} = 1 - (2i+n)\eta_1^2 + \frac{(2i+n)(2i+n+1)}{1\ .\ 2}\eta_1^4$$

und ebenso

$$\left(\frac{\varkappa'}{2}\right)^{-(2i+n+s)} = 1 + (2i+n+s)\eta'^2_1 + \frac{(2i+n+s)(2i+n+s-1)}{1\ .\ 2}\eta'^4_1\ .$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^{2i+n}\left(\frac{\varkappa'}{2}\right)^{-(2i+n+s)} &= 1 - (2i+n)\eta_1^2 + (2i+n+s)\eta'^2_1 \\ &+ \frac{(2i+n)(2i+n+1)}{1\ .\ 2}\eta_1^4 \\ &- \frac{(2i+n)(2i+n+s)}{1\ .\ 1}\eta_1^2\eta'^2_1 \\ &+ \frac{(2i+n+s)(2i+n+s-1)}{1\ .\ 2}\eta'^4_1\ .\end{aligned} \tag{67}$$

Setzen wir dieses in die Gleichung (64) ein, so bekommen wir für

$$\left(\frac{r}{a}\,\frac{r'}{a'}\right)^n \mathrm{Cos}\ n\,V\,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2n+2i+s}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.2\,\Gamma_i^{s,n}$$

die Entwicklung

$$\overline{K}^{s.i}_{0.0}(n.-n)y^n y'^{-n} \qquad \text{Faktor: } 2\Gamma_i^{s.n} e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}$$

$$+\eta_1\left[\overline{K}^{s.i}_{1.0}(n+1.-n)y^{n+1}y'^{-n}+\overline{K}^{s.i}_{1.0}(n-1.-n)y^{n-1}y'^{-n}\right]$$

$$(68)\quad +\eta'_1\left[\overline{K}^{s.i}_{0.1}(n.-n+1)y^n y'^{-n+1}+\overline{K}^{s.i}_{0.1}(n.-n-1)y^n y'^{-n-1}\right]$$

$$+\eta_1^2\left[\overline{K}^{s.i}_{2.0}(n+2.-n)y^{n+2}y'^{-n}+\overline{K}^{s.i}_{2.0}(n.-n)y^n y'^{-n}+\overline{K}^{s.i}_{2.0}(n-2.-n)y^{n-2}y'^{-n}\right]$$

$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Die gestrichenen $\overline{K}$ hängen mit den ungestrichenen folgendermassen zusammen.

$$\overline{K}^{s.i}_{0.0}(n.-n) = K^{s.i}_{0.0}(n.-n) \qquad \text{Faktor: } 2\Gamma_i^{s.n} e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}$$

$$\overline{K}_{1.0}(n+1.-n) = K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$\overline{K}_{1.0}(n-1.-n) = K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\overline{K}_{0.1}(n-.n+1) = K_{0.1}(n.-n+1)$$
$$\overline{K}_{0.1}(n.-n-1) = K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\overline{K}_{2.0}(n+2.-n) = K_{2.0}(n+2.-n)$$
$$\overline{K}_{2.0}(n.-n) = K_{2.0}(n.-n)-(2i+n)K_{0.0}(n.-n)$$
$$\overline{K}_{2.0}(n-2.-n) = K_{2.0}(n-2.-n)$$

$$\overline{K}_{1.1}(n+1.-n+1) = K_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$\overline{K}_{1.1}(n-1.+n+1) = K_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$\overline{K}_{1.1}(n+1.-n-1) = K_{1.1}(n+1.-n-1)$$
$$\overline{K}_{1.1}(n-1.-n-1) = K_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\overline{K}_{0.2}(n.-n+2) = K_{0.2}(n.-n+2)$$
$$\overline{K}_{0.2}(n.-n) = K_{0.2}(n.-n)+(2i+n+s)K_{0.0}(n.-n)$$
$$\overline{K}_{0.2}(n.-n-2) = K_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\overline{K}_{3.0}(n+3.-n) = K_{3.0}(n+3.-n)$$
$$\overline{K}_{3.0}(n+1.-n) = K_{3.0}(n+1.-n)-(2i+n)K_{1.0}(n+1.-n) \mid +\overline{K}_{1.0}(n+1.-n)$$
$$\overline{K}_{3.0}(n-1.-n) = K_{3.0}(n-1.-n)-(2i+n)K_{1.0}(n-1.-n) \mid +\overline{K}_{1.0}(n-1.-n)$$
$$\overline{K}_{3.0}(n.-3-n) = K_{3.0}(n-3.-n)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n+2.-n+1) = K_{2.1}(n+2.-n+1)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n.-n+1) = K_{2.1}(n.-n+1)-(2i+n)K_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n-2.-n+1) = K_{2.1}(n-2.-n+1)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n+2.-n-1) = K_{2.1}(n+2.-n-1)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n.-n-1) = K_{2.1}(n.-n-1)-(2i+n)K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\overline{K}_{2.1}(n-2.-n-1) = K_{2.1}(n-2.-n-1)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n+1.-n+2) = K_{1.2}(n+1.-n+2)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n-1.-n+2) = K_{1.2}(n-1.-n+2)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n+1.-n) = K_{1.2}(n+1.-n)+(2i+n+s)K_{1.0}(n+1.-n)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n-1.-n) = K_{1.2}(n-1.-n)+(2i+n+s)K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n+1.-n-2) = K_{1.2}(n+1.-n-2)$$

$$\overline{K}_{1.2}(n-1.-n-2) = K_{1.2}(n-1.-n-2)$$

$$\overline{K}_{0.3}(n.-n+3) = K_{0.3}(n.-n+3)$$

$$\overline{K}_{0.3}(n.-n+1) = K_{0.3}(n.-n+1)+(2i+n+s)K_{0.1}(n.-n+1) \mid +\overline{K}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\overline{K}_{0.3}(n.-n-1) = K_{0.3}(n.-n-1)+(2i+n+s)K_{0.1}(n.-n-1) \mid +\overline{K}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\overline{K}_{0.3}(n.-n-3) = K_{0.3}(n.-n-3)$$

$$\overline{K}_{4.0}(n+4.-n) = K_{4.0}(n+4.-n)$$

$$\overline{K}_{4.0}(n+2.-n) = K_{4.0}(n+2.-n)-(2i+n)K_{2.0}(n+2.-n) \mid +2\overline{K}_{2.0}(n+2.-n)$$

$$\overline{K}_{4.0}(n.-n) = K_{4.0}(n.-n) -(2i+n)K_{2.0}(n.-n) \mid +2\overline{K}_{2.0}(n.-n)$$
$$+\frac{(2i+n)(2i+n+1)}{1\ .\ 2}K_{0.0}(n.-n)$$

$$\overline{K}_{4.0}(n-2.-n) = K_{4.0}(n-2.-n)-(2i+n)K_{2.0}(n-2.-n) \mid +2\overline{K}_{2.0}(n-2.-n)$$

$$\overline{K}_{4.0}(n-4.-n) = K_{4.0}(n-4.-n)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n+3.-n+1) = K_{3.1}(n+3.-n+1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n+1.-n+1) = K_{3.1}(n+1.-n+1)-(2i+n)K_{1.1}(n+1.-n+1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n+1.-n+1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n-1.-n+1) = K_{3.1}(n-1.-n+1)-(2i+n)K_{1.1}(n-1.-n+1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n-3.-n+1) = K_{3\ 1}(n-3.-n+1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n+3.-n-1) = K_{3.1}(n+3.-n-1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n+1.-n-1) = K_{3.1}(n+1.-n-1)-(2i+n)K_{1.1}(n+1.-n-1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n-1.-n-1) = K_{3.1}(n-1.-n-1)-(2i+n)K_{1.1}(n-1.-n-1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\overline{K}_{3.1}(n-3.-n-1) = K_{3.1}(n-3.-n-1)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n+2.-n+2) = K_{2.2}(n+2.-n+2)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n.-n+2) = K_{2.2}(n.-n+2) - (2i+n)K_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n-2.-n+2) = K_{2.2}(n-2.-n+2)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n+2.-n) = K_{2.2}(n+2.-n)+(2i+n+s)K_{2.0}(n+2.-n)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n.-n) = K_{2.2}(n.+n) - (2i+n)K_{0.2}(n.-n)-(2i+n)(2i+n+s)K_{0.0}(n.-n) + (2i+n+s)K_{2.0}(n.-n)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n-2.-n) = K_{2.2}(n-2.-n)+(2i+n+s)K_{2\,0}(n-2.-n)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n+2.-n-2) = K_{2.2}(n+2.-n-2)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n.-n-2) = K_{2.2}(n.-n-2)-(2i+n) \quad K_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\overline{K}_{2.2}(n-2.-n-2) = K_{2.2}(n-2.-n-2)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n+1.-n+3) = K_{1.3}(n+1.-n+3)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n-1.-n+3) = K_{1.3}(n-1.-n+3)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n+1.-n+1) = K_{1.3}(n+1.-n+1)+(2i+n+s)K_{1.1}(n+1.-n+1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n+1.-n+1)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n-1\ -n+1) = K_{1.3}(n-1.-n+1)+(2i+n+s)K_{1.1}(n-1.-n+1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n+1.-n-1) = K_{1.3}(n+1.-n-1)+(2i+n+s)K_{1.1}(n+1.-n-1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n-1.-n-1) = K_{1.3}(n-1.-n-1)+(2i+n+s)K_{1.1}(n-1.-n-1) \mid +\overline{K}_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n+1.-n-3) = K_{1.3}(n+1.-n-3)$$

$$\overline{K}_{1.3}(n-1.-n-3) = K_{1.3}(n-1.-n-3)$$

$$\overline{K}_{0.4}(n.-n+4) = K_{0.4}(n.-n+4)$$

$$\overline{K}_{0.4}(n.-n+2) = K_{0.4}(n.-n+2)+(2i+n+s)K_{0.2}(n.-n+2) \mid +2\overline{K}_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\overline{K}_{0.4}(n.-n) = K_{0.4}(n.-n) +(2i+n+s)K_{0.2}(n.-n) + \frac{(2i+n+s)(2i+n+s-1)}{1\ .\ 2}K_{0.0}(n.-n) \mid +2\overline{K}_{0.2}(n.-n)$$

$$\overline{K}_{0.4}(n.-n-2) = K_{0.4}(n.-n-2)+(2i+n+s)K_{0.2}(n.-n-2) \mid +2\overline{K}_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\overline{K}_{0.4}(n.-n-4) = K_{0.4}(n.-n-4)$$

Wünscht man die Störungsfunktion nach Potenzen von den Grössen

$$\eta = \frac{e}{2} \quad ; \quad \eta' = \frac{e'}{2} \tag{69}$$

entwickelt zu haben, so hat man den Gleichungen (58) und (65) zufolge die Werte

$$\eta_1 = \eta + \eta^3 \quad ; \quad \eta_1' = \eta' + \eta'^3$$

$$\eta_1^2 = \eta^2 + 2\eta^4 \quad ; \quad \eta_1\eta_1' = \eta\eta' + \eta\eta'^3 + \eta^3\eta' \quad ; \quad \eta_1'^2 = \eta'^2 + 2\eta'^4$$

in die Reihe (68) einzuführen. Die Entwicklung nimmt dann dieselbe Form wie (68) nur, mit dem Unterschiede, dass η_1 und η_1' durch η und η' ersetzt werden. Die neuen Coefficienten sind in dem eben angeführten Verzeichnisse in der Weise enthalten, dass die Zuschüsse zu den Coefficienten der Entwicklung nach η_1 und η_1', welche anzubringen sind, um die Coëfficienten der Entwicklung nach η und η' zu erhalten, in diesen Formeln selbst angegeben und mit einem vertikalen Striche von denjenigen Gliedern getrennt sind, welche allein der Entwicklung nach $\frac{e}{\varkappa}$ und $\frac{e'}{\varkappa'}$ entsprechen. Wir werden im Folgenden die Entwicklung nach η und η' anwenden.

Die $\overline{K}^{s,i}$ sind in der Tafel III angeführt. Dieselben sind für $s = 1, 3, 5 \ldots$ die Entwicklungscoëfficienten von den Grössen $D_1, D_3, D_5 \ldots$ aus 50.

Um $a\Omega$ zu erhalten hat man noch die Ausdrücke

$$-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}J \,.\, D_3 \,.\, \frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi')$$

und

$$\operatorname{Sin}^4\frac{1}{2}J \,.\, D_5 \,.\, \frac{6}{\alpha^2}\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi')\right]^2$$

zu bilden. Wie leicht zu ersehen ist, hat man

$$\frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi') =$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{r}{a}e^{\sqrt{-1}(f+\Pi)} - \frac{r}{a}e^{-\sqrt{-1}(f+\Pi)}\right]\left[\frac{r'}{a'}e^{\sqrt{-1}(f'+\Pi')} - \frac{r'}{a'}e^{-\sqrt{-1}(f'+\Pi')}\right]$$

$$= -\frac{\varkappa\varkappa'}{8\alpha}\Big\{(y - 2\eta_1 + \eta_1^2 y^{-1})(y' - 2\eta'_1 + \eta'^2_1 y'^{-1})e^{\sqrt{-1}(\Pi+\Pi')}$$

$$+ (y^{-1} - 2\eta_1 + \eta_1^2 y)(y'^{-1} - 2\eta'_1 + \eta'^2_1 y')e^{-\sqrt{-1}(\Pi+\Pi')}$$

$$- (y - 2\eta_1 + \eta_1^2 y^{-1})(y'^{-1} - 2\eta'_1 + \eta'^2_1 y')e^{\sqrt{-1}(\Pi-\Pi')}$$

$$- (y^{-1} - 2\eta_1 + \eta_1^2 y)(y' - 2\eta'_1 + \eta'^2_1 y'^{-1})e^{-\sqrt{-1}(\Pi-\Pi')}\Big\}$$

Das Produkt $\frac{\varkappa\varkappa'}{4}$ können wir mit $\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}J$ zusammennehmen, so dass der Coëfficient der betreffenden Glieder, mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\varkappa = 2\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi \;;\quad e = \mathrm{Sin}\,\varphi$$

sich als

$$j^2 = \mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}J\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi' \tag{70}$$

ergiebt. Die diesen Faktor enthaltenden Glieder setzen sich also zusammen aus dem Produkt von $j^2 D_3$ mit der Grösse

$$\frac{1}{2\alpha}\Big\{[yy' - 2\eta'_1 y - 2\eta_1 y' + \eta'^2_1 yy'^{-1} + 4\eta_1\eta'_1 + \eta_1^2 y^{-1}y']e^{\sqrt{-1}(\Pi+\Pi')}$$

$$+ [y^{-1}y'^{-1} - 2\eta'_1 y^{-1} - 2\eta_1 y'^{-1} + \eta'^2_1 y^{-1}y' + 4\eta_1\eta'_1 + \eta_1^2 yy'^{-1}]e^{-\sqrt{-1}(\Pi+\Pi')}$$

$$- [yy'^{-1} - 2\eta'_1 y - 2\eta_1 y'^{-1} + \eta'^2_1 yy' + 4\eta_1\eta'_1 + \eta_1^2 y^{-1}y'^{-1}]e^{\sqrt{-1}(\Pi-\Pi')}$$

$$- [y^{-1}y' - 2\eta'_1 y^{-1} - 2\eta_1 y' + \eta'^2_1 y^{-1}y'^{-1} + 4\eta_1\eta'_1 + \eta_1^2 yy']e^{-\sqrt{-1}(\Pi-\Pi')}\Big\}\,.$$

Dieser Ausdruck ist streng richtig, representirt aber noch den strengen Ausdruck bis auf Glieder zweiter Ordnung inclusive, wenn man η_1 und η'_1 mit η und η', wie hier geschehen soll, ersetzt.

Führt man die Multiplikation aus, so entsteht als Ausdruck für

$$-\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}J\,.\,D_3\,.\,\frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\,\mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')$$

eine Summe von Gliedern von der Form

$$j^2\eta^p\eta'^q\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s)_{\pm\delta}y^r y'^{-s}\cdot\frac{1}{2\alpha}2\Gamma_i^{3.n}e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm\Delta]}$$

oder

$$(71)\qquad j^2\eta^p\eta'^q\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s)_{\pm\sigma}y^r y'^{-s}\cdot\frac{1}{2\alpha}2\Gamma_i^{3.n}e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm\Sigma]}$$

Die Zahlen, mit welchen die Argumente ε und ε' multiplicirt sind, werden in den Coëfficienten durch die Indices rs angegeben, ebenso wie die Potenzen von η und η' durch die Indices pq gekennzeichnet sind. Ausser diesen Indices, welche in den Coëfficienten der übrigen Glieder auch vorhanden waren, kommen noch bei diesen mit j^2 multiplicirten Gliedern die Indices $\pm\delta$ oder $\pm\sigma$ hinzu um anzuzeigen, dass die Argumente ausser der Grösse $n(\Pi-\Pi')$ noch entweder $\pm\Delta$ oder $\pm\Sigma$ enthalten, wobei

$$(72)\qquad \Delta=\Pi-\Pi'\ ,\quad \Sigma=\Pi+\Pi'\ .$$

Es genügt nach dieser Auseinandersetzung, nur die Coëfficienten der betreffenden Glieder anzusetzen. Über jede Gruppe ist der Coëfficient $j^2\eta^p\eta'^q$ der Übersicht wegen angeführt. Nur bei den ersten Coëfficienten der Gruppe sind die Indices $1.i$ und $3.i$ und der Strich über K vermerkt worden.

j^2

Faktor: $\dfrac{1}{2\alpha}2\Gamma_i^{3n}e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma]}$

$$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}=\ \overline{K}^{3.i}_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}=\ K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}=-K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}=-K_{0.0}(n.-n)$$

$j^2\eta$

$$\overline{K}^{s.i}_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma}=\ \overline{K}^{3.i}_{1.0}(n+1.-n)$$
$$K_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma}\ =\ K_{1.0}(n.-1-n)-2K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma}\ =\ K_{1.0}(n+1.-n)-2K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma}=\ K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$K_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta}=-K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$K_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}\ =-K_{1.0}(n-1.-n)+2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} = -K_{1.0}(n+1.-n)+2K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} = -K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$j^2\eta'$$

$$\overline{K}^{1.i}_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma} = \overline{K}^{3.i}_{0.1}(n.-n+1)$$
$$K_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma} = K_{0.1}(n.-n-1)-2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} = K_{0.1}(n.-n+1)-2K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma} = K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} = -K_{0.1}(n.-n+1)+2K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta} = -K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} = -K_{0.1}(n.-n+1)$$
$$K_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta} = -K_{0.1}(n.-n-1)+2K_{0.0}(n.-n)$$

$$j^2\eta^2$$

$$\overline{K}^{1.i}_{2.0}(n+3.-n+1)_{+\sigma} = \overline{K}^{3.i}_{2.0}(n+2.-n)$$
$$K_{2.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = K_{2.0}(n.-n) -2K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$K_{2.0}(n-1.-n+1)_{+\sigma} = K_{2.0}(n-2.-n)-2K_{1.0}(n-1.-n)+K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{2.0}(n+1.-n-1)_{-\sigma} = K_{2.0}(n+2.-n)-2K_{1.0}(n+1.-n)+K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{2.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = K_{2.0}(n.-n) -2K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$K_{2.0}(n-3.-n-1)_{-\sigma} = K_{2.0}(n-2.-n)$$

$$K_{2.0}(n+3.-n-1)_{+\delta} = -K_{2.0}(n+2.-n)$$
$$K_{2.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} = -K_{2.0}(n.-n) +2K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$K_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta} = -K_{2.0}(n-2.-n)+2K_{1.0}(n-1.-n)-K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta} = -K_{2.0}(n+2.-n)+2K_{1.0}(n+1.-n)-K_{0.0}(n.-n)$$
$$K_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} = -K_{2.0}(n.-n) +2K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$K_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta} = -K_{2.0}(n-2.-n)$$

$$j^2\eta\eta'$$

$$\overline{K}^{1.i}_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma} = \overline{K}^{3.i}_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$K_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma} = K_{1.1}(n+1.-n-1)-2K_{1.0}(n+1.-n)$$

$$K_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma} = K_{1.1}(n-1.-n+1)-2K_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K_{1.1}(n.-n)_{+\sigma} = K_{1.1}(n-1.-n-1)-2K_{1.0}(n-1.-n)+4K_{0.0}(n.-n)-2K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{1.1}(n.-n)_{-\sigma} = K_{1.1}(n+1.-n+1)-2K_{0.1}(n.-n+1)+4K_{0.0}(n.-n)-2K_{1.0}(n+1.-n)$$

$$K_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma} = K_{1.1}(n+1.-n-1)-2K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma} = K_{1.1}(n-1.-n+1)-2K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$K_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma} = K_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$K_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta} = -K_{1.1}(n+1.-n+1)+2K_{1.0}(n+1.-n)$$

$$K_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta} = -K_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$K_{1.1}(n.-n)_{+\delta} = -K_{1.1}(n-1.-n+1)+2K_{0.1}(n.-n+1)-4K_{0.0}(n.-n)+2K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$K_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta} = -K_{1.1}(n-1.-n-1)+2K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta} = -K_{1.1}(n+1.-n+1)+2K_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K_{1.1}(n.-n)_{-\delta} = -K_{1.1}(n+1.-n-1)+2K_{0.1}(n.-n-1)-4K_{0.0}(n.-n)+2K_{1.0}(n+1.-n)$$

$$K_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta} = -K_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$K_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta} = -K_{1.1}(n-1.-n-1)+2K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$j^2\eta'^2$$

$$\overline{K}^{1.i}_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma} = \overline{K}^{3.i}_{0.2}(n.-n+2)$$

$$K_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = K_{0.2}(n.-n) -2K_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma} = K_{0.2}(n.-n-2)-2K_{0.1}(n.-n-1)+K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma} = K_{0.2}(n.-n+2)-2K_{0.1}(n.-n+1)+K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = K_{0.2}(n.-n) -2K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma} = K_{0.2}(n.-n-2)$$

$$K_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta} = -K_{0.2}(n.-n+2)+2K_{0.1}(n.-n+1)-K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta} = -K_{0.2}(n.-n) +2K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$K_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta} = -K_{0.2}(n.-n-2)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta}=-K_{0.2}(n.-n+2)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta}=-K_{0.2}(n.-n)\quad+2K_{0.1}(n.-n+1)$$

$$K_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta}=-K_{0.2}(n.-n-2)+2K_{0.1}(n.-n-1)-K_{0.0}(n.-n)$$

Um $a\Omega$ zu erhalten hat man nur noch das dritte von den Gliedern (49) zu entwickeln. Indem hier alle Glieder, welche die Excentriciteten enthalten, übergegangen werden, bekommt man

$$\frac{6}{a^2}\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Sin}(f+\Pi)\operatorname{Sin}(f'+\Pi')\right]^2=$$

$$=\left(\frac{\varkappa\varkappa'}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{8a^2}\Big\{4+y^2y'^2e^{\sqrt{-1}\,2(\Pi+\Pi')}+y^{-2}y'^{-2}e^{-\sqrt{-1}\,2(\Pi+\Pi')}$$

$$+y^2y'^{-2}e^{\sqrt{-1}\,2(\Pi-\Pi')}+y^{-2}y'^2e^{-\sqrt{-1}\,2(\Pi-\Pi')}$$

$$-2y^2e^{\sqrt{-1}\,2\Pi}\qquad-2y^{-2}e^{-\sqrt{-1}\,2\Pi}$$

$$-2y'^2e^{\sqrt{-1}\,2\Pi'}\qquad-2y'^{-2}e^{-\sqrt{-1}\,2\Pi'}\Big\}$$

und

$$D_5=\Sigma\overline{K}^{5.i}_{0.0}(n.-n)y^ny'^{-n}2\,I^{5.n}_i e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}$$

also in $a\Omega$ die folgenden Glieder:

$$j^4$$

$$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma}=\overline{K}^{5.i}_{0.0}(n.-n)\qquad\text{Faktor: }\frac{3}{8a^2}\cdot 2\,I^{5.n}_i e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma]}$$

$$K_{0.0}(n+2.-n)_{\sigma+\delta}=-2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n+2.-n-2)_{2\delta}=K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n.-n+2)_{\sigma-\delta}=-2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n.-n)_{\sigma-\sigma}=4K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta}=-2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta}=K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta}=-2K_{0.0}(n.-n)$$

$$K_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma}=K_{0.0}(n.-n)$$

Mit den $\overline{K}^{1.i}$ sind die Entwicklungscoëfficienten der Störungsfunction $a\Omega$ bis zu Gliedern vierter Ordnung vollständig gegeben. Vertauscht man in den obigen Formeln die Indices $1.i$, $3.i$ in $3.i$, $5.i$ u. s. w. und $\Gamma_i^{1.n}$ in $\Gamma_i^{3.n}$ u. s. w., so gelten dieselben der Entwicklung von

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 = D_3 - 3\,\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}J\,.\,D_5\,.\,\frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\,\mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')$$

(73)

$$+\,5\,\mathrm{Sin}^4\frac{1}{2}J\,.\,D_7\,.\,\frac{6}{\alpha^2}\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\,\mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')\right]^2,$$

wenn man in diesem Falle nur

(74)
$$\begin{aligned} 3j^2 \quad &\text{statt} \quad j^2 \\ 5j^4 \quad &\text{»} \quad j^4 \end{aligned}$$

einführt. Die Zahlencoëfficienten sind dann mit $\overline{K}^{3.i}$ bezeichnet.

Da nun — mit Auslassung der Faktoren —

$$a\Omega = \mathrm{RT}^{1})\,\overline{\Sigma}K^{1.i}(r\,.\,-s)y^r y'^{-s}\,,$$

so folgt

$$-\,a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \frac{\mathrm{IT}^{1})}{\sqrt{-1}}\,\Sigma r\,\overline{K}^{1.i}(r\,.\,-s)y^r y'^{-s}\,.$$

Setzen wir demnach

(75)
$$-\,a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\Sigma P^i(r\,.\,-s)y^r y'^{-s}\,,$$

so haben wir

(76)
$$\begin{aligned} P^i_{0.0}(n.-n) \quad &= n\,\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n.-n) \\ P^i_{1.0}(n+1.-n) &= (n+1)\,\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n+1.-n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P^i_{p.q}(r.-s) &= r\,\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s) \end{aligned}$$

---

[1]) RT bedeutet Reeler Teil von den betreffenden Exponentialreihen.

$\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}$ » Imaginärer Teil dividirt durch $\sqrt{-1}$.

wobei die letzte Formel allgemein und zwar auch für diejenigen Glieder, welche j^2 und j^4 als Faktor enthalten, gültig ist.

Sonst hat man in (75) dieselben Faktoren anzuwenden, welche in den oben gegebenen Formeln den Coëfficienten $\overline{K}^{1,i}$ zugeordnet worden sind. Die numerischen Werte der $P^i(r\,.\,-s)$ in der für die Tafeln geltenden Ausdehnung sind in der Tafel IV enthalten.

Die Entwicklung von $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ ergiebt sich durch das folgende Verfahren in sehr einfacher Weise. Durch Differentiation von (49) bekommt man unmittelbar

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{r}{a}\frac{\partial D_1}{\partial\frac{r}{a}}-\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}J\left(\frac{r}{a}\frac{\partial D_3}{\partial\frac{r}{a}}+D_3\right)\cdot\frac{2}{\alpha}\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')$$

$$+\mathrm{Sin}^4\frac{1}{2}J\left(\frac{r}{a}\frac{\partial D_5}{\partial\frac{r}{a}}+2D_5\right)\cdot\frac{6}{\alpha^2}\left[\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\mathrm{Sin}\,(f+\Pi)\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')\right]^2.$$

Den Gleichungen (51) und (56) gemäss erhält man aber

$$\frac{r}{a}\frac{\partial D_1}{\partial\frac{r}{a}}=\Sigma(2i+n)\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n\mathrm{Cos}\,nV\,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2(n+i)+1}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.2I_i^{1,n}$$

$$\frac{r}{a}\frac{\partial D_3}{\partial\frac{r}{a}}+D_3=\Sigma(2i+n+1)\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n\mathrm{Cos}\,nV\,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2(n+i)+3}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.2I_i^{3,n}$$

$$\frac{r}{a}\frac{\partial D_5}{\partial\frac{r}{a}}+2D_5=\Sigma(2i+n+2)\left(\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\right)^n\mathrm{Cos}\,nV\,.\left(\frac{a'}{r'}\right)^{2(n+i)+5}.\left(\frac{r}{a}\right)^{2i}.2I_i^{5,n}\,.$$

Diese drei Reihen sind der Reihe (56) sonst ganz ähnlich, nur dass jedes Glied mit dem Faktor $2i+n$, $2i+n+1$, $2i+n+2$ resp. multiplicirt ist. Die Reihe für $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ wird also von derselben äusseren Form wie die Reihe für $a\Omega$. Die Zahlencoëfficienten unterscheiden sich in den beiden Fällen nur mit den erwähnten ganzzahligen Faktoren. Setzt man demnach

$$(77) \qquad ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \mathrm{RT}\,\Sigma Q^i(r.-s)y^r y'^{-s}$$

so wird

$$Q^i_{0.0}(n.-n)=(2i+n)\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n.-n)$$

$$(78) \qquad Q^i_{1.0}(n+1.-n)=(2i+n)\overline{K}^{1.i}_{1.0}(n.-n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q^i_{p.q}(r.-s)=(2i+n)\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s)$$

und ferner für die mit j^2 und j^4 multiplicirten Glieder

$$(78\,\mathrm{a}) \qquad Q^i_{p.q}(r.-s)_{\pm m\delta\pm m_1\sigma}=(2i+n+1)\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s)_{\pm m\delta\pm m_1\sigma} \qquad \text{Faktor: } j^2$$

$$(78\,\mathrm{b}) \qquad Q^i_{p.q}(r.-s)_{\pm m\delta\pm m_1\sigma}=(2i+n+2)\overline{K}^{1.i}_{p.q}(r.-s)_{\pm m\delta\pm m_1\sigma} \qquad \text{Faktor: } j^4$$

Die Faktoren sind dieselben wie für $a\Omega$ und $a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$, enthalten also für die drei Gruppen (78), (78 a), (78 b) je $2I^{1.n}_i$, $\frac{1}{2a}2I^{3.n}_i$, $\frac{3}{8a^2}2I^{5.n}_i$. Die numerischen Werte der $Q^i(r.-s)$ finden sich in der Tafel V.

Die dritte Derivirte der Störungsfunction ergiebt sich aus der Formel

$$(79) \qquad a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\left[\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - a^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\right]\cdot\frac{r'}{a'}\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi')\cdot\frac{1}{a}\,\mathrm{Sin}\,J\ .$$

Wenn wir hier den Ausdruck (73) unter Berüchsichtigung dessen, dass

$$(80) \qquad \begin{aligned} -\sqrt{-1}\,\frac{r'}{a'}\,\mathrm{Sin}\,(f'+\Pi') = \frac{\varkappa'}{2}\Big\{&\Big[-\frac{1}{2}e^{\sqrt{-1}\Pi'}+\frac{1}{2}\eta'^2_1 e^{-\sqrt{-1}\Pi'}\Big]y' \\ &+\Big[\frac{1}{2}e^{-\sqrt{-1}\Pi'}-\frac{1}{2}\eta'^2_1 e^{\sqrt{-1}\Pi'}\Big]y'^{-1} \\ &+\Big[\eta'_1 e^{\sqrt{-1}\Pi'}-\eta'_1 e^{-\sqrt{-1}\Pi'}\Big]\Big\}\ , \end{aligned}$$

und bei Einführung der Bezeichnung

$$\iota = \operatorname{Sin} J \operatorname{Cos}^2 \frac{1}{2} \varphi' \tag{81}$$

anwenden, so erhalten wir eine mit ι zu multiplicirende Reihe, deren Glieder sich darin von den vorhin gefundenen unterscheiden, dass die Argumente noch die Grösse $\pm \Pi'$ enthalten, was wir in den Bezeichnungen der Coëfficienten durch ein angehängtes $\pm \pi'$ angeben können. Setzen wir demnach

$$a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = \iota \cdot \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma R^i \, (r \,.\, -s)_{\pm\pi'} \, y^r y'^{-s} \,, \tag{82}$$

so erhalten wir diese Coëfficienten R aus dem folgenden Verzeichnisse, welches in Anbetracht der Geringfügigkeit der Neigungsstörungen nur bis zu Gliedern dritter Ordnung ausgedehnt worden ist. Mit diesem Annäherungsgrade ist man berechtigt, die Grösse η_1, η'_1 mit η, η' zu ersetzen.

Faktor: $\dfrac{1}{2\alpha} 2\Gamma_i^{3.n} e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm\Pi']}$

$$R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{0.0}(n.-n)$$
$$R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = K_{0.0}(n.-n)$$

$$R^i_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{1.0}(n+1.-n)$$
$$R^i_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} = -K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$R^i_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} = K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$R^i_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} = K_{1.0}(n-1.-n)$$

$$R^i_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{0.1}(n.-n+1)$$
$$R^i_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} = -K_{0.1}(n.-n-1)+2K_{0.0}(n.-n)$$
$$R^i_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} = K_{0.1}(n.-n+1)-2K_{0.0}(n.-n)$$
$$R^i_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} = K_{0.1}(n.-n-1)$$

$$R^i_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{2.0}(n+2.-n)$$
$$R^i_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = -K_{2.0}(n.-n)$$
$$R^i_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} = -K_{2.0}(n.-2-n)$$
$$R^i_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} = K_{2.0}(n+2.-n)$$
$$R^i_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = K_{2.0}(n.-n)$$
$$R^i_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} = K_{2.0}(n-2.-n)$$

$$R^i_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$R^i_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} = -K_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$R^i_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} = -K_{1.1}(n+1.-n-1)+2K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$R^i_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} = -K_{1.1}(n-1.-n-1)+2K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$R^i_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} = K_{1.1}(n+1.-n+1)-2K_{1.0}(n+1.-n)$$
$$R^i_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} = K_{1.1}(n-1.-n+1)-2K_{1.0}(n-1.-n)$$
$$R^i_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} = K_{1.1}(n+1.-n-1)$$
$$R^i_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} = K_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$R^i_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{0.2}(n.-n+2)$$
$$R^i_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} = -K_{0.2}(n.-n) + 2K_{0.1}(n.-n+1)$$
$$R^i_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} = -K_{0.2}(n.-n-2)+2K_{0.1}(n.-n-1)-K_{0.0}(n.-n)$$
$$R^i_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} = K_{0.2}(n.-n+2)-2K_{0.1}(n.-n+1)+K_{0.0}(n.-n)$$
$$R^i_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} = K_{0.2}(n.-n) - 2K_{0.1}(n.-n-1)$$
$$R^i_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} = K_{0.2}(n.-n-2)$$

j^{i2}

Faktor:

$$R^i_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'} = -\overline{K}^{3.i}_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} \qquad \frac{3}{4\alpha^2}\cdot 2\Gamma^{5.n}_i e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma\pm\Pi']}$$
$$R^i_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'} = -K_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$
$$R^i_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'} = -K_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$R^i_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'} = -K_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$
$$R^i_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'} = K_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$R^i_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'} = K_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$
$$R^i_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'} = K_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$R^i_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'} = K_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

Die numerischen Werte der Coëfficienten R bis zur zweiten Ordnung inclusive sind in der Tafel VI zusammengestellt.

3. Elimination des Argumentes ε'.

Durch die oben angeführten Entwicklungen sind die Störungsfunction und ihre Derivirten als periodische Functionen der Argumente ε und ε' gegeben. Statt des letzteren haben wir zunächst die mittlere Anomalie g' einzuführen. Nach den HANSEN'schen Definitionen ist

$$g' = n't + n'\delta z'$$

und ferner

$$\varepsilon' - e' \operatorname{Sin} \varepsilon' = g' \,. \tag{82}$$

Setzen wir wie früher

$$y' = e^{\sqrt{-1}\,\varepsilon'}$$

und noch

$$x' = e^{\sqrt{-1}\,g'} \,, \tag{83}$$

so erhält man aus (82) durch successive Annäherungen für eine beliebige ganze Zahl r die Relation

$$\begin{aligned} y'^r = x'^r \Big\{ 1 &+ \frac{e'}{2}\left[\frac{r}{1}x' - \frac{r}{1}x'^{-1}\right] + \left(\frac{e'}{2}\right)^2\left[\frac{r(r+2)}{1\,.\,2}x'^2 - \frac{r^2}{1\,.\,1} + \frac{r(r-2)}{1\,.\,2}x'^{-2}\right] \\ &+ \left(\frac{e'}{2}\right)^3\left[\frac{r(r+3)^2}{1.2.3}x'^3 - \frac{r(r+1)^2}{1.1.2}x' + \frac{r(r-1)^2}{1.1.2}x'^{-1} - \frac{r(r-3)^2}{1.2.3}x'^{-3}\right] \\ &+ \left(\frac{e'}{2}\right)^4\left[\frac{r(r+4)^3}{1.2.3.4}x'^4 - \frac{r(r+2)^3}{1.1.2.3}x'^2 + \frac{r^4}{1.2.1.2} - \frac{r(r-2)^3}{1.1.2.3}x'^{-2} + \frac{r(r-4)^3}{1.2.3.4}x'^{-4}\right]\Big\} \,. \end{aligned} \tag{84}$$

Hier können wir, um die Formel für die Transformation zweckmässiger zu gestalten,

$$r = -n + s$$

setzen, und bekommen dann

$$y'^{-n+s} = x'^{-n+s}\Big\{1 - (n-s)\eta' x' + (n-s)\eta' x'^{-1}$$

$$+ \frac{(n-s)(n-s-2)}{2}\eta'^2 x'^2 - \frac{(n-s)^2}{1}\eta'^2 + \frac{(n-s)(n-s+2)}{2}\eta'^2 x'^{-2}$$

$$- \frac{(n-s)(n-s-3)^2}{6}\eta'^3 x'^3 + \frac{(n-s)(n-s-1)^2}{2}\eta'^3 x'$$

$$- \frac{(n-s)(n-s+1)^2}{2}\eta'^3 x'^{-1} + \frac{(n-3)(n-s+3)^2}{6}\eta'^3 x'^{-3}$$

$$+ \frac{(n-s)(n-s-4)^3}{24}\eta'^4 x'^4 - \frac{(n-s)(n-s-2)^3}{6}\eta'^4 x'^2 + \frac{(n-s)^4}{4}\eta'^4$$

$$- \frac{(n-s)(n-s+2)^3}{6}\eta'^4 x'^{-2} + \frac{(n-s)(n-s+4)^3}{24}\eta'^4 x'^{-4}\Big\} . \tag{85}$$

Mit Hülfe von dieser Formel lassen sich die Störungsfunction und ihre partiellen Derivirten zur folgenden Form transformiren:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{RT}}\, a\Omega \\ -\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} \\ \frac{1}{\mathrm{RT}}\, ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} \end{array}\right\} = \Sigma \left\{\begin{array}{l} O^i|n+r\,.\,-n+s| \\ P^i|n+r\,.\,-n+s| \\ Q^i|n+r\,.\,-n+s| \\ R^i|n+r\,.\,-n+s| \end{array}\right\} . y^{n+r}x'^{-n+s} . \tag{86}$$

Die transformirten Reihen enthalten die Potenzen von η, η', j^2, und ι, die Faktoren Γ und die constanten Argumente Π, Π' u. s. w. in ganz derselben Weise wie oben für die ursprünglichen Reihen angegeben worden ist. Die Formeln für die O, P, Q werden ganz identisch. Man hat sich nur zu erinnern, dass die schon abgeleiteten Coëfficienten der Störungsfunction selbst mit $\overline{K}^{i,j}$ bezeichnet wurden, so dass man, um auch hier vollständige äussere Übereinstimmung mit den Formelsystemen für P und für Q zu erhalten, die Bezeichnung

$$O^i(n+r.-n+s) \text{ statt } \overline{K}^{1,i}(n+r.-n+s)$$

einzuführen hätte. Die Formeln, welche wir z. B. für die P und dann für die R angeben, gestalten sich, wie man ohne Schwierigkeit sieht, folgendermassen:

$$P^i_{0.0}|n.-n| = P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{1.0}|n+1.-n| = P^i_{1.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{1.0}|n-1.-n| = P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{0.1}|n.-n+1| = P^i_{0.1}(n.-n+1)-nP^i_{0.0}(n.-n)$$
$$P^i_{0.1}|n.-n-1| = P^i_{0.1}(n.-n-1)+nP^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{2.0}|n+2.-n| = P^i_{2.0}(n+2.-n)$$
$$P^i_{2.0}|n.-n| = P^i_{2.0}(n.-n)$$
$$P^i_{2.0}|n-2.-n| = P^i_{2.0}(n-2.-n)$$

$$P^i_{1.1}|n+1.-n+1| = P^i_{1.1}(n+1.-n+1)-nP^i_{1.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{1.1}|n-1.-n+1| = P^i_{1.1}(n-1.-n+1)-nP^i_{1.0}(n-1.-n)$$
$$P^i_{1.1}|n+1.-n-1| = P^i_{1.1}(n+1.-n-1)+nP^i_{1.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{1.1}|n-1.-n-1| = P^i_{1.1}(n-1.-n-1)+nP^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{0.2}|n.-n+2| = P^i_{0.2}(n.-n+2)-(n-1)P^i_{0.1}(n.-n+1)+\frac{n(n-2)}{2}P^i_{0.0}(n.-n)$$
$$P^i_{0.2}|n.-n| = P^i_{0.2}(n.-n) +(n-1)P^i_{0.1}(n.-n+1) -n^2P^i_{0.0}(n.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{0.1}(n.-n-1)$$
$$P^i_{0.2}|n.-n-2| = P^i_{0.2}(n.-n-2)+(n+1)P^i_{0.1}(n.-n-1)+\frac{n(n+2)}{2}P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{3.0}|n+3.-n| = P^i_{3.0}(n+3.-n)$$
$$P^i_{3.0}|n+1.-n| = P^i_{3.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{3.0}|n-1.-n| = P^i_{3.0}(n-1.-n)$$
$$P^i_{3.0}|n-3.-n| = P^i_{3.0}(n-3.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n+2.-n+1| = P^i_{2.1}(n+2.-n+1)-nP^i_{2.0}(n+2.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n.-n+1| = P^i_{2.1}(n.-n+1) \quad -nP^i_{2.0}(n.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n-2.-n+1| = P^i_{2.1}(n-2.-n+1)-nP^i_{2.0}(n-2.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n+2.-n-1| = P^i_{2.1}(n+2.-n-1)+nP^i_{2.0}(n+2.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n.-n-1| = P^i_{2.1}(n.-n-1) \quad +nP^i_{2.0}(n.-n)$$

$$P^i_{2.1}|n-2.-n-1| = P^i_{2.1}(n-2.-n-1)+nP^i_{2.0}(n-2.-n)$$

$$P^i_{1.2}|n+1.-n+2| = P^i_{1.2}(n+1.-n+2)-(n-1)P^i_{1.1}(n+1.-n+1)+\frac{n(n-2)}{2}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.2}|n-1.-n+2| = P^i_{1.2}(n-1.-n+2)-(n-1)P^i_{1.1}(n-1.-n+1)+\frac{n(n-2)}{2}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{1.2}|n+1.-n| = P^i_{1.2}(n+1.-n) \quad +(n-1)P^i_{1.1}(n+1.-n+1) \quad -n^2P^i_{1.0}(n+1.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$P^i_{1.2}|n-1.-n| = P^i_{1.2}(n-1.-n) \quad +(n-1)P^i_{1.1}(n-1.-n+1) \quad -n^2P^i_{1.0}(n-1.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$P^i_{1.2}|n+1.-n-2| = P^i_{1.2}(n+1.-n-2)+(n+1)P^i_{1.1}(n+1.-n-1)+\frac{n(n+2)}{2}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.2}|n-1.-n-2| = P^i_{1.2}(n-1.-n-2)+(n+1)P^i_{1.1}(n-1.-n-1)+\frac{n(n+2)}{2}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{0.3}|n.-n+3| = P^i_{0.3}(n.-n+3)-(n-2)P^i_{0.2}(n.-n+2)+\frac{(n-1)(n-3)}{2}P^i_{0.1}(n.-n+1)$$
$$-\frac{n(n-3)^2}{6}P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{0.3}|n.-n+1| = P^i_{0.3}(n.-n+1)+(n-2)P^i_{0.2}(n.-n+2) \quad -(n-1)^2P^i_{0.1}(n.-n+1)$$
$$-nP^i_{0.2}(n.-n) \quad +\frac{(n+1)(n-1)}{2}P^i_{0.1}(n.-n-1)$$
$$+\frac{n(n-1)^2}{2}P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{0.3}|n.-n-1| = P^i_{0.3}(n.-n-1) \quad +nP^i_{0.2}(n.-n) \quad +\frac{(n-1)(n+1)}{2}P^i_{0.1}(n.-n+1)$$
$$-(n+2)P^i_{0.2}(n.-n-2) \quad -(n+1)^2P^i_{0.1}(n.-n-1)$$
$$-\frac{n(n+1)^2}{2}P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{0.3}|n.-n-3| = P^i_{0.3}(n.-n-3)+(n+2)P^i_{0.2}(n.-n-2)+\frac{(n+1)(n+3)}{2}P^i_{0.1}(n.-n-1)$$
$$+\frac{n(n+3)^2}{6}P^i_{0.0}(n.-n)$$

$$P^i_{4.0}|n+4.-n| = P^i_{4.0}(n+4.-n)$$
$$P^i_{4.0}|n+2.-n| = P^i_{4.0}(n+2.-n)$$
$$P^i_{4.0}|n.-n| = P^i_{4.0}(n.-n)$$
$$P^i_{4.0}|n-2.-n| = P_{4.0}(n-2.-n)$$
$$P^i_{4.0}|n-4.-n| = P^i_{4.0}(n-4.-n)$$

$$P^i_{3.1}|n+3.-n+1| = P^i_{3.1}(n+3.-n+1)-nP^i_{3.0}(n+3.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n+1.-n+1| = P^i_{3.1}(n+1.-n+1)-nP^i_{3.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n-1.-n+1| = P^i_{3.1}(n-1.-n+1)-nP^i_{3.0}(n-1.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n-3.-n+1| = P^i_{3.1}(n-3.-n+1)-nP^i_{3.0}(n-3.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n+3.-n-1| = P^i_{3.1}(n+3.-n-1)+nP^i_{3.0}(n+3.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n+1.-n-1| = P^i_{3.1}(n+1.-n-1)+nP^i_{3.0}(n+1.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n-1.-n-1| = P^i_{3.1}(n-1.-n-1)+nP^i_{3.0}(n-1.-n)$$
$$P^i_{3.1}|n-3.-n-1| = P^i_{3.1}(n-3.-n-1)+nP^i_{3.0}(n-3.-n)$$

$$P^i_{2.2}|n+2.-n+2| = P^i_{2.2}(n+2.-n+2)-(n-1)P^i_{2.1}(n+2.-n+1)+\frac{n(n-2)}{2}P^i_{2.0}(n+2.-n)$$
$$P^i_{2.2}|n.-n+2| = P^i_{2.2}(n.-n+2) -(n-1)P^i_{2.1}(n.-n+1) +\frac{n(n-2)}{2}P^i_{2.0}(n.-n)$$
$$P^i_{2.2}|n-2.-n+2| = P^i_{2.2}(n-2.-n+2)-(n-1)P^i_{2.1}(n-2.-n+1)+\frac{n(n-2)}{2}P^i_{2.0}(n-2.-n)$$
$$P^i_{2.2}|n+2.-n| = P^i_{2.2}(n+2.-n) +(n-1)P^i_{2.1}(n+2.-n+1) -n^2P^i_{2.0}(n+2.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{2.1}(n+2.-n-1)$$
$$P^i_{2.2}|n.-n| = P^i_{2.2}(n.-n) +(n-1)P^i_{2.1}(n.-n+1) -n^2P^i_{2.0}(n.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{2.1}(n.-n-1)$$
$$P^i_{2.2}|n-2.-n| = P^i_{2.2}(n-2.-n) +(n-1)P^i_{2.1}(n-2.-n+1) -n^2P^i_{2.0}(n-2.-n)$$
$$-(n+1)P^i_{2.1}(n-2.-n-1)$$

$$P^i_{2.2}|n+2.-n-2| = P^i_{2.2}(n+2.-n-2)+(n+1)P^i_{2.1}(n+2.-n-1)+\frac{n(n+2)}{2}P^i_{2.0}(n+2.-n)$$
$$P^i_{2.2}|n.-n-2| = P^i_{2.2}(n.-n-2) +(n+1)P^i_{2.1}(n.-n-1) +\frac{n(n+2)}{2}P^i_{2.0}(n.-n)$$
$$P^i_{2.2}|n-2.-n-2| = P^i_{2.2}(n-2.-n-2)+(n+1)P^i_{2.1}(n-2.-n-1)+\frac{n(n+2)}{2}P^i_{2.0}(n-2.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n+1.-n+3| = P^i_{1.3}(n+1.-n+3)-(n-2)P^i_{1.2}(n+1.-n+2)+\frac{(n-1)(n-3)}{2}P^i_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$-\frac{n(n-3)^2}{6}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n-1.-n+3| = P^i_{1.3}(n-1.-n+3)-(n-2)P^i_{1.2}(n-1.-n+2)+\frac{(n-1)(n-3)}{2}P^i_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$-\frac{n(n-3)^2}{6}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n+1.-n+1| = P^i_{1.3}(n+1.-n+1)+(n-2)P^i_{1.2}(n+1.-n+2)-(n-1)^2P^i_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$-nP^i_{1.2}(n+1.-n)+\frac{(n+1)(n-1)}{2}P^i_{1.1}(n+1.-n-1)$$
$$+\frac{n(n-1)^2}{2}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n-1.-n+1| = P^i_{1.3}(n-1.-n+1)+(n-2)P^i_{1.2}(n-1.-n+2)-(n-1)^2P^i_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$-nP^i_{1.2}(n-1.-n)+\frac{(n+1)(n-1)}{2}P^i_{1.1}(n-1.-n-1)$$
$$+\frac{n(n-1)^2}{2}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n+1.-n-1| = P^i_{1.3}(n+1.-n-1)+nP^i_{1.2}(n+1.-n)+\frac{(n-1)(n+1)}{2}P^i_{1.1}(n+1.-n+1)$$
$$-(n+2)P^i_{1.2}(n+1.-n-2)-(n+1)^2P^i_{1.1}(n+1.-n-1)$$
$$-\frac{n(n+1)^2}{2}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n-1.-n-1| = P^i_{1.3}(n-1.-n-1)+nP^i_{1.2}(n-1.-n)+\frac{(n-1)(n+1)}{2}P^i_{1.1}(n-1.-n+1)$$
$$-(n+2)P^i_{1.2}(n-1.-n-2)-(n+1)^2P^i_{1.1}(n-1.-n-1)$$
$$-\frac{n(n+1)^2}{2}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n+1.-n-3| = P^i_{1.3}(n+1.-n-3)+(n+2)P^i_{1.2}(n+1.-n-2)+\frac{(n+1)(n+3)}{2}P^i_{1.1}(n+1.-n-1)$$
$$+\frac{n(n+3)^2}{6}P^i_{1.0}(n+1.-n)$$

$$P^i_{1.3}|n-1.-n-3| = P^i_{1.3}(n-1.-n-3)+(n+2)P^i_{1.2}(n-1.-n-2)+\frac{(n+1)(n+3)}{2}P^i_{1.1}(n-1.-n-1)$$
$$+\frac{n(n+3)^2}{6}P^i_{1.0}(n-1.-n)$$

$$P^i_{0.4}|n.-n+4| = P^i_{0.4}(n.-n+4) - (n-3)P^i_{0.3}(n.-n+3) + \frac{(n-2)(n-4)}{2} P^i_{0.2}(n.-n+2)$$
$$- \frac{(n-1)(n-4)^2}{6} P^i_{0.1}(n.-n+1) + \frac{n(n-4)^3}{24} P^i_{0.0}(n-n)$$

$$P^i_{0.4}|n.-n+2| = P^i_{0.4}(n.-n+2) + (n-3)P^i_{0.3}(n.-n+3) - (n-2)^2 P^i_{0.2}(n.-n+2)$$
$$-(n-1)P^i_{0.3}(n.-n+1) + \frac{n(n-2)}{2} P^i_{0.2}(n.-n)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)^2}{2} P^i_{0.1}(n.-n+1) - \frac{n(n-2)^3}{6} P^i_{0.0}(n.-n)$$
$$- \frac{(n+1)(n-2)^2}{6} P^i_{0.1}(n.-n-1)$$

$$P^i_{0.4}|n.-n| = P^i_{0.4}(n.-n) + (n-1)P^i_{0.3}(n.-n+1) + \frac{n(n-2)}{2} P^i_{0.2}(n-n+2)$$
$$-(n+1)P^i_{0.3}(n.-n-1) - n^2 P^i_{0.2}(n.-n)$$
$$+ \frac{n(n+2)}{2} P^i_{0.2}(n.-n-2)$$
$$- \frac{(n-1)n^2}{2} P^i_{0.1}(n.-n+1) + \frac{n^4}{4} P^i_{0.0}(n.-n)$$
$$+ \frac{(n+1)n^2}{2} P^i_{0.1}(n.-n-1)$$

$$P^i_{0.4}|n.-n-2| = P^i_{0.4}(n.-n-2) + (n+1)P^i_{0.3}(n.-n-1) + \frac{n(n+2)}{2} P^i_{0.2}(n.-n)$$
$$-(n+3)P^i_{0.3}(n.-n-3) - (n+2)^2 P^i_{0.2}(n.-n-2)$$
$$+ \frac{(n-1)(n+2)^2}{6} P^i_{0.1}(n.-n+1) - \frac{n(n+2)^3}{6} P^i_{0.0}(n.-n)$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)^2}{2} P^i_{0.1}(n.-n-1)$$

$$P^i_{0.4}|n.-n-4| = P^i_{0.4}(n.-n-4) + (n+3)P^i_{0.3}(n.-n-3) + \frac{(n+2)(n+4)}{2} P^i_{0.2}(n.-n-2)$$
$$+ \frac{(n+1)(n+4)^2}{6} P^i_{0.1}(n.-n-1) + \frac{n(n+4)^3}{24} P^i_{0.0}(n.-n)$$

j^2

$$P^i_{0.0}|n+1.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{0.0}|n-1.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{0.0}(n-1.-n-1|_{-\sigma}$$
$$P^i_{0.0}|n+1.-n-1|_{+\delta} = P^i_{0.0}(n+1.-n-1|_{+\delta}$$
$$P^i_{0.0}|n-1.-n+1|_{-\delta} = P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta$$

$$P^i_{1.0}|n+2.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{1.0}|n.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{1.0}|n.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{1.0}|n-2.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{1.0}|n+2.-n-1|_{+\delta} = P^i_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{1.0}|n.-n-1|_{+\delta} = P^i_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{1.0}|n.-n+1|_{-\delta} = P^i_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{1.0}|n-2.-n+1|_{-\delta} = P^i_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta'$$

$$P^i_{0.1}|n+1.-n+2|_{+\sigma} = P^i_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma} - (n-1)P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{0.1}|n+1.-n|_{+\sigma} = P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma} + (n-1)P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{0.1}|n-1.-n|_{-\sigma} = P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} - (n+1)P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{0.1}|n-1.-n-2|_{-\sigma} = P^i_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma} + (n+1)P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{0.1}|n+1.-n|_{+\delta} = P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} - (n+1)P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{0.1}|n+1.-n-2|_{+\delta} = P^i_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta} + (n+1)P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{0.1}|n-1.-n+2|_{-\delta} = P^i_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} - (n-1)P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{0.1}|n-1.-n|_{-\delta} = P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta} + (n-1)P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta''$$

$$P^i_{2.0}|n+3.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{2.0}(n+3.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{2.0}|n+1.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{2.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{2.0}|n-1.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{2.0}(n-1.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{2.0}|n+1.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{2.0}(n+1.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{2.0}|n-1.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{2.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{2.0}|n-3.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{2.0}(n-3.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{2.0}|n+3.-n-1|_{+\delta} = P^i_{2.0}(n+3.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{2.0}|n+1.-n-1|_{+\delta} = P^i_{2.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{2.0}|n-1.-n-1|_{+\delta} = P^i_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta}$$

$$P^i_{2.0}|n+1.-n+1|_{-\delta} = P^i_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{2.0}|n-1.-n+1|_{-\delta} = P^i_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{2.0}|n-3.-n+1|_{-\delta} = P^i_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta\eta'$$

$$P^i_{1.1}|n+2.-n+2|_{+\sigma} = P^i_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma} - (n-1)P^i_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n+2.-n|_{+\sigma} = P^i_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma} + (n-1)P^i_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n+2|_{+\sigma} = P^i_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma} - (n-1)P^i_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n|_{+\sigma} = P^i_{1.1}(n.-n)_{+\sigma} + (n-1)P^i_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma}$$

$$P^i_{1.1}|n.-n|_{-\sigma} = P^i_{1.1}(n.-n)_{-\sigma} - (n+1)P^i_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n-2|_{-\sigma} = P^i_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma} + (n+1)P^i_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n-2.-n|_{-\sigma} = P^i_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma} - (n+1)P^i_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma}$$
$$P^i_{1.1}|n-2.-n-2|_{-\sigma} = P^i_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma} + (n+1)P^i_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{1.1}|n+2.-n|_{+\delta} = P^i_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta} - (n+1)P^i_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n+2.-n-2|_{+\delta} = P^i_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta} + (n+1)P^i_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n|_{+\delta} = P^i_{1.1}(n.-n)_{+\delta} - (n+1)P^i_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n-2|_{+\delta} = P^i_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta} + (n+1)P^i_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}$$

$$P^i_{1.1}|n.-n+2|_{-\delta} = P^i_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta} - (n-1)P^i_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n.-n|_{-\delta} = P^i_{1.1}(n.-n)_{-\delta} + (n-1)P^i_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n-2.-n+2|_{-\delta} = P^i_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta} - (n-1)P^i_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}$$
$$P^i_{1.1}|n-2.-n|_{-\delta} = P^i_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta} + (n-1)P^i_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta'^2$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n+3|_{+\sigma} = P^i_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma} - (n-2)P^i_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma} + \frac{(n-1)(n-3)}{2} P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n+1|_{+\sigma} = P^i_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma} + (n-2)P^i_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma} - (n-1)^2 P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} - n P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n-1|_{+\sigma} = P^i_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma} + n P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma} + \frac{(n-1)(n+1)}{2} P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n+1|_{-\sigma} = P^i_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma} - n P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} + \frac{(n+1)(n-1)}{2} P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n-1|_{-\sigma} = P^i_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma} + n P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} - (n+1)^2 P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma} - (n+2)P^i_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n-3|_{-\sigma} = P^i_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma} + (n+2)P^i_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma} + \frac{(n+1)(n+3)}{2} P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n+1|_{+\delta} = P^i_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta} - n P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} + \frac{(n+1)(n-1)}{2} P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n-1|_{+\delta} = P^i_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta} + n P^i_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} - (n+1)^2 P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} - (n+2)P^i_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$P^i_{0.2}|n+1.-n-3|_{+\delta} = P^i_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta} + (n+2)P^i_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta} + \frac{(n+1)(n+3)}{2} P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n+3|_{-\delta} = P^i_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta} - (n-2)P^i_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} + \frac{(n-1)(n-3)}{2} P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n+1|_{-\delta} = P^i_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta} + (n-2)P^i_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} - (n-1)^2 P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} - n P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$P^i_{0.2}|n-1.-n-1|_{-\delta} = P^i_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta} + n P^i_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta} + \frac{(n-1)(n+1)}{2} P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^4$$

$$P^i_{0.0}|n+2.-n+2|_{+2\sigma} = P^i_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma}$$

$$P^i_{0.0}|n+2.-n|_{+\sigma+\delta} = P^i_{0.0}(n+2.-n)_{+\sigma+\delta}$$

$$P^i_{0.0}|n+2.-n-2|_{+2\delta} = P^i_{0.0}(n+2.-n-2)_{+2\delta}$$

$$P^i_{0.0}|n.-n+2|_{+\sigma-\delta} = P^i_{0.0}(n.-n+2)_{+\sigma-\delta}$$

$$P^i_{0.0}|n.-n|_{+\sigma-\sigma} = P^i_{0.0}(n.-n)_{+\sigma-\sigma}$$

$$P^i_{0.0}|n.-n-2|_{-\sigma+\delta} = P^i_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta}$$

$$P^i_{0.0}|n-2.-n+2|_{-2\delta} = P^i_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta}$$
$$P^i_{0.0}|n-2.-n|_{-\sigma-\delta} = P^i_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta}$$
$$P^i_{0.0}|n-2.-n-2|_{-2\sigma} = P^i_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma}$$

Die zu den Neigungsstörungen hörenden Coëfficienten gestalten sich folgendermassen:

$$R^i_{0.0}|n.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R^i_{1.0}|n+1.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{1.0}|n-1.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{1.0}|n+1.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{1.0}|n-1.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R^i_{0.1}|n.-n+2|_{+\pi'} = R^i_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} - (n-1)R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{0.1}|n.-n|_{+\pi'} = R^i_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} + (n-1)R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{0.1}|n.-n|_{-\pi'} = R^i_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} - (n+1)R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{0.1}|n.-n-2|_{-\pi'} = R^i_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} + (n+1)R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R^i_{2.0}|n+2.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{2.0}|n.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{2.0}|n-2.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{2.0}|n+2.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{2.0}|n.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{2.0}|n-2.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R^i_{1.1}|n+1.-n+2|_{+\pi'} = R^i_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} - (n-1)R^i_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n-1.-n+2|_{+\pi'} = R^i_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} - (n-1)R^i_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n+1.-n|_{+\pi'} = R^i_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} + (n-1)R^i_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n-1.-n|_{+\pi'} = R^i_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} + (n-1)R^i_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$

$$R^i_{1.1}|n+1.-n|_{-\pi'} = R^i_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} - (n+1)R^i_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n-1.-n|_{-\pi'} = R^i_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} - (n+1)R^i_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n+1.-n-2|_{-\pi'} = R^i_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} + (n+1)R^i_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{1.1}|n-1.-n-2|_{-\pi'} = R^i_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} + (n+1)R^i_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R^i_{0.2}|n.-n+3|_{+\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} - (n-2)R^i_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} + \frac{(n-1)(n-3)}{2} R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$R^i_{0.2}|n.-n+1|_{+\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} + (n-2)R^i_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} - (n-1)^2 R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} - n R^i_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$R^i_{0.2}|n.-n-1|_{+\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} + n R^i_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} + \frac{(n-1)(n+1)}{2} R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$

$$R^i_{0.2}|n.-n+1|_{-\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} - n R^i_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} + \frac{(n+1)(n-1)}{2} R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$R^i_{0.2}|n.-n-1|_{-\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} + n R^i_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} - (n+1)^2 R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} - (n+2)R^i_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$
$$R^i_{0.2}|n.-n-3|_{-\pi'} = R^i_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} + (n+2)R^i_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} + \frac{(n+1)(n+3)}{2} R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

j^2

$$R^i_{0.0}|n+1.-n+2|_{+\sigma+\pi'} = R^i_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n-1.-n|_{-\sigma+\pi'} = R^i_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n+1.-n|_{+\delta+\pi'} = R^i_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n-1.-n+2|_{-\delta+\pi'} = R^i_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'}$$

$$R^i_{0.0}|n+1.-n|_{+\sigma-\pi'} = R^i_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n-1.-n-2|_{-\sigma-\pi'} = R^i_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n+1.-n-2|_{+\delta-\pi'} = R^i_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'}$$
$$R^i_{0.0}|n-1.-n|_{-\delta-\pi'} = R^i_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'}$$

Diese Formeln nehmen, wie sie hier angegeben worden sind, etwas viel Raum ein; in Zahlen ausgeführt, bilden sie aber eine nicht allzu umfangsreiche Tafel — die in der Tafelsammlung mit VII, VIII, IX, X bezeichneten Tafeln, welche bis zu Gliedern zweiter Ordnung ausgedehnt

worden sind. Es ist fortan zu bemerken, dass diese Coëfficienten von den Elementen der betreffenden Planeten unabhängig also reine Zahlengrössen sind.

Hat man die $Q^i|n+r.-n+s|$ und $O^i|n+r.-n+s|$ nach den obigen Formeln gebildet, so kann man noch die ersteren mit Hülfe von der Relation

$$Q^i|n+r.-n+s| = (2i+n)\,O^i|n+r.-n+s|$$

bez.

$$Q^i|n+r.-n+s|_{\pm m\delta\pm m_1\sigma} = (2i+n+1)\,O^i|n+r.-n+s|_{\pm m\delta\pm m_1\sigma}$$

und

$$Q^i|n+r.-n+s|_{\pm m\delta\pm m_1\sigma} = (2i+n+2)\,O^i|n+r.-n+s|_{\pm m\delta\pm m_1\sigma}$$

berechnen. Hierdurch wird der Übergang von ε' zu g' in $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ und in $a\Omega$ sowie die Berechnung der Q aus den O und K controlliert.

4. Wiedereinführung der Grössen $\gamma_i^{s,n}$. Summation in Bezug auf i. Controllformeln.

Wir haben in allen oben besprochenen Reihen eine doppelte Summation auszuführen, nämlich in Bezug auf n und in Bezug auf i. Wir wollen zuerst die letztere ausführen. Vorher werden wir aber die Reihen transformiren. Für jedes n haben wir nach dem Vorigen folgende Glieder:

$$k_0\Gamma_0 + k_1\Gamma_1 + k_2\Gamma_2 + k_3\Gamma_3 + \dots, \tag{87}$$

indem wir die oben angeführten Coëfficienten P^i, Q^i u. s. w. allgemein mit k_i bezeichnen. Erwägen wir nun, dass

$$\begin{aligned}
\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 + \dots &= \Gamma_0\\
\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 - \dots &= \Gamma_1\\
\gamma_2 - 3\gamma_3 + \dots &= \Gamma_2\\
\gamma_3 - \dots &= \Gamma_3\ ,
\end{aligned}$$

so können wir statt (87) auch schreiben

$$k_0\gamma_0 + (k_1 - k_0)\gamma_1 + (k_2 - 2k_1 + k_0)\gamma_2$$
$$(88) \qquad + (k_3 - 3k_2 + 3k_1 - k_0)\gamma_3 + \cdots.$$

Hierdurch bekommen wir ganz ähnliche Reihen wie in (86) nämlich

$$(89) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{1}{\mathrm{RT}}\, a\Omega \\ -\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} \\ \frac{1}{\mathrm{RT}}\, ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} \end{Vmatrix} = \Sigma \begin{Vmatrix} O^i[n+r.-n+s] \\ P^i[n+r.-n+s] \\ Q^i[n+r.-n+s] \\ R^i[n+r.-n+s] \end{Vmatrix} . y^{n+r}x'^{-n+s} \qquad \text{Faktor: } 2\gamma_i^{s,n}$$

mit dem Unterschied, dass hier in den Faktoren $\gamma_i^{s,n}$ statt $\Gamma_i^{s,n}$ wie in (86) zu setzen ist. Sonst enthalten die Faktoren die Grösse α und die Winkelgrössen Π, Π' in derselben Weise wie früher. Wie aus (88) hervorgeht, sind die neuen Coëfficienten $O^i[n+r.-n+s]$, $P^i[n+r.-n+s]$ u. s. w., welche wir mit eckigen Parentesen gekennzeichnet haben, nichts anders als die successiven Differenzen der Werte der Coëfficienten $O^i|n+r.-n+s|$, $P^i|n+r.-n+s|$ u. s. w., für $i = 1, 2, 3\ldots$, welche im Abschnitt 3 gegeben worden sind. Weil die neuen Reihen (89) so beschaffen sind, dass in den Ausdrücken von einem gewissen Grade nur eine endliche Anzahl der $\gamma_i^{s,n}$ vorkommt — so z. B. enthalten die Glieder zweiten Grades in $a\Omega$ nur $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ und in $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ nur $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — so müssen die letzten Differenzen Null werden und die vorletzten also einen constanten Wert erhalten, welcher übrigens von n unabhängig wird. Der Übergang zu den neuen Coëfficienten (89) durch Bildung der Differenzen von den früher abgeleiteten enthält in dieser Weise eine recht sichere Controlle von beiden. Die Werte der Coëfficienten $O^i[n+r.-n+s]$, $P^i[n+r.-n+s]$ u. s. w. sind in den Tafeln XI, XII, XIII, XIV logaritmisch gegeben.

Hat man nun die Grössen $\gamma_i^{s,n}$ nach den Formeln (52) bis (53) berechnet, so erhält man mit Hülfe der berechneten Zahlencoëfficienten folgende Entwicklungen der Störungsfunction und ihrer Derivirten:

$$(90)\qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{RT}}\, a\Omega \\ -\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} \\ \frac{1}{\mathrm{RT}}\, ar\,\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a^2\,\frac{\partial\Omega}{\partial Z} \end{array}\right\} = \Sigma \left\{\begin{array}{l} O[n+r.-n+s] \\ P[n+r.-n+s] \\ Q[n+r.-n+s] \\ R[n+r.-n+s] \end{array}\right\} \cdot y^{n+r}x'^{-n+s},$$

wobei

$$(91)\qquad \begin{aligned} O[n+r.-n+s] &= \Sigma_i O^i[n+r.-n+s]\,.\,2\gamma_i^{1.n} \\ P[n+r.-n+s] &= \Sigma_i P^i[n+r.-n+s]\,.\,2\gamma_i^{1.n} \\ Q[n+r.-n+s] &= \Sigma_i Q^i[n+r.-n+s]\,.\,2\gamma_i^{1.n} \\ R[n+r.-n+s] &= \Sigma_i R^i[n+r.-n+s]\,.\,2\gamma_i^{1.n}\ . \end{aligned}$$

Es ist indessen zu bemerken, dass das Formelsystem (91) insofern nur schematisch ist, als bei einigen Gliedern statt $2\gamma_i^{1.n}$ andere Multiplikatoren wie $\frac{1}{2\alpha}\,2\gamma_i^{3.n}$ u. s. w. anzuwenden sind. In den Tafeln der $O^i[n+r.-n+s]$, $P^i[n+r.-n+s]$, $Q^i[n+r.-n+s]$, $R^i[n+r.-n+s]$ ist überall angegeben, welcher Faktor mit den Zahlencoëfficienten zu verbinden ist.

Mit der Berechnung der nunmehr von α abhängigen Coëfficienten (91) ist die Entwicklung der Störenden Kräfte nach Vielfachen von ε und g' hergestellt. Die numerischen Werte der Coëfficienten (91) für $\mu = \frac{1}{3}$ sind in den Tafeln XX, XXI, XXII, XXIII zusammengestellt.

Da es aber erwünscht sein könnte, die so erlangten Resultate noch zu prüfen, möge hier eine Methode Platz finden, die Rechnung sowohl in Bezug auf die Zahlencoëfficienten als auch auf die γ_i und die Summation (91) tiefgehend zu controlliren. Dieselbe gründet sich auf die folgende von HANSEN aufgestellte Formel: [1])

[1]) Auseinandersetzung I. pag. 119.

$$2ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]-\frac{a}{\Delta}-2a^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{r}{a}\operatorname{Cos}H$$

oder, wie wir auch setzen können,

$$(92)\qquad 2ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{1}{a^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\right]-a\Omega-\frac{3}{2}a^2\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\cdot 2\frac{r}{a}\frac{r'}{a'}\operatorname{Cos}H\ .$$

Wenden wir in dieser Formel die schon gefundene Entwicklung von $a\Omega$ nach Vielfachen von ε und g' an, während die übrigen Glieder rechter Hand unabhängig in derselben Weise entwickelt werden, so ergiebt die Formel (92) neue Werte der Coëfficienten $Q[n+r.-n+s]$. Wenn dieselben mit den nach (91) berechneten übereinstimmen, so sind also nicht nur diese Coëfficienten selbst sondern auch die $O[n+r.-n+s]$ vollständig controllirt worden.

Die Ableitung der numerischen Coëfficienten möge hier nur in der Ausdehnung auseinandergesetzt werden, welche bei der numerischen Berechnung der Störungen für $\mu=\frac{1}{3}$ massgebend war, d. h. bis zu Gliedern zweiter Ordnung inclusive.

Die Entwicklung von $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$, worauf es zuerst ankommt, ist in der zweiten Abteilung durch die Coëfficienten $\overline{K}^{3.i}$ als Function von ε und ε' gegeben und wurde schon bei der Berechnung der $R^i(n+r.-n+s)_{\pm\pi'}$ angewandt. In dieser Reihe können wir sofort die $\Gamma_i^{3.n}$, $\Gamma_i^{5.n}$ mit $\gamma_i^{3.n}$, $\gamma_i^{5.n}$ vertauschen. Wir erhalten dann

$$(93)\qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3=\Sigma O^{3.i}(n+r.-n+s)y^{n+r}y'^{-n+s}\ ,\qquad \text{Faktor: } 2\gamma_i$$

wobei die Coëfficienten als die successiven Differenzen von den $\overline{K}^{3.i}$ für $i=0,1,2\ldots$ erhalten werden und in der Tafel XV angegeben sind. Vertauschen wir hier y' mit x', so entsteht die Reihe

$$(94)\qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3=\Sigma O^{3.i}[n+r.-n+s]y^{n+r}x'^{-n+s}\ ,\qquad \text{Faktor: } 2\gamma_i$$

wobei die $O^{3.i}[n+r.-n+s]$ mit den $O^{3.i}(n+r.-n+s)$ mittels derselben Formeln zusammenhängen, welche nach dem vorigen Abschnitte die

$P^i|n+r.-n+s|$ mit den $P^i(n+r.-n+s)$ verbinden. Die Coëfficienten $O^{3.i}[n+r.-n+s]$ sind in der Tafel XVI enthalten. Der Ausdruck

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left[-\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r'}{a'}\right)^2\right]$$

zerlegt sich jetzt in Folge der Relationen

$$-\left(\frac{r}{a}\right)^2=-1+2\eta y+2\eta y^{-1}-\eta^2y^2-2\eta^2-\eta^2y^{-2}$$

(95)

$$\left(\frac{r'}{a'}\right)^2=1-2\eta' x'-2\eta' x'^{-1}-\eta'^2x'^2+6\eta'^2-\eta'^2x'^{-2}$$

in die beiden Reihen

$$(96)\qquad -\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2=\Sigma\overline{O}^{3.i}[n+r.-n+s]y^{n+r}x'^{-n+s}\qquad\text{Faktor: } 2\gamma_i$$

und

$$(97)\qquad \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r'}{a'}\right)^2=\Sigma\overline{\overline{O}}^{3.i}[n+r.-n+s]y^{n+r}x'^{-n+s}\,.\qquad\text{Faktor: } \frac{1}{\alpha^2}2\gamma_i$$

Die numerischen Werte der Coëfficienten $\overline{O}^{3.i}$ und $\overline{\overline{O}}^{3.i}$, welche in den Tafeln XVII und XVIII gegeben sind, werden nach (95) durch die folgenden Formeln erhalten:

Faktor: $2\gamma_i^{3.n}$

Für $n=0$ keine Correction an $\gamma_i^{3.n}$

$$\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n.-n]=-O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]=-O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]+2\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]=-O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]+2O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]=-\overline{O}^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]=-\overline{O}^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{2.0}[n+2.-n]=-O^{3.i}_{2.0}[n+2.-n]+2O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]-O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{2.0}[n.-n]=-O^{3.i}_{2.0}[n.-n]+2O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]+2O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]-2O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{2.0}[n-2.-n]=-O^{3.i}_{2.0}[n-2.-n]+2O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]-O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{1.1}[n+1.-n+1] = -O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n+1] + 2O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]$$
$$\overline{O}^{3.i}_{1.1}[n-1.-n+1] = -O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n+1] + 2O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]$$
$$\overline{O}^{3.i}_{1.1}[n+1.-n-1] = -O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n-1] + 2O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]$$
$$\overline{O}^{3.i}_{1.1}[n-1.-n-1] = -O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n-1] + 2O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]$$

$$\overline{O}^{3.i}_{0.2}[n.-n+2] = -O^{3.i}_{0.2}[n.-n+2]$$
$$\overline{O}^{3.i}_{0.2}[n.-n] = -O^{3.i}_{0.2}[n.-n]$$
$$\overline{O}^{3.i}_{0.2}[n.-n-2] = -O^{3.i}_{0.2}[n.-n-2]$$

j^2

$$\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma} = -O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma} = -O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta} = -O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$\overline{O}^{3.i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta} = -O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$

Faktor: $\frac{1}{2\alpha} 2\gamma_i^{5.n}$

und für den zweiten Teil:

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.0}[n.-n] = O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.0}[n+1.-n] = O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.0}[n-1.-n] = O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$$

Faktor: $\frac{1}{\alpha^2} 2\gamma_i^{3.n}$

Für $n = 0$ keine Correction an $\gamma_i^{3.n}$

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.1}[n.-n+1] = O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1] - 2O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.1}[n.-n-1] = O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1] - 2O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{2.0}[n+2.-n] = O^{3.i}_{2.0}[n+2.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{2.0}[n.-n] = O^{3.i}_{2.0}[n.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{2.0}[n-2.-n] = O^{3.i}_{2.0}[n-2.-n]$$

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.1}[n+1.-n+1] = O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n+1] - 2O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.1}[n-1.-n+1] = O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n+1] - 2O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.1}[n+1.-n-1] = O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n-1] - 2O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{1.1}[n-1.-n-1] = O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n-1] - 2O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$$

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.2}[n.-n+2] = O^{3.i}_{0.2}[n.-n+2]-2O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1] - O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.2}[n.-n] = O^{3.i}_{0.2}[n.-n] -2O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]-2O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]+6O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.2}[n.-n-2] = O^{3.i}_{0.2}[n.-n-2]-2O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1] - O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

$$j^2$$

$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma} = O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma} = O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta} = O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$\overline{\overline{O}}^{3.i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta} = O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$

Faktor: $\frac{1}{2\alpha^3}\, 2\gamma_i^{5.n}$

Weil diese Entwicklung aus $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ und nicht aus $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 - \alpha^3\left(\frac{a'}{r'}\right)^3$ stammt, hat man an $\gamma_i^{3.n}$ für $n = 0$ jetzt nicht die Correction $-\alpha^3$ anzubringen. Summirt man in Bezug auf i und setzt [1])

$$(98) \qquad \overline{O}^3[n+r.-n+s] = \sum_i \overline{O}^{3.i}[n+r.-n+s]\, 2\gamma_i^{3.n}$$

$$(99) \qquad \overline{\overline{O}}^3[n+r.-n+s] = \sum_i \overline{\overline{O}}^{3.i}[n+r.-n+s]\, \frac{1}{\alpha^2}\, 2\gamma_i^{3.n} ,$$

so wird

$$-\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \Sigma\, \overline{O}^3[n+r.-n+s]\, y^{n+r}x'^{-n+s}$$

$$(100) \qquad \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 = \Sigma\, \overline{\overline{O}}^3[n+r.-n+s]\, y^{n+r}x'^{-n+s} .$$

Demnach erhält man aus der Relation (92) die Controllformel

$$(101) \qquad 2Q[n+r.-n+s] = \overline{O}^3[n+r.-n+s] + \overline{\overline{O}}^3[n+r.-n+s] - O[n+r.-n+s] ,$$

wo $O[n+r.-n+s]$ die schon berechneten Coëfficienten in $a\Omega$ bezeichnet. Wegen des letzten Gliedes in (92) hat man die Rechnung nach der Formel (101) insofern zu vervollständigen, dass den nach dieser Formel gefundenen Grössen $2Q[n+r.-n+s]$ die Correctionen

$$(102) \qquad \begin{cases} -3\alpha^2 . O^i[n+r.-n+s] & \text{für } n = 1 \ , \ i = 0 \\ -\frac{1}{2\alpha}\, 3\alpha^3 . O^i[n+r.-n+s]_{\pm m\delta \pm m_1\sigma} & \text{für } n = 0 \ , \ i = 0 \end{cases}$$

[1]) Vergl. die Bemerkung zu dem Formelsysteme (91).

hinzuzufügen sind. Für die übrigen n-Werte ist die Formel (101) unmittelbar zu brauchen.

Wünscht man noch die $R^i[n+r.-n+s]$ zu controlliren, so kann diess auch mittels der $O^{3.i}[n+r.-n+s]$ geschehen. Man hat nämlich, wie sofort ersichtlich ist,

$$R^i_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'} = -O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$R^i_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'} = +O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$

Faktor: $\frac{1}{2\alpha} 2\gamma_i^{3.n}$

$$R^i_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'} = -O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$$
$$R^i_{1.0}[n+1.-n-1]_{-\pi'} = +O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$$
$$R^i_{1.0}[n-1.-n+1]_{+\pi'} = -O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$$
$$R^i_{1.0}[n-1.-n-1]_{-\pi'} = +O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$$

$$R^i_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'} = -O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1] - O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$R^i_{0.1}[n.-n]_{-\pi'} = +O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1] - 3O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$R^i_{0.1}[n.-n]_{+\pi'} = -O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1] + 3O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$$
$$R^i_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'} = +O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1] + O^{3.i}_{0.0}[n.-n],$$

welche Formeln auch nach der Summation in Bezug auf i, also auch dann gelten, wenn man die Indices i fortlässt.

Zur Controlle der $P[n+r.-n+s]$ kann die Relation

(103) $$P[n+r.-n+s] = (n+r)\,O[n+r.-n+s]$$

[vergl. (76)] benutzt werden.

5. Elimination des Argumentes g'.

Die eben gefundenen Entwicklungen der Störungsfunction und ihrer partiellen Derivirten schreiten nach den Vielfachen von ε und g' fort. Das Argument g' können wir jetzt mittels der Formel

(104) $$g' = \mu(\varepsilon - e\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon) - \theta$$

[vergl. (31)] eliminiren. Wir haben uns dabei zu erinnern, dass μ, welche Bezeichnung wir der Einfachkeit halber statt μ_0 anwenden, ein rationales Verhältniss zweier ganzen Zahlen bedeutet.

Die Formel (104) ergiebt nun, mit Anwendung der Bezeichnungen

$$y = e^{\sqrt{-1}\varepsilon} \ , \quad x' = e^{\sqrt{-1}g'} \ , \quad \vartheta = e^{\sqrt{-1}\mathfrak{g}} \ , \tag{105}$$

bis auf Glieder vierter Ordnung den folgenden Ausdruck für die ganzen Potenzen von x':

$$\begin{aligned} x'^m = y^{m\mu}\vartheta^{-m}\Big\{1 &- \frac{m\mu}{1}\frac{e}{2}(y - y^{-1}) + \frac{(m\mu)^2}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^2(y^2 - 2 + y^{-2}) \\ &- \frac{(m\mu)^3}{6}\left(\frac{e}{2}\right)^3(y^3 - 3y + 3y^{-1} - y^{-3}) \\ &+ \frac{(m\mu)^4}{24}\left(\frac{e}{2}\right)^4(y^4 - 4y^2 + 6 - 4y^{-2} + y^{-4})\Big\} \ , \end{aligned} \tag{106}$$

oder, wenn wir wie früher

$$\frac{e}{2} = \eta \ , \quad m = -n + s \tag{107}$$

setzen,

$$\begin{aligned} x'^{-n+s} = y^{(-n+s)\mu}\vartheta^{n-s}\Big\{1 &+ \eta[(n-s)\mu y - (n-s)\mu y^{-1}] \\ &+ \eta^2\left[\frac{(n-s)^2\mu^2}{2}y^2 - \frac{(n-s)^2\mu^2}{1} + \frac{(n-s)^2\mu^2}{2}y^{-2}\right] \\ &+ \eta^3\left[\frac{(n-s)^3\mu^3}{6}y^3 - \frac{(n-s)^3\mu^3}{2}y + \frac{(n-s)^3\mu^3}{2}y^{-1} - \frac{(n-s)^3\mu^3}{6}y^{-3}\right] \\ &+ \eta^4\left[\frac{(n-s)^4\mu^4}{24}y^4 - \frac{(n-s)^4\mu^4}{6}y^2 + \frac{(n-s)^4\mu^4}{4}\right. \\ &\left.\left. - \frac{(n-s)^4\mu^4}{6}y^{-2} + \frac{(n-s)^4\mu^4}{24}y^{-4}\right]\right\} . \end{aligned} \tag{108}$$

Eliminirt man mittels dieser Formel x'^{-n+s} aus den vorhin gefundenen Reihen, so entstehen folgende endgültige Entwicklungen der Störungsfunction und deren partiellen Derivirten:

$$(109)\qquad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{\mathrm{RT}}\, a\,\Omega \\ -\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} \\ \frac{1}{\mathrm{RT}}\, a r\,\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\ \frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}}\, a^2\,\frac{\partial\Omega}{\partial Z} \end{array}\right| = \Sigma \left\{\begin{array}{l} O(n+r.-n+s) \\ P(n+r.-n+s) \\ Q(n+r.-n+s) \\ R(n+r.-n+s) \end{array}\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta^{n-s}$$

Diese Coëfficienten, in welchen runde Parentesen wieder benutzt werden können, weil sie jetzt die γ_i enthalten, und indem sie den Index i nicht haben, mit den reinen Zahlencoëfficienten $O^i(n+r.-n+s)$, $P^i(n+r.-n+s)\ldots.$, welche in dem zweiten Abschnitte vorkommen, nicht verwechselt werden können, hängen mit den im vorigen Abschnitte gegebenen Coëfficienten $O[n+r.-n+s]$, $P[n+r-n+s]$ u. s. w., welche der Entwicklung nach Vielfachen von ε und g' gehören, mittels der folgenden Formeln zusammen. Weil die Beziehungen für die O, P, Q vollkommen gleich sind, führen wir hier wieder nur die Formeln für die P und R an. Die numerischen Werthe der neuen Coëfficienten P, Q, R, sind in den Tafeln XXIV, XXV, XXVI enthalten.

Faktor: $e^{\sqrt{-1}n(\Pi-\Pi')}$

$$P_{0.0}(n.-n) = P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{1.0}(n+1.-n) = P_{1.0}[n+1.-n] + n\mu P_{0.0}[n.-n]$$
$$P_{1.0}(n-1.-n) = P_{1.0}[n-1.-n] - n\mu P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{0.1}(n.-n+1) = P_{0.1}[n.-n+1]$$
$$P_{0.1}(n.-n-1) = P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{2.0}(n+2.-n) = P_{2.0}[n+2.-n] + n\mu P_{1.0}[n+1.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{2.0}(n.-n) = P_{2.0}[n.-n] - n\mu P_{1.0}[n+1.-n] - \frac{n^2\mu^2}{1} P_{0.0}[n.-n] + n\mu P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{2.0}(n-2.-n) = P_{2.0}[n-2.-n] - n\mu P_{1.0}[n-1.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{1.1}(n+1.-n+1)=P_{1.1}[n+1.-n+1]+(n-1)\mu P_{0.1}[n.-n+1]$$
$$P_{1.1}(n-1.-n+1)=P_{1.1}[n-1.-n+1]-(n-1)\mu P_{0.1}[n.-n+1]$$
$$P_{1.1}(n+1.-n-1)=P_{1.1}[n+1.-n-1]+(n+1)\mu P_{0.1}[n.-n-1]$$
$$P_{1.1}(n-1.-n-1)=P_{1.1}[n-1.-n-1]-(n+1)\mu P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{0.2}(n.-n+2) = P_{0.2}[n.-n+2]$$
$$P_{0.2}(n.-n) = P_{0.2}[n.-n]$$
$$P_{0.2}(n.-n-2) = P_{0.2}[n.-n-2]$$

$$P_{3.0}(n+3.-n) = P_{3.0}[n+3.-n] + n\mu\, P_{2.0}[n+2.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{1.0}[n+1.-n] + \frac{n^3\mu^3}{6} P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{3.0}(n+1.-n) = P_{3.0}[n+1.-n] - n\mu\, P_{2.0}[n+2.-n] - \frac{n^2\mu^2}{1} P_{1.0}[n+1.-n] - \frac{n^3\mu^3}{2} P_{0.0}[n.-n]$$
$$+ n\mu\, P_{2.0}[n.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{3.0}(n-1.-n) = P_{3.0}[n-1.-n] - n\mu\, P_{2.0}[n.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{1.0}[n+1.-n] + \frac{n^3\mu^3}{2} P_{0.0}[n.-n]$$
$$+ n\mu\, P_{2.0}[n-2.-n] - \frac{n^2\mu^2}{1} P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{3.0}(n-3.-n) = P_{3.0}[n-3.-n] - n\mu\, P_{2.0}[n-2.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{1.0}[n-1.-n] - \frac{n^3\mu^3}{6} P_{0.0}[n-n]$$

$$P_{2.1}(n+2.-n+1)=P_{2.1}[n+2.-n+1]+(n-1)\mu P_{1.1}[n+1.-n+1]+\frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{2.1}(n.-n+1) = P_{2.1}[n.-n+1] - (n-1)\mu P_{1.1}[n+1.-n+1] - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} P_{0.1}[n.-n+1]$$
$$+(n-1)\mu P_{1.1}[n-1.-n+1]$$

$$P_{2.1}(n-2.-n+1)=P_{2.1}[n-2.-n+1]-(n-1)\mu P_{1.1}[n-1.-n+1]+\frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{2.1}(n+2\ -n-1)=P_{2.1}[n+2.-n-1]+(n+1)\mu P_{1.1}[n+1.-n-1]+\frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{2.1}(n.-n-1) = P_{2.1}[n.-n-1] - (n+1)\mu P_{1.1}[n+1.-n-1] - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} P_{0.1}[n.-n-1]$$
$$+(n+1)\mu P_{1.1}[n-1.-n-1]$$

$$P_{2.1}(n-2.-n-1)=P_{2.1}[n-2.-n-1]-(n+1)\mu P_{1.1}[n-1.-n-1]+\frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{1.2}(n+1.-n+2)=P_{1.2}[n+1.-n+2]+(n-2)\mu P_{0.2}[n.-n+2]$$

$$P_{1.2}(n-1.-n+2)=P_{1.2}[n-1.-n+2]-(n-2)\mu P_{0.2}[n.-n+2]$$

$$P_{1.2}(n+1.-n) \quad =P_{1.2}[n+1.-n] \qquad +n\mu P_{0.2}[n.-n]$$

$$P_{1.2}(n-1.-n) \quad =P_{1.2}[n-1.-n] \qquad -n\mu P_{0.2}[n.-n]$$

$$P_{1.2}(n+1.-n-2)=P_{1.2}[n+1.-n-2]+(n+2)\mu P_{0.2}[n.-n-2]$$

$$P_{1.2}(n-1.-n-2)=P_{1.2}[n-1.-n-2]-(n+2)\mu P_{0.2}[n.-n-2]$$

$$P_{0.3}(n.-n+3) \quad =P_{0.3}[n.-n+3]$$

$$P_{0.3}(n.-n+1) \quad =P_{0.3}[n.-n+1]$$

$$P_{0.3}(n.-n-1) \quad =P_{0.3}[n.-n-1]$$

$$P_{0.3}(n.-n-3) \quad =P_{0.3}[n.-n-3]$$

$$P_{4.0}(n+4.-n) \quad =P_{4.0}[n+4.-n]+n\mu P_{3.0}[n+3.-n]+\frac{n^2\mu^2}{2}P_{2.0}[n+2.-n]$$
$$+\frac{n^3\mu^3}{6}P_{1.0}[n+1.-n]+\frac{n^4\mu^4}{24}P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{4.0}(n+2.-n) \quad =P_{4.0}[n+2.-n]-n\mu P_{3.0}[n+3.-n]-\frac{n^2\mu^2}{1}P_{2.0}[n+2.-n]$$
$$+n\mu P_{3.0}[n+1.-n]+\frac{n^2\mu^2}{2}P_{2.0}[n.-n]$$
$$-\frac{n^3\mu^3}{2}P_{1.0}[n+1.-n]-\frac{n^4\mu^4}{6}P_{0.0}[n.-n]$$
$$+\frac{n^3\mu^3}{6}P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{4.0}(n.-n) \quad =P_{4.0}[n.-n] \quad -n\mu P_{3.0}[n+1.-n]+\frac{n^2\mu^2}{2}P_{2.0}[n+2.-n]$$
$$+n\mu P_{3.0}[n-1.-n]-\frac{n^2\mu^2}{1}P_{2.0}[n.-n]$$
$$+\frac{n^2\mu^2}{2}P_{2.0}[n-2.-n]$$
$$+\frac{n^3\mu^3}{2}P_{1.0}[n+1.-n]+\frac{n^4\mu^4}{4}P_{0.0}[n.-n]$$
$$-\frac{n^3\mu^3}{2}P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{4.0}(n-2.-n) = P_{4.0}[n-2.-n] - n\mu P_{3.0}[n-1.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{2.0}[n.-n]$$
$$+ n\mu P_{3.0}[n-3.-n] - \frac{n^2\mu^2}{1} P_{2.0}[n-2.-n]$$
$$- \frac{n^3\mu^3}{6} P_{1.0}[n+1.-n] - \frac{n^4\mu^4}{6} P_{0.0}[n.-n]$$
$$+ \frac{n^3\mu^3}{2} P_{1.0}[n-1.-n]$$

$$P_{4.0}(n-4.-n) = P_{4.0}[n-4.-n] - n\mu P_{3.0}[n-3.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{2.0}[n-2.-n]$$
$$- \frac{n^3\mu^3}{6} P_{1.0}[n-1.-n] + \frac{n^4\mu^4}{24} P_{0.0}[n.-n]$$

$$P_{3.1}(n+3.-n+1) = P_{3.1}[n+3.-n+1] + (n-1)\mu P_{2.1}[n+2.-n+1] + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n+1.-n+1]$$
$$+ \frac{(n-1)^3\mu^3}{6} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{3.1}(n+1.-n+1) = P_{3.1}[n+1.-n+1] - (n-1)\mu P_{2.1}[n+2.-n+1] - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} P_{1.1}[n+1.-n+1]$$
$$+ (n-1)\mu P_{2.1}[n.-n+1] + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n-1.-n+1]$$
$$- \frac{(n-1)^3\mu^3}{2} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{3.1}(n-1.-n+1) = P_{3.1}[n-1.-n+1] - (n-1)\mu P_{2.1}[n.-n+1] + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n+1.-n+1]$$
$$+ (n-1)\mu P_{2.1}[n-2.-n+1] - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} P_{1.1}[n-1.-n+1]$$
$$+ \frac{(n-1)^3\mu^3}{2} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{3.1}(n-3.-n+1) = P_{3.1}[n-3.-n+1] - (n-1)\mu P_{2.1}[n-2.-n+1] + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n-1.-n+1]$$
$$- \frac{(n-1)^3\mu^3}{6} P_{0.1}[n.-n+1]$$

$$P_{3.1}(n+3.-n-1) = P_{3.1}[n+3.-n-1] + (n+1)\mu P_{2.1}[n+2.-n-1] + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n+1.-n-1]$$
$$+ \frac{(n+1)^3\mu^3}{6} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{3.1}(n+1.-n-1) = P_{3.1}[n+1.-n-1] - (n+1)\mu P_{2.1}[n+2.-n-1] - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} P_{1.1}[n+1.-n-1]$$
$$+ (n+1)\mu P_{2.1}[n.-n-1] + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n-1.-n-1]$$
$$- \frac{(n+1)^3\mu^3}{2} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{3.1}(n-1.-n-1) = P_{3.1}[n-1.-n-1] - (n+1)\mu P_{2.1}[n.-n-1] + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n+1.-n-1]$$
$$+ (n+1)\mu P_{2.1}[n-2.-n-1] - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} P_{1.1}[n-1.-n-1]$$
$$+ \frac{(n+1)^3\mu^3}{2} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{3.1}(n-3.-n-1) = P_{3.1}[n-3.-n-1] - (n+1)\mu P_{2.1}[n-2.-n-1] + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{1.1}[n-1.-n-1]$$
$$- \frac{(n+1)^3\mu^3}{6} P_{0.1}[n.-n-1]$$

$$P_{2.2}(n+2.-n+2) = P_{2.2}[n+2.-n+2] + (n-2)\mu P_{1.2}[n+1.-n+2] + \frac{(n-2)^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n+2]$$

$$P_{2.2}(n.-n+2) = P_{2.2}[n.-n+2] - (n-2)\mu P_{1.2}[n+1.-n+2] - \frac{(n-2)^2\mu^2}{1} P_{0.2}[n.-n+2]$$
$$+ (n-2)\mu P_{1.2}[n-1.-n+2]$$

$$P_{2.2}(n-2.-n+2) = P_{2.2}[n-2.-n+2] - (n-2)\mu P_{1.2}[n-1.-n+2] + \frac{(n-2)^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n+2]$$

$$P_{2.2}(n+2.-n) = P_{2.2}[n+2.-n] + n\mu P_{1.2}[n+1.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n]$$

$$P_{2.2}(n.-n) = P_{2.2}[n.-n] - n\mu P_{1.2}[n+1.-n] - \frac{n^2\mu^2}{1} P_{0.2}[n.-n]$$
$$+ n\mu P_{1.2}[n-1.-n]$$

$$P_{2.2}(n-2.-n) = P_{2.2}[n-2.-n] - n\mu P_{1.2}[n-1.-n] + \frac{n^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n]$$

$$P_{2.2}(n+2.-n-2) = P_{2.2}[n+2.-n-2] + (n+2)\mu P_{1.2}[n+1.-n-2] + \frac{(n+2)^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n-2]$$

$$P_{2.2}(n.-n-2) = P_{2.2}[n.-n-2] - (n+2)\mu P_{1.2}[n+1.-n-2] - \frac{(n+2)^2\mu^2}{1} P_{0.2}[n.-n-2]$$
$$+ (n+2)\mu P_{1.2}[n-1.-n-2]$$

$$P_{2.2}(n-2.-n-2) = P_{2.2}[n-2.-n-2] - (n+2)\mu P_{1.2}[n-1.-n-2] + \frac{(n+2)^2\mu^2}{2} P_{0.2}[n.-n-2]$$

$$P_{1.3}(n+1.-n+3) = P_{1.3}[n+1.-n+3] + (n-3)\mu P_{0.3}[n.-n+3]$$
$$P_{1.3}(n-1.-n+3) = P_{1.3}[n-1.-n+3] - (n-3)\mu P_{0.3}[n.-n+3]$$
$$P_{1.3}(n+1.-n+1) = P_{1.3}[n+1.-n+1] + (n-1)\mu P_{0.3}[n.-n+1]$$
$$P_{1.3}(n-1.-n+1) = P_{1.3}[n-1.-n+1] - (n-1)\mu P_{0.3}[n.-n+1]$$

$$P_{1.3}(n+1.-n-1)=P_{1.3}[n+1.-n-1]+(n+1)\mu P_{0.3}[n.-n-1]$$
$$P_{1.3}(n-1.-n-1)=P_{1.3}[n-1.-n-1]-(n+1)\mu P_{0.3}[n.-n-1]$$
$$P_{1.3}(n+1.-n-3)=P_{1.3}[n+1.-n-3]+(n+3)\mu P_{0.3}[n.-n-3]$$
$$P_{1.3}(n-1.-n-3)=P_{1.3}[n-1.-n-3]-(n+3)\mu P_{0.3}[n.-n-3]$$

$$P_{0.4}(n.-n+4) = P_{0.4}[n.-n+4]$$
$$P_{0.4}(n.-n+2) = P_{0.4}[n.-n+2]$$
$$P_{0.4}(n.-n) = P_{0.4}[n.-n]$$
$$P_{0.4}(n.-n-2) = P_{0.4}[n.-n-2]$$
$$P_{0.4}(n.-n-4) = P_{0.4}[n.-n-4]$$

j^2

$$P_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}=P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}=P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}=P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}=P_{0.0}[n-1.-n+1)_{-\delta}$$

Faktor: $e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma]}$

$j^2\eta$

$$P_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma}=P_{1.0}[n+2.-n+1]_{+\sigma}+(n-1)\mu P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$P_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma} = P_{1.0}[n.-n+1]_{+\sigma} -(n-1)\mu P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$P_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma} = P_{1.0}[n.-n-1]_{-\sigma} +(n+1)\mu P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$P_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma}=P_{1.0}[n-2.-n-1]_{-\sigma}-(n+1)\mu P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$

$$P_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta}=P_{1.0}[n+2.-n-1]_{+\delta}+(n+1)\mu P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$P_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} = P_{1.0}[n.-n-1]_{+\delta} -(n+1)\mu P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$P_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} = P_{1.0}[n.-n+1]_{-\delta} +(n-1)\mu P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$
$$P_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}=P_{1.0}[n-2.-n+1]_{-\delta}-(n-1)\mu P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$

$j^2\eta'$

$$P_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}=P_{0.1}[n+1.-n+2]_{+\sigma}$$
$$P_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma} = P_{0.1}[n+1.-n]_{+\sigma}$$
$$P_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} = P_{0.1}[n-1.-n]_{-\sigma}$$
$$P_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}=P_{0.1}[n-1.-n-2]_{-\sigma}$$

$$P_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} = P_{0.1}[n+1.-n]_{+\delta}$$

$$P_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta} = P_{0.1}[n+1.-n-2]_{+\delta}$$

$$P_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} = P_{0.1}[n-1.-n+2]_{-\delta}$$

$$P_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta} = P_{0.1}[n-1.-n]_{-\delta}$$

$$j^2\eta^2$$

$$P_{2.0}(n+3.-n+1)_{+\sigma} = P_{2.0}[n+3.-n+1)_{+\sigma} + (n-1)\mu P_{1.0}[n+2.-n+1]_{+\sigma} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$

$$P_{2.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = P_{2.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma} - (n-1)\mu P_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma} - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$+ (n-1)\mu P_{1.0}[n.-n+1]_{+\sigma}$$

$$P_{2.0}(n-1.-n+1)_{+\sigma} = P_{2.0}[n-1.-n+1]_{+\sigma} - (n-1)\mu P_{1.0}[n.-n+1]_{+\sigma} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$

$$P_{2.0}(n+1.-n-1)_{-\sigma} = P_{2.0}[n+1.-n-1]_{-\sigma} + (n+1)\mu P_{1.0}[n.-n-1]_{-\sigma} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$

$$P_{2.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = P_{2.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma} - (n+1)\mu P_{1.0}[n.-n-1]_{-\sigma} - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$+ (n+1)\mu P_{1.0}[n-2.-n-1]_{-\sigma}$$

$$P_{2.0}(n-3.-n-1)_{-\sigma} = P_{2.0}[n-3.-n-1]_{-\sigma} - (n+1)\mu P_{1.0}[n-2.-n-1]_{-\sigma} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$

$$P_{2.0}(n+3.-n-1)_{+\delta} = P_{2.0}[n+3.-n-1]_{+\delta} + (n+1)\mu P_{1.0}[n+2.-n-1]_{+\delta} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$

$$P_{2.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} = P_{2.0}[n+1.-n-1]_{+\delta} - (n+1)\mu P_{1.0}[n+2.-n-1]_{+\delta} - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} P_{0.0}[n+1.-n-1)_{+\delta}$$
$$+ (n+1)\mu P_{1.0}[n.-n-1]_{+\delta}$$

$$P_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta} = P_{2.0}[n-1.-n-1]_{+\delta} - (n+1)\mu P_{1.0}[n.-n-1]_{+\delta} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$

$$P_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta} = P_{2.0}[n+1.-n+1]_{-\delta} + (n-1)\mu P_{1.0}[n.-n+1]_{-\delta} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$

$$P_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} = P_{2.0}[n-1.-n+1]_{-\delta} - (n-1)\mu P_{1.0}[n.-n+1]_{-\delta} - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$
$$+ (n-1)\mu P_{1.0}[n-2.-n+1]_{-\delta}$$

$$P_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta} = P_{2.0}[n-3.-n+1]_{-\delta} - (n-1)\mu P_{1.0}[n-2.-n+1]_{-\delta} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$

$$j^2\eta\eta'$$

$$P_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma}=P_{1.1}[n+2.-n+2]_{+\sigma}+(n-2)\mu P_{0.1}[n+1.-n+2]_{+\sigma}$$
$$P_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma}=P_{1.1}[n+2.-n]_{+\sigma}+n\mu P_{0.1}[n+1.-n]_{+\sigma}$$
$$P_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma}=P_{1.1}[n.-n+2]_{+\sigma}-(n-2)\mu P_{0.1}[n+1.-n+2]_{+\sigma}$$
$$P_{1.1}(n.-n)_{+\sigma}=P_{1.1}[n.-n]_{+\sigma}-n\mu P_{0.1}[n+1.-n]_{+\sigma}$$

$$P_{1.1}(n.-n)_{-\sigma}=P_{1.1}[n.-n]_{-\sigma}+n\mu P_{0.1}[n-1.-n]_{-\sigma}$$
$$P_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma}=P_{1.1}[n.-n-2]_{-\sigma}+(n+2)\mu P_{0.1}[n-1.-n-2]_{-\sigma}$$
$$P_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma}=P_{1.1}[n-2.-n]_{-\sigma}-n\mu P_{0.1}[n-1.-n]_{-\sigma}$$
$$P_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma}=P_{1.1}[n-2.-n-2]_{-\sigma}-(n+2)\mu P_{0.1}[n-1.-n-2]_{-\sigma}$$

$$P_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta}=P_{1.1}[n+2.-n]_{+\delta}+n\mu P_{0.1}[n+1.-n]_{+\delta}$$
$$P_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta}=P_{1.1}[n+2.-n-2]_{+\delta}+(n+2)\mu P_{0.1}[n+1.-n-2]_{+\delta}$$
$$P_{1.1}(n.-n)_{+\delta}=P_{1.1}[n.-n]_{+\delta}-n\mu P_{0.1}[n+1.-n]_{+\delta}$$
$$P_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta}=P_{1.1}[n.-n-2]_{+\delta}-(n+2)\mu P_{0.1}[n+1.-n-2]_{+\delta}$$

$$P_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta}=P_{1.1}[n.-n+2]_{-\delta}+(n-2)\mu P_{0.1}[n-1.-n+2]_{-\delta}$$
$$P_{1.1}(n.-n)_{-\delta}=P_{1.1}[n.-n]_{-\delta}+n\mu P_{0.1}[n-1.-n]_{-\delta}$$
$$P_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta}=P_{1.1}[n-2.-n+2]_{-\delta}-(n-2)\mu P_{0.1}[n-1.-n+2]_{-\delta}$$
$$P_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta}=P_{1.1}[n-2.-n]_{-\delta}-n\mu P_{0.1}[n-1.-n]_{-\delta}$$

$$j^2\eta'^2$$

$$P_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma}=P_{0.2}[n+1.-n+3]_{+\sigma}$$
$$P_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma}=P_{0.2}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$$
$$P_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma}=P_{0.2}[n+1.-n-1]_{+\sigma}$$

$$P_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma}=P_{0.2}[n-1.-n+1]_{-\sigma}$$
$$P_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma}=P_{0.2}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$$
$$P_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma}=P_{0.2}[n-1.-n-3]_{-\sigma}$$

$$P_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta}=P_{0.2}[n+1.-n+1]_{+\delta}$$
$$P_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta}=P_{0.2}[n+1.-n-1]_{+\delta}$$
$$P_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta}=P_{0.2}[n+1.-n-3]_{+\delta}$$

$$P_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta} = P_{0.2}[n-1.-n+3]_{-\delta}$$
$$P_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta} = P_{0.2}[n-1.-n+1]_{-\delta}$$
$$P_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta} = P_{0.2}[n-1.-n-1]_{-\delta}$$

j^4

$$P_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma} = P_{0.0}[n+2.-n+2]_{+2\sigma}$$
$$P_{0.0}(n+2.-n)_{+\sigma+\delta} = P_{0.0}[n+2.-n]_{+\sigma+\delta}$$
$$P_{0.0}(n+2.-n-2)_{+2\delta} = P_{0.0}[n+2.-n-2]_{+2\delta}$$

Faktor: $e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma]}$

$$P_{0.0}(n.-n+2)_{+\sigma-\delta} = P_{0.0}[n-n+2]_{+\sigma-\delta}$$
$$P_{0.0}(n.-n)_{+\sigma-\sigma} = P_{0.0}[n.-n]_{+\sigma-\sigma}$$
$$P_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta} = P_{0.0}[n.-n-2]_{-\sigma+\delta}$$

$$P_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta} = P_{0.0}[n-2.-n+2]_{-2\delta}$$
$$P_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta} = P_{0.0}[n-2.-n]_{-\sigma-\delta}$$
$$P_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma} = P_{0.0}[n-2.-n-2]_{-2\sigma}$$

Die Coëfficienten der Neigungsstörungen gestalten sich folgendermassen:

$$R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$$
$$R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = R_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$$

Faktor: $e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm\Pi']}$

$$R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} = R_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'} + (n-1)\mu R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$$
$$R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} = R_{1.0}[n-1.-n+1]_{+\pi'} - (n-1)\mu R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$$
$$R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} = R_{1.0}[n+1.-n-1]_{-\pi'} + (n+1)\mu R_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$$
$$R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} = R_{1.0}[n-1.-n-1]_{-\pi'} - (n+1)\mu R_{0.0}[n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} = R_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'}$$
$$R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} = R_{0.1}[n.-n]_{+\pi'}$$
$$R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} = R_{0.1}[n.-n]_{-\pi'}$$
$$R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} = R_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'}$$

$$R_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} = R_{2.0}[n+2.-n+1]_{+\pi'} + (n-1)\mu R_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$$

$$R_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = R_{2.0}[n.-n+1]_{+\pi'} - (n-1)\mu R_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'} - \frac{(n-1)^2\mu^2}{1} R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'} + (n-1)\mu R_{1.0}[n-1.-n+1]_{+\pi'}$$

$$R_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} = R_{2.0}[n-2.-n+1]_{+\pi'} - (n-1)\mu R_{1.0}[(n-1.-n+1]_{+\pi'} + \frac{(n-1)^2\mu^2}{2} R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$$

$$R_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} = R_{2.0}[n+2.-n-1]_{-\pi'} + (n+1)\mu R_{1.0}[n+1.-n-1]_{-\pi'} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} R_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$$

$$R_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = R_{2.0}[n.-n-1]_{-\pi'} - (n+1)\mu R_{1.0}[n+1.-n-1]_{-\pi'} - \frac{(n+1)^2\mu^2}{1} R_{0.0}(n.-n-1]_{-\pi'} + (n+1)\mu R_{1.0}[n-1.-n-1]_{-\pi'}$$

$$R_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} = R_{2.0}[n-2.-n-1]_{-\pi'} - (n+1)\mu R_{1.0}[n-1.-n-1]_{-\pi'} + \frac{(n+1)^2\mu^2}{2} R_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$$

$$R_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} = R_{1.1}[n+1.-n+2]_{+\pi'} + (n-2)\mu R_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'}$$

$$R_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} = R_{1.1}[n-1.-n+2]_{+\pi'} - (n-2)\mu R_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'}$$

$$R_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} = R_{1.1}[n+1.-n]_{+\pi'} + n\mu R_{0.1}[n.-n]_{+\pi'}$$

$$R_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} = R_{1.1}[n-1.-n]_{+\pi'} - n\mu R_{0.1}[n.-n]_{+\pi'}$$

$$R_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} = R_{1.1}[n+1.-n]_{-\pi'} + n\mu R_{0.1}[n.-n]_{-\pi'}$$

$$R_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} = R_{1.1}[n-1.-n]_{-\pi'} - n\mu R_{0.1}[n.-n]_{-\pi'}$$

$$R_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} - R_{1.1}[n+1.-n-2]_{-\pi'} + (n+2)\mu R_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'}$$

$$R_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} = R_{1.1}[n-1.-n-2]_{-\pi'} - (n+2)\mu R_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} = R_{0.2}[n.-n+3]_{+\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} = R_{0.2}[n.-n+1]_{+\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} = R_{0.2}[n.-n-1]_{+\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} = R_{0.2}[n.-n+1]_{-\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} = R_{0.2}[n.-n-1]_{-\pi'}$$

$$R_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} = R_{0.2}[n.-n-3]_{-\pi'}$$

$$j^2$$

$$R_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'} = R_{0.0}[n+1.-n+2]_{+\sigma+\pi'}$$
$$R_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'} = R_{0.0}[n-1.-n]_{-\sigma+\pi'}$$
$$R_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'} = R_{0.0}[n+1.-n]_{+\delta+\pi'}$$
$$R_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'} = R_{0.0}[n-1.-n+2]_{-\delta+\pi'}$$

$$R_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'} = R_{0.0}[n+1.-n]_{+\sigma-\pi'}$$
$$R_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'} = R_{0.0}[n-1.-n-2]_{-\sigma-\pi'}$$
$$R_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'} = R_{0.0}[n+1.-n-2]_{+\delta-\pi'}$$
$$R_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'} = R_{0.0}[n-1.-n]_{-\delta-\pi'}$$

Faktor: $e^{\sqrt{-1}[n(\Pi-\Pi')\pm m\Delta\pm m_1\Sigma\pm\Pi']}$

6. Die Reihen für T und $Qa^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$.

Nachdem im vorigen Abschnitte die Reduction der partiellen Derivirten der Störungsfunction auf die erwünschte Form als Reihen, welche nach Vielfachen von ε, $\mu\varepsilon$ und θ fortschreiten, ausgeführt worden ist, stellt sich jetzt die Aufgabe, die rechten Seiten der Gleichungen (26) und (28) in Reihen von derselben Form zu ordnen. Zu diesem Zweck transformiren wir zunächst die Ausdrücke M, N, Q durch Einführung der Bezeichnungen

$$y = e^{\sqrt{-1}\varepsilon} \; ; \; v = e^{\sqrt{-1}\eta} \; , \tag{110}$$

wo η das in den Formeln (27) und (29) vorkommende Argument ist, welches die excentrische Anomalie vertritt. Indem dasselbe durch v ersetzt wird, können wir ohne Ungelegenheit die Bezeichnung

$$\eta = \frac{e}{2}$$

in den Ausdrücken dieser Grössen beibehalten. Nach ausgeführter Reduction ergiebt sich so bis auf Glieder vierter Ordnung inclusive in M und N bez. zweiter Ordnung in Q:

$$-M = 3 + 6\eta^2 + 24\eta^4 + [-2\eta - 8\eta^3](y + y^{-1}) + [\eta^2 + 4\eta^4](y^2 + y^{-2})$$
$$+ \{[-2\eta^2 - 8\eta^4]y + [3\eta + 12\eta^3] + [-2 - 6\eta^2 - 24\eta^4]y^{-1} + [\eta + 4\eta^3]y^{-2}\}v$$
$$+ \{[-2\eta^2 - 8\eta^4]y^{-1} + [3\eta + 12\eta^3] + [-2 - 6\eta^2 - 24\eta^4]y + [\eta + 4\eta^3]y^2\}v^{-1}$$

$$\sqrt{-1}N = [\eta + 4\eta^3](y - y^{-1}) + [-\eta^2 - 4\eta^4](y^2 - y^{-2})$$
$$+ \{[2\eta^2 + 8\eta^4]y + [-\eta - 4\eta^3] + [-1 - 2\eta^2 - 8\eta^4]y^{-1} + [\eta + 4\eta^3]y^{-2}\}v$$
$$+ \{[-2\eta^2 - 8\eta^4]y^{-1} + [\eta + 4\eta^3] + [1 + 2\eta^2 + 8\eta^4]y + [-\eta - 4\eta^3]y^2\}v^{-1}$$

$$\sqrt{-1}Q = \eta(y - y^{-1}) - \eta^2(y^2 - y^{-2})$$
$$+ \left\{\eta^2 y - \frac{3}{2}\eta + \left[\frac{1}{2} + \eta^2\right]y^{-1} - \frac{1}{2}\eta y^{-2}\right\}v$$
$$+ \left\{-\eta^2 y^{-1} + \frac{3}{2}\eta + \left[-\frac{1}{2} - \eta^2\right]y + \frac{1}{2}\eta y^2\right\}v^{-1} .$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke erhält man folgende Werte der gesuchten Functionen:

$$T = Ma\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + Nar\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left(F + \frac{y}{v}G + \frac{v}{y}H\right)$$

(111)

$$Qa^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} = -\mathrm{RT}\left(F + \frac{y}{v}G + \frac{v}{y}H\right) .$$

Wir haben in beiden diesen Ausdrücken dieselben Bezeichnungen F, G, H angewandt, obgleich es verschiedene Functionen in den beiden Fällen sind. Eine Ungelegenheit wird diess wohl nicht mitführen, wenn immer, so oft es nicht ohne weiteres klar ist, besonders angegeben wird, wann die vorkommenden Ausdrücke sich auf die Neigungsstörungen beziehen. Die Functionen F, G, H sind von der Form

$$\left.\begin{matrix} F \\ G \\ H \end{matrix}\right\} = \Sigma \left\{\begin{matrix} F(n + r\,.\,-n + s) \\ G(n + r\,.\,-n + s) \\ H(n + r\,.\,-n + s) \end{matrix}\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta^{n-s} . \tag{112}$$

Die Hansen'sche Relation

$$F + \frac{1}{2}(G + H) = P$$

ergiebt für je drei zusammenhörende Coëfficienten die Controllformel

$$F(n + r\,.\,-n + s) + \frac{1}{2}\Big\{G(n + r\,.\,-n + s) + H(n + r\,.\,-n + s)\Big\}$$

(113)

$$= P(n + r\,.\,-n + s)\ .$$

Die Ausdrücke der Coëfficienten als Functionen von den P, Q, R findet man in der folgenden Zusammenstellung, welche die Formeln für F, G, H in einem einzigen Formelsysteme in der Weise vereinigt, dass vor jedem P und Q drei Zahlencoëfficienten angeführt sind, welche je den Coëfficienten F, G, H entsprechen. Aus der ersten Formel, in welcher alle drei der Grössen F, G, H linker Hand angeführt worden sind, ist diese Anordnung unmittelbar einleuchtend. Der Kürze wegen sind in allen übrigen Formeln die Buchstaben G und H auf der linken Seite ausgelassen worden. Man überzeugt sich leicht, dass diese Ausdrücke der Coëfficienten F, G, H der Controllformel (113) Genüge leisten. Dieselbe wurde auch zur Verification der numerischen Berechnung dieser Coëfficienten benutzt. Die numerischen Werte der Coëfficienten F, G, H für $\mu = \frac{1}{3}$ sind in den Tafeln XXVII, XXVIII, XXIX, XXX, XXXI gegeben, von denen die zwei letzteren sich auf die Neigungsstörungen beziehen.

$$\left.\begin{matrix} F_{0.0}(n.-n) \\ G_{0.0}(n.-n) \\ H_{0.0}(n.-n) \end{matrix}\right\} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$F_{1.0}(n+1-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$F_{1.0}(n-1.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n) \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n) \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$F_{0.1}(n.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$F_{0.1}(n.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$F_{2.0}(n+2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$F_{2.0}(n.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)$$

$$F_{2.0}(n-2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$F_{1.1}(n+1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$F_{1.1}(n-1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n+1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n+1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$F_{1.1}(n+1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$F_{1.1}(n-1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$F_{0.2}(n.-n+2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$F_{0.2}(n.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n)$$

$$F_{0.2}(n.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$F_{3.0}(n+3.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n)$$

$$F_{3.0}(n+1.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-8\\+4\\+12\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+4\\-4\\-4\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)$$

$$F_{3.0}(n-1.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-8\\+12\\+4\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-4\\+4\\+4\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)$$

$$F_{3.0}(n-3.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.0}(n-3.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n-3.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)$$

$$F_{2.1}(n+2.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.1}(n+2.-n+1) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n+2.-n+1) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$F_{2.1}(n.-n+1) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{2.1}(n.-n+1) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{1.1}(n+1.-n+1) \quad {}^{+6}_{-6}P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$ {}^{-2}_{+1}{}^{}_{+3}P_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{2.1}(n.-n+1) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{1.1}(n+1.-n+1) \quad {}^{0}_{+2}{}^{}_{-2}Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$ {}^{+1}_{-1}{}^{}_{-1}Q_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$F_{2.1}(n-2.-n+1) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{2.1}(n-2.-n+1) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{1.1}(n-1.-n+1) \quad {}^{+1}_{-2}{}^{}_{0}P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{2.1}(n-2.-n+1) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{1.1}(n-1.-n+1) \quad {}^{+1}_{-2}{}^{}_{0}Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$F_{2.1}(n+2.-n-1) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{2.1}(n+2.-n-1) \quad {}^{-2}_{-1}{}^{}_{+3}P_{1.1}(n+1.-n-1) \quad {}^{+1}_{0}{}^{}_{-2}P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{2.1}(n+2.-n-1) \quad {}^{+1}_{-1}{}^{}_{-1}Q_{1.1}(n+1.-n-1) \quad {}^{-1}_{0}{}^{}_{+2}Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$F_{2.1}(n.-n-1) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{2.1}(n.-n-1) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{1.1}(n+1.-n-1) \quad {}^{+6}_{-6}P_{0.1}(n.-n.-1)$$

$$ {}^{-2}_{+1}{}^{}_{+3}P_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{2.1}(n.-n-1) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{1.1}(n+1.-n-1) \quad {}^{0}_{+2}{}^{}_{-2}Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$ {}^{+1}_{-1}{}^{}_{-1}Q_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$F_{2.1}(n-2.-n-1) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{2.1}(n-2.-n-1) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{1.1}(n-1.-n-1) \quad {}^{+1}_{-2}{}^{}_{0}P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{2.1}(n-2.-n-1) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{1.1}(n-1.-n-1) \quad {}^{+1}_{-2}{}^{}_{0}Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$F_{1.2}(n+1.-n+2) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{1.2}(n+1.-n+2) \quad {}^{-2}_{+1}{}^{}_{+3}P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{1.2}(n+1.-n+2) \quad {}^{+1}_{-1}{}^{}_{-1}Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$F_{1.2}(n-1.-n+2) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{1.2}(n-1.-n+2) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{1.2}(n-1.-n+2) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$F_{1.2}(n+1.-n) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{1.2}(n+1.-n) \quad {}^{-2}_{+1}{}^{}_{+3}P_{0.2}(n.-n)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{1.2}(n+1.-n) \quad {}^{+1}_{-1}{}^{}_{-1}Q_{0.2}(n.-n)$$

$$F_{1.2}(n-1.-n) = {}^{+3}_{-2}{}^{}_{-2}P_{1.2}(n-1.-n) \quad {}^{-2}_{+3}{}^{}_{+1}P_{0.2}(n.-n)$$

$$ {}^{0}_{+1}{}^{}_{-1}Q_{1.2}(n-1.-n) \quad {}^{-1}_{+1}{}^{}_{+1}Q_{0.2}(n.-n)$$

$$F_{1.2}(n+1.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$F_{1.2}(n-1.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n-2) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n-2) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$F_{0.3}(n.-n+3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+3)$$

$$F_{0.3}(n.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+1)$$

$$F_{0.3}(n.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-1)$$

$$F_{0.3}(n.-n-3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-3)$$

$$F_{4.0}(n+4.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{4.0}(n+4.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{4.0}(n+4.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n)$$

$$F_{4.0}(n+2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{4.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-8\\+4\\+12\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+4\\0\\-8\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{4.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{3.0}(n+3.-n) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}+4\\-4\\-4\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-4\\0\\+8\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n)$$

$$F_{4.0}(n.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{4.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-8\\+12\\+4\end{matrix} P_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+24\\-24\\-24\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{3.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{2.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-8\\+4\\+12\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{4.0}(n.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{3.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{2.0}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-4\\+4\\+4\end{matrix} Q_{1.0}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}0\\+8\\-8\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n$$

$$\begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}+4\\-4\\-4\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)$$

$$F_{4.0}(n-2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{4.0}(n-2.-n)\ \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{3.0}(n-1.-n)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{2.0}(n.-n)\quad \begin{matrix}-8\\+12\\+4\end{matrix} P_{1.0}(n-1.-n)\ \begin{matrix}+4\\-8\\0\end{matrix} P_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{3.0}(n-3.-n)\ \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{4.0}(n-2.-n)\ \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{3.0}(n-1.-n)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{2.0}(n.-n)\quad \begin{matrix}-4\\+4\\+4\end{matrix} Q_{1.0}(n-1.-n)\ \begin{matrix}+4\\-8\\0\end{matrix} Q_{0.0}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{3.0}(n-3.-n)\ \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n)$$

$$F_{4.0}(n-4.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{4.0}(n-4.-n)\ \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{3.0}(n-3.-n)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{2.0}(n-2.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{4.0}(n-4.-n)\ \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{3.0}(n-3-n.)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{2.0}(n-2.-n)$$

$$F_{3.1}(n+3.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n+3.-n+1)\ \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.1}(n+2.-n+1)\ \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n+3.-n+1)\ \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n+2.-n+1)\ \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n+1)$$

$$F_{3.1}(n+1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n+2.-n+1)\ \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}-8\\+4\\+12\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.1}(n.-n+1)\quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n+2.-n+1)\ \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}+4\\-4\\-4\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n.-n+1)\quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$F_{3.1}(n-1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n-1.-n+1)\ \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n.-n+1)\quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}-8\\+12\\+4\end{matrix} P_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.1}(n-2.-n+1)\ \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n-1.-n+1)\ \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n.-n+1)\quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n+1)\ \begin{matrix}-4\\+4\\+4\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n-2.-n+1)\ \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$F_{3.1}(n-3.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n-3.-n+1)\ \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n-2.-n+1)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n-3.-n+1)\ \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n-2.-n+1)\ \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n+1)$$

$$F_{3.1}(n+3.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n+3.-n-1)\ \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.1}(n+2.-n-1)\ \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n+3.-n-1)\ \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n+2.-n-1)\ \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n-1)$$

$$F_{3.1}(n+1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n+2.-n-1) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-8\\+4\\+12\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+5\end{matrix} P_{2.1}(n.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n+2.-n-1) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}+4\\-4\\-4\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$F_{3.1}(n-1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-8\\+12\\+14\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{2.1}(n-2.-n-1) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.1}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-4\\+4\\+4\end{matrix} Q_{0.1}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{2.1}(n-2.-n-1) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$F_{3.1}(n-3.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{3.1}(n-3.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{2.1}(n-2.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{3.1}(n-3.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{2.1}(n-2.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{1.1}(n-1.-n-1)$$

$$F_{2.2}(n+2.-n+2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n+2.-n+2) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n+2) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n+2.-n+2) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n+2) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$F_{2.2}(n.-n+2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n.-n+2) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n+2) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n+2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n.-n+2) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n+2) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n+2)$$

$$F_{2.2}(n-2.-n+2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n-2.-n+2) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n+2) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.2}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n-2.-n+2) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n+2) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n+2)$$

$$F_{2.2}(n+2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n+2.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n)$$

$$F_{2.2}(n.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.2}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n)$$

$$F_{2.2}(n-2.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.2}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n-2.-n) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n)$$

$$F_{2.2}(n+2.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n+2.-n-2) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n+2.-n-2) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$F_{2.2}(n.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n.-n-2) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n.-n-2) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n+1.-n-2) \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n-2)$$

$$F_{2.2}(n-2.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.2}(n-2.-n-2) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.2}(n-1.-n-2) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.2}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.2}(n-2.-n-2) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.2}(n-1.-n-2) \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.2}(n.-n-2)$$

$$F_{1.3}(n+1.-n+3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n+1.-n+3) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n+1.-n+3) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+3)$$

$$F_{1.3}(n-1.-n+3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n-1.-n+3) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n-1.-n+3) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+3)$$

$$F_{1.3}(n+1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n+1.-n+1) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+1)$$

$$F_{1.3}(n-1.-n+1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n-1.-n+1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.3}(n.-n+1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n-1.-n+1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n+1)$$

$$F_{1.3}(n+1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n+1.-n-1) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-1)$$

$$F_{1.3}(n-1.-n-1) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-1)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n-1.-n-1) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-1)$$

$$F_{1.3}(n+1.-n-3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n+1.-n-3) \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n+1.-n-3) \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-3)$$

$$F_{1.3}(n-1.-n-3) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.3}(n-1.-n-3) \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.3}(n.-n-3)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.3}(n-1.-n-3) \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.3}(n.-n-3)$$

$$F_{0.4}(n.-n+4) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.4}(n.-n+4)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.4}(n.-n+4)$$

$$F_{0.4}(n.-n+2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.4}(n.-n+2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.4}(n.-n+2)$$

$$F_{0.4}(n.-n) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.4}(n.-n)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.4}(n.-n)$$

$$F_{0.4}(n.-n-2) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.4}(n.-n-2)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.4}(n.-n-2)$$

$$F_{0.4}(n.-n-4) = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.4}(n.-n-4)$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.4}(n.-n-4)$$

$$F_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}^{j^2}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta$$

$$F_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.-n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n-2.-n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$F_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} \quad \overset{-2}{\underset{+1}{+3}} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} \quad \overset{-1}{\underset{+1}{+1}} Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2\eta'$$

$$F_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$F_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$F_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$F_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$F_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$F_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$F_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$F_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{-2}} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$\overset{0}{\underset{-1}{+1}} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$j^2\eta^2$$

$$F_{2.0}(n+3.\_n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+3.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n+2.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+3.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{2.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n+2.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{2.0}(n-1.\_n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-1.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-1.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n.\_n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.\_n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{2.0}(n+1.\_n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+1.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+1.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{2.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n-2.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n-2.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{2.0}(n-3.\_n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-3.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n-2.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-3.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n-2.\_n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.\_n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{2.0}(n+3.\_n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+3.\_n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n+2.\_n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n+1.\_n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+3.\_n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.\_n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.\_n-1)_{+\delta}$$

$$F_{2.0}(n+1.-n-1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n+2.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-1.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\0\\-2\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n+1.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-1\\0\\+2\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$F_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+6\\-6\\-6\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}0\\+2\\-2\end{matrix} Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta}$$

$$F_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{2.0}(n-3.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{1.0}(n-2.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-2\\0\end{matrix} Q_{2.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$j^2 \, \imath_1 \imath_1'$$

$$F_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\-1\\-3\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+2.-n+2)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$F_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+2.-n)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$F_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n+2)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n+2)_{+\sigma}$$

$$F_{1.1}(n.-n)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\sigma}$$

$$F_{1.1}(n.-n)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$F_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n-2)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$F_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-2.-n)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\sigma}$$

$$F_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-2.-n-2)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n-2)_{-\sigma}$$

$$F_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+2.-n)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$F_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n+2.-n-2)_{+\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$F_{1.1}(n.-n)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n)_{+\delta}$$

$$F_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n-2)_{+\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n+1.-n-2)_{+\delta}$$

$$F_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n+2)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$F_{1.1}(n.-n)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n.-n)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+1\\+3\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n.-n)_{-\delta} \quad \begin{matrix}+1\\-1\\-1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$F_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-2.-n+2)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n+2)_{-\delta}$$

$$F_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-2\\+3\\+1\end{matrix} P_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{1.1}(n-2.-n)_{-\delta} \quad \begin{matrix}-1\\+1\\+1\end{matrix} Q_{0.1}(n-1.-n)_{-\delta}$$

$$j^2 \eta'^2$$

$$F_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n+3)_{+\sigma}$$

$$F_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$F_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\sigma}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\sigma}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n-3)_{-\sigma}$$

$$F_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n+1)_{+\delta}$$

$$F_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$F_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n+1.-n-3)_{+\delta}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n+3)_{-\delta}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

$$F_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta} = \begin{matrix}+3\\-2\\-2\end{matrix} P_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta} \quad \begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix} Q_{0.2}(n-1.-n-1)_{-\delta}$$

$$j^4$$

$$F_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n+2.-n+2)_{+2\sigma}$$

$$F_{0.0}(n+2.-n)_{+\sigma+\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n+2.-n)_{+\sigma+\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n+2.-n)_{+\sigma+\delta}$$

$$F_{0.0}(n+2.-n-2)_{+2\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n+2.-n-2)_{+2\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n+2.-n-2)_{+2\delta}$$

$$F_{0.0}(n.-n+2)_{+\sigma-\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n.-n+2)_{+\sigma-\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n.-n+2)_{+\sigma-\delta}$$

$$F_{0.0}(n.-n)_{+\sigma-\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n.-n)_{+\sigma-\sigma} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n.-n)_{+\sigma-\sigma}$$

$$F_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n.-n-2)_{-\sigma+\delta}$$

$$F_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n-2.-n+2)_{-2\delta}$$

$$F_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n-2.-n)_{-\sigma-\delta}$$

$$F_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma} = \overset{+3}{\underset{-2}{}}P_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma} \quad \overset{0}{\underset{-1}{+1}}Q_{0.0}(n-2.-n-2)_{-2\sigma}$$

Coëfficienten der Neigungsstörungen.

$$F_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = 0$$

$$F_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = 0$$

$$F_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} = +R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$

$$F_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} = -R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$

$$F_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} = +R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$F_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} = -R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$F_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} = 0$$

$$F_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} = 0$$

$$F_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} = 0$$

$$F_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} = 0$$

$$F_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} = +R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} - R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$F_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = -R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} + R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$F_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} = -R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} + R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$

$$F_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} = +R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} - R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$F_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = -R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} + R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$F_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} = -R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} + R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$F_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} = +R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$F_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} = -R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$F_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} = +R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$F_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} = -R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$

$$F_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} = +R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$F_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} = -R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$F_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} = +R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$
$$F_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} = -R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$

$$F_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} = 0$$
$$F_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} = 0$$
$$F_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} = 0$$

$$F_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} = 0$$
$$F_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} = 0$$
$$F_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} = 0$$

j^2

$$F_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'} = 0$$

$$F_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'} = 0$$
$$F_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'} = 0$$

$$G_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi}$$
$$G_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$G_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi}$$
$$G_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi}$$
$$G_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$G_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$G_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$G_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$G_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$G_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$

$$G_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$G_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} - R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$G_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} - R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$G_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$G_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} - R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$G_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} - R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$G_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$G_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$G_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$G_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$

$$G_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$G_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$G_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} + \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$
$$G_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} + \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$

$$G_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'}$$
$$G_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$G_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'}$$

$$G_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'}$$
$$G_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$G_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'}$$

j^2

$$G_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'}$$
$$G_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'}$$
$$G_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'}$$
$$G_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'}$$

$$G_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'}$$
$$G_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'}$$
$$G_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'}$$
$$G_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'} = -\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'}$$

$$H_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$H_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$H_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$

$$H_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$H_{0.1}(n.-n)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$H_{0.1}(n.-n)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$H_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$

$$H_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n+2.-n+1)_{+\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} + R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n.-n+1)_{+\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'} + R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$- \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n-2.-n+1)_{+\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$$

$$H_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n+2.-n-1)_{-\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} + R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$H_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n.-n-1)_{-\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'} + R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$- \tfrac{3}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$
$$H_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{2.0}(n-2.-n-1)_{-\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$$

$$H_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n+2)_{+\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$H_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n+2)_{+\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$$
$$H_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n)_{+\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$
$$H_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n)_{+\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$$

$$H_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n)_{-\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$H_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n)_{-\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$$
$$H_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n+1.-n-2)_{-\pi'} - \tfrac{3}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$
$$H_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{1.1}(n-1.-n-2)_{-\pi'} - \tfrac{1}{2}R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$$

$$H_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+3)_{+\pi'}$$
$$H_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+1)_{+\pi'}$$
$$H_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-1)_{+\pi'}$$

$$H_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n+1)_{-\pi'}$$
$$H_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-1)_{-\pi'}$$
$$H_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.2}(n.-n-3)_{-\pi'}$$

$$j^2$$

$$H_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n+2)_{+\sigma+\pi'}$$

$$H_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n)_{-\sigma+\pi'}$$

$$H_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n)_{+\delta+\pi'}$$

$$H_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n+2)_{-\delta+\pi'}$$

$$H_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n)_{+\sigma-\pi'}$$

$$H_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n-2)_{-\sigma-\pi'}$$

$$H_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n+1.-n-2)_{+\delta-\pi'}$$

$$H_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'} = +\tfrac{1}{2}R_{0.0}(n-1.-n)_{-\delta-\pi'}$$

7. Entwicklung der Störungsfunction und der Störungen nach Potenzen von w.

In dem ersten Abschnitte wurde die Grösse w durch die Formel (34)

$$\mu = \mu_0(1 - w) \ ,$$

eingeführt, wobei μ das Verhältniss der mittleren (osculirenden) Bewegungen für den gestörten und den störenden Planeten und μ_0 ein rationales Verhältniss ist, welches in der Nähe von μ liegt.

Diese Zahl μ_0 ist der Ausgangspunkt der Rechnung, indem wir uns nämlich die Aufgabe stellen, Störungsausdrücke abzuleiten, welche nach Potenzen der unbestimmt gelassenen Grösse w fortschreiten, und deren numerische Coëfficienten nur von der Grösse μ_0 abhängen. Die von w unabhängigen Glieder dieser Reihen entsprechen dann gewissermassen einem fingirten Planeten, dessen mittlere Bewegung in dem rationalen Verhältnisse μ_0 zum störenden Planeten stände, und die vollständigen nach w entwickelten Störungsausdrücke kommen einer Interpolationsformel gleich, welche es erlaubte, die Störungen für eine ganze Gruppe von Planeten mit verschiedenen mittleren Bewegungen anzuwenden. Wie weit sich die Grenzen von μ auf beiden Seiten von μ_0 erstrecken, innerhalb welchen diese Störungsausdrücke anwendbar bleiben, hängt natürlich von der grösseren oder kleineren Anzahl berücksichtigter Glieder ab. Für eine vorhandene Störungstafel lässt sich diese

Frage wohl am besten durch Vergleichung mit genaueren anderweitig berechneten Störungen beantworten. Hauptsächlich aus diesem Grund wurde die HANSEN'sche Form der Störungsstücke und Differentialgleichungen gewählt. Bis auf weiteres wurden nur Glieder zweiten Grades in den Excentriciteten und Neigungen, in den mit w multiplicirten Gliedern mit einigen Ausnahmen sogar nur diejenigen ersten Grades berücksichtigt. Die mit w^2 zu multiplicirenden Glieder sind vor der Hand nicht berücksichtigt worden. Sollte sich die so erlangte Genauigkeit als nicht hinreichend erweisen, so bieten die angeführten und noch anzuführenden Formeln die Möglichkeit, das Resultat durch Aussuchung und Hinzufügung einzelner merkbarer Glieder höherer Ordnung zu vervollständigen.

Der erste Schritt zur Aufstellung der Störungsausdrücke für eine gewisse Gruppe von Planeten, nachdem ein passendes rationales Verhältniss μ_0 gewählt worden ist, besteht nun darin, dass man der Formel

$$\alpha_0^3(1+m) = \mu_0^2$$

gemäss einen entsprechenden Wert α_0 des Verhältnisses der halben grossen Achsen ableitet[1]). Mit diesem Werte α_0 als Ausgangspunkt hat man dann die Grössen γ und die von den γ abhängigen Coëfficienten P, Q, R und F, G, H nach den angeführten Formeln zu berechnen. In dieser Weise erhalten wir eine Entwicklung z. B. von T, welche mit T_0 bezeichnet werden mag.

Die vollständige Entwicklung von T gründet sich aber auf den Wert

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{1+m}} .$$

Diese letzterwähnte Formel liefert durch Differentiation

$$\frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{\mu} . \tag{114}$$

Denkt man sich jetzt T in der folgenden Weise [vergl. (34)] entwickelt:

$$T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + \ldots , \tag{115}$$

[1]) Für $\mu_0 = \frac{1}{3}$ und mit der Jupitermasse $m = [6.979689]$ wird $\log \alpha_0 = 9.681781$.

so ergeben sich folglich die Werte der Coëfficienten dieser Reihe als

$$T_1 = -\frac{2}{3}\mu_0 \frac{\alpha}{\mu}\frac{dT}{d\alpha}$$

$$T_2 = \frac{2}{9}\mu_0^2 \frac{\alpha}{\mu}\left[-\frac{1}{2\mu}\frac{dT}{d\alpha} + \frac{\alpha}{\mu}\frac{d^2T}{d\alpha^2}\right] .$$

Wir haben in diesen Differentialcoëfficienten nach der Differentiation

$$\mu = \mu_0 \ , \quad \alpha = \alpha_0$$

zu setzen. Dann wird, indem wir noch den Index Null weglassen,

(116)
$$T_1 = -\frac{2}{3}\alpha\frac{dT}{d\alpha}$$

$$T_2 = \frac{2}{9}\alpha^2\frac{d^2T}{d\alpha^2} - \frac{1}{9}\alpha\frac{dT}{d\alpha} .$$

Die Grössen T_1 und T_2 hängen also in ähnlicher Weise — d. h. vermittelst der im Vorigen angegebenen Zahlencoëfficienten — von den Grössen

(117)
$$-\bar{\gamma} = -\frac{2}{3}\alpha\frac{d\gamma}{d\alpha}$$

$$\bar{\bar{\gamma}} = \frac{2}{9}\alpha^2\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2} - \frac{1}{9}\alpha\frac{d\gamma}{d\alpha}$$

ab, wie die Entwicklung von T_0 von den γ abhängt. Die Formeln zur Berechnung der $\bar{\gamma}$ und $\bar{\bar{\gamma}}$ stellen sich, wie man leicht sieht, folgendermassen:

(118)
$$\bar{\gamma}_0^{1.n} = \frac{1}{3}(\vartheta_0^{1.n} + \gamma_0^{1.n})\ ^1)$$

$$\bar{\gamma}_1^{1.n} = \frac{1}{3}(\vartheta_1^{1.n} + \gamma_1^{1.n})$$

$$\bar{\gamma}_2^{1.n} = \frac{1}{3}(\vartheta_2^{1.n} + \gamma_2^{1.n})$$

. . . . . .

$$\bar{\gamma}_i^{1.n} = \frac{1}{3}(\vartheta_i^{1.n} + \gamma_i^{1.n})$$

[1]) Für $n = 1$ hinzuzufügen $-\frac{2}{3}\alpha^2$.

$$\bar{\vartheta}_0^{1.n} = (2n+1)\bar{\gamma}_0^{1.n} + 4\bar{\gamma}_1^{1.n}$$

$$\bar{\vartheta}_1^{1.n} = (2n+5)\bar{\gamma}_1^{1.n} + 8\bar{\gamma}_2^{1.n}$$

$$\bar{\vartheta}_2^{1.n} = (2n+9)\bar{\gamma}_2^{1.n} + 12\bar{\gamma}_3^{1.n}$$

. . . . . .

$$\bar{\gamma}_0^{3.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_0^{3.n} + \beta^2\bar{\vartheta}_0^{1.n}\ ^{1})$$

$$\bar{\gamma}_1^{3.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_1^{3.n} + \beta^2[\bar{\vartheta}_1^{1.n} + \bar{\gamma}_0^{3.n}]$$

$$\bar{\gamma}_2^{3.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_2^{3.n} + \beta^2[\bar{\vartheta}_2^{1.n} + \bar{\gamma}_1^{3.n}]$$

. . . . . .

$$\bar{\gamma}_i^{3.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_i^{3.n} + \beta^2[\bar{\vartheta}_i^{1.n} + \bar{\gamma}_{i-1}^{3.n}]$$

$$\bar{\vartheta}_0^{3.n} = (2n+3)\bar{\gamma}_0^{3.n} + 4\bar{\gamma}_1^{3.n}$$

$$\bar{\vartheta}_1^{3.n} = (2n+7)\bar{\gamma}_1^{3.n} + 8\bar{\gamma}_2^{3.n}$$

. . . . . .

$$\bar{\vartheta}_i^{m.n} = (2n+4i+m)\bar{\gamma}_i^{m.n} + (4i+4)\bar{\gamma}_{i+1}^{m.n}$$

$$\bar{\gamma}_0^{5.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_0^{5.n} + \frac{1}{3}\beta^2\bar{\vartheta}_0^{3.n}$$

$$\bar{\gamma}_1^{5.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_1^{5.n} + \beta^2\left[\frac{1}{3}\bar{\vartheta}_1^{3.n} + \bar{\gamma}_0^{5.n}\right]$$

. . . . . .

$$\bar{\gamma}_i^{m+2.n} = \frac{4}{3}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\gamma_i^{m+2.n} + \beta^2\left[\frac{1}{m}\bar{\vartheta}_i^{m.n} + \bar{\gamma}_{i-1}^{m+2.n}\right]$$

---

[1]) Für $n = 0$ hinzuzufügen $-2\alpha^3$.

$$\bar{\bar{\gamma}}_0^{1.n} = \frac{1}{6}\left(\bar{\vartheta}_0^{1.n} - 2\bar{\gamma}_0^{1.n}\right)^{1)}$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_1^{1.n} = \frac{1}{6}\left(\bar{\vartheta}_1^{1.n} - 2\bar{\gamma}_1^{1.n}\right)$$

. . . . . .

$$\bar{\bar{\gamma}}_i^{1.n} = \frac{1}{6}\left(\bar{\vartheta}_i^{1.n} - 2\bar{\gamma}_i^{1.n}\right) .$$

Überall, wo in den vorigen Entwicklungen γ allein als Faktor vorkommt, hat man, um T_1 und T_2 zu erhalten, einfach zu setzen

(119) $$\text{statt } \gamma : -\bar{\gamma} \text{ resp. } \bar{\bar{\gamma}} .$$

Wo aber, wie in den mit j^2, j^4 oder ι multiplicirten Gliedern, die Entwicklung von T_0 den Faktor

$$\frac{1}{\alpha}\gamma$$

enthält, hat man dagegen für die Berechnung von T_1 und T_2 resp.

(120) $$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{\alpha}\left(\bar{\gamma} - \frac{2}{3}\gamma\right) \\ \frac{1}{\alpha}\left(\bar{\bar{\gamma}} - \frac{2}{3}\bar{\gamma} + \frac{5}{9}\gamma\right) \end{array}\right\} \text{ statt } \frac{1}{\alpha}\gamma$$

einzuführen. Dessgleichen ist bei der Controllberechnung

$$-\frac{1}{\alpha^2}\left(\bar{\gamma} - \frac{4}{3}\gamma\right) \quad \text{statt} \quad \frac{1}{\alpha^2}\gamma$$

zu benutzen. Die numerischen Werte der $\bar{\gamma}$ für $\mu = \frac{1}{3}$ sind in der Tafel XIX_a enthalten.

---

[1]) Für $n = 1$ hinzuzufügen $-\frac{1}{9}\alpha^2$.

8. Zerlegung des Argumentes θ. Integration der Differentialgleichung für W.

Die einzelnen Glieder der Reihen, welche sich als Ergebniss der Transformationen herausgestellt haben [vergl. (109) ff.], bestehen aus Producten aus einem numerischen Coëfficienten mit der Grösse

$$y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta^{n-s}\,.$$

Letztere ist nach (105) nichts anders als der Exponentialausdruck

$$e^{\sqrt{-1}[n+r-(n-s)\mu]\varepsilon}\;.\;e^{\sqrt{-1}(n-s)\theta}\,,$$

welcher im Exponenten die Argumente der Störungsglieder enthält.

In dem zweiten Faktor dieses Ausdruckes —

$$\vartheta^{n-s}=e^{\sqrt{-1}(n-s)\theta}$$

— hat man nach (31)

$$\theta=\mu(\varepsilon-e\,\operatorname{Sin}\varepsilon)-g'$$

oder nach (35)

$$\theta=\mu[wnz+(1-w)n\delta z]-n'\delta z'$$

einzuführen. Diese Function θ wird durch die Differentialgleichung (37) gefunden, welche wir mit Einführung des Argumentes

$$g=\varepsilon-e\operatorname{Sin}\varepsilon$$

auch folgendermassen gestalten können:

$$\frac{d\theta}{dg}=\mu[w+(1-w)\,\overline{W}]-\frac{dn'\delta z'}{dg}\,. \tag{121}$$

Die hier auf der rechten Seite vorkommende Function

$$w+(1-w)\,W$$

zerfällt, wie man sich leicht überzeugt und unten ausführlicher dargelegt wird, in zwei wesentlich verschiedene Teile, indem eine Gliedergruppe nur vom Argumente θ abhängt und die übrigen Glieder das

Argument ε explicite enthalten. Hierbei wird das ε vertretende Argument η als eine Constante aufgefasst. Indem wir jene beiden Teile mit $(1-w)W_1$ und $(1-w)V$ bezeichnen und also

$$w + (1-w)W = (1-w)(V + W_1)$$

setzen, zerlegen wir dementsprechend θ in die beiden Teile

$$\theta = \theta_1 + \mu(1-w)\zeta$$

in der Weise, dass θ_1 und ζ aus den Gleichungen

$$\frac{d\theta_1}{dg} = \mu(1-w)\overline{W}_1$$

(122)

$$\frac{d\zeta}{dg} = \overline{V} - \frac{1}{\mu(1-w)}\frac{dn'\delta z'}{dg}$$

zu bestimmen sind [vergl. (121)], wobei W_1 der von ε unabhängige Teil sein mag. Führt man wieder ε als unabhängige Veränderliche ein, so lauten die Gleichungen:

$$\frac{d\theta_1}{d\varepsilon} = \mu(1-w)\overline{W}_1(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$$

(123)

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = \overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) - \frac{1}{\mu(1-w)}\frac{dn'\delta z'}{d\varepsilon}\,.$$

Für $n\delta z$ hat man noch die Relation (36) oder

$$n\delta z = -\frac{w}{1-w}nz + \frac{\theta_1}{\mu(1-w)} + \frac{n'\delta z'}{\mu(1-w)} + \zeta\,. \tag{124}$$

Weil θ_1 die weitaus grössten Glieder von θ enthält, nämlich das Glied nullter Ordnung $-\frac{w}{1-w}nz$, sowie auch diejenigen von den eigentlichen Störungsgliedern, welche den kleinen Divisor im Quadrat erhalten, so kann man zweckmässig die Grösse ϑ^{n-s} nach Potenzen von ζ in der folgenden Weise entwickeln:

$$\vartheta^{n-s} = \vartheta_1^{n-s}(1 + \sqrt{-1}\,(n-s)\mu(1-w)\zeta + \ldots)\,, \tag{125}$$

wobei

$$\vartheta_1 = e^{\sqrt{-1}\,\theta_1}$$

gesetzt worden ist.

Mit Vernachlässigung derjenigen Glieder zweiter Ordnung, welche aus dem Producte der ursprünglichen Glieder mit ζ entstehen, kann man daher in den gefundenenen Entwicklungen

$$\vartheta = \vartheta_1$$

setzen. Die so vernachlässigten Glieder bleiben stets klein, weil sie den kleinen Divisor höchstens zum dritten Potenz enthalten. Dasselbe gilt von den bisher vernachlässigten Gliedern zweiter Ordnung, nämlich denjenigen, welche dem Abschnitte 1 gemäss aus dem Producte der störenden Kräfte mit $\overline{W}$ oder ν entstehen. In diesem Zusammenhange mag noch bemerkt werden, dass eine andere Caterogie von Gliedern zweiter Ordnung bei unseren Entwicklungen dadurch vernachlässigt werden, dass wir das Verhältniss der halben grossen Achsen als

$$\frac{a}{a'}$$

statt nach der Formel

$$a_1 = \frac{a(1+\nu)}{a'} \ .$$

[vergl. (17) u. (18)] bestimmt haben. Im Allgemeinen werden auch die Glieder zweiter Ordnung in θ_1 so klein, dass man sie nicht berücksichtigen braucht.

Die Differentialgleichung (26) —

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = T$$

— können wir, indem jetzt sowohl T als W als Functionen der Veränderlichen ε und θ_1 aufgefasst werden, in der folgenden Weise schreiben:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial W}{\partial \theta_1}\frac{d\theta_1}{d\varepsilon} = T \ . \tag{126}$$

Führen wir hier den Ausdruck (123) ein, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} + \mu(1-w)\overline{W}_1 \frac{\partial W}{\partial \theta_1}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) = T \ . \tag{127}$$

Durch Anwendung der früher erwähnten Bezeichnung

$$w + (1 - w) W = (1 - w)(V + W_1) ,$$

woraus

$$W = - \frac{w}{1 - w} + V + W_1 , \tag{128}$$

und wenn man berücksichtigt, dass W_1 eine von ε unabhängige Veränderliche ist, führt die Gleichung (127) zur folgenden Differentialgleichung für die Function V:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = T &- \mu(1 - w) \overline{W}_1 \frac{\partial V}{\partial \theta_1} (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \\ &- \mu(1 - w) \overline{W}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \theta_1} (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) . \end{aligned} \tag{129}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung besteht aus drei Teilen, welche wir mit I, II, III bezeichnen. Den Teil I haben wir schon behandelt und zwar ergeben die oben angeführten Entwicklungen

$$T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 + \ldots , \tag{130}$$

wobei T_0, T_1 u. s. w. ganz bestimmte Functionen der Argumente y, ϑ_1, und v sind. Um den Teil II zu berechnen ist jedoch die Kentniss der gesuchten Function V nöthig. Diese Schwierigkeit kann aber, wie unten gezeigt wird, dadurch vermieden werden, dass man für V eine ähnliche Entwicklung wie für T, nämlich

$$V = V_0 + V_1 w + V_2 w^2 + \ldots \tag{131}$$

aufstellt.

Die in II und III vorkommende Function W_1 hängt nur von dem Argumente θ_1 ab. Demnach können wir diese Function in der Form

$$W_1 = RT\left[f + \frac{1}{v} \eta g + v \eta h \right] \tag{132}$$

darstellen, wobei angenommen worden ist, dass f, g, h Functionen von θ_1 sind, welche auch v nicht enthalten, und in Reihen von der Form

$$f = \Sigma f_r \vartheta_1^r , \quad g = \Sigma g_r \vartheta_1^r , \quad h = \Sigma h_r \vartheta_1^r ; \quad \vartheta_1 = e^{\sqrt{-1}\theta_1}$$

entwickelt werden können. Wir führen ausserdem die Functionen

$$f' = \Sigma f_r \vartheta_1^{-r} \; , \quad g' = \Sigma g_r \vartheta_1^{-r} \; , \quad h' = \Sigma h_r \vartheta_1^{-r}$$

ein, welche so zu verstehen sind, dass sie aus den f, g, h erhalten werden, wenn man in den Argumenten insgesammt deren constanten Teile die Zeichen ändert. Bezeichnen wir überdiess

$$\frac{1}{2}(f+f') = x \; , \quad \frac{1}{2}(g+h') = u \; , \quad \frac{1}{2}(h+g') = v \; ,$$

so erhalten wir aus (132)

$$W_1 = RT\Big[x + \frac{1}{v}\eta u + v\,\eta v\Big] \tag{133}$$

und hieraus einerseits

$$\overline{W}_1 = RT\Big[x + \frac{1}{y}\eta u + y\,\eta v\Big]$$

und anderseits

$$\frac{\partial W_1}{\partial \theta_1} = -IT\Big[\vartheta_1 \frac{dx}{d\vartheta_1} + \frac{1}{v}\vartheta_1 \frac{d\eta u}{d\vartheta_1} + v\,\vartheta_1 \frac{d\eta v}{d\vartheta_1}\Big] \; ,$$

so dass

$$\begin{aligned} -\overline{W}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \theta_1} \; = \; & \Big[x + \frac{1}{y}\eta u + y\,\eta v\Big]\vartheta_1 \frac{dx}{d\vartheta_1} \\ & + \frac{1}{v}\Big[x + \frac{1}{y}\eta u + y\,\eta v\Big]\vartheta_1 \frac{d\eta u}{d\vartheta_1} \\ & + v\Big[x + \frac{1}{y}\eta u + y\,\eta v\Big]\vartheta_1 \frac{d\eta v}{d\vartheta_1} \; . \end{aligned}$$

Hieraus erhält man, da

$$1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon = 1 - \eta(y + y^{-1}) \; ,$$

für den Teil III die Darstellung

$$(134) \qquad -\mu(1-w)\,\overline{W}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \theta_1}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) =$$

$$\mu(1-w)\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left\{\left[\begin{array}{l} x - \eta^2(u+v) \\ +\eta(v-x)y \\ +\eta(u-x)y^{-1} \\ -\eta^2 v\,y^2 \\ -\eta^2 u\,y^{-2} \end{array}\right]\left(\vartheta_1\frac{dx}{d\vartheta_1} + \frac{1}{v}\vartheta_1\frac{d\eta u}{d\vartheta_1} + v\,\vartheta_1\frac{d\eta v}{d\vartheta_1}\right)\right\}.$$

Um den Theil II der Gleichung (129) zu ordnen, führen wir für die gesuchte Function V die Darstellung

$$(135) \qquad V = \mathrm{RT}\,\Sigma\left\{\begin{array}{r} \tilde{F}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\tilde{G}(n+r.-n+s) \\ +\frac{v}{y}\tilde{H}(n+r.-n+s) \end{array}\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

ein, woraus unmittelbar folgt:

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma(n-s)\left\{\begin{array}{r} \tilde{F}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\tilde{G}(n+r.-n+s) \\ +\frac{v}{y}\tilde{H}(n+r.-n+s) \end{array}\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}.$$

Dieser Ausdruck soll nun zunächst mit

$$1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon = 1 - \eta(y + y^{-1})$$

multiplicirt werden. Das Multiplicationsresultat ist der Form nach dem Ausdrücke selbst ähnlich. Es sei

$$(136) \qquad -\mu\frac{\partial V}{\partial \theta_1}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) =$$

$$\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma\left[f(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}g(n+r.-n+s) + \frac{v}{y}h(n+r.-n+s)\right] y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}.$$

Die Coëfficienten ergeben sich dann aus dem folgenden Formelsysteme, welches sowohl für die Beziehungen f, $\tilde{F}$ als auch für g, $\tilde{G}$ und h, $\tilde{H}$ gilt.

$$f_{0.0}(n\,.\,-n) \qquad = n\mu\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{1.0}(n+1.-n) \quad = n\mu\tilde{F}_{1.0}(n+1.-n)-n\mu\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{1.0}(n-1.-n) \quad = n\mu\tilde{F}_{1.0}(n-1\,.-n)-n\mu\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{0.1}(n.-n+1) \quad = (n-1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$f_{0.1}(n.-n-1) \quad = (n+1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$f_{2.0}(n+2.-n) \quad = n\mu\tilde{F}_{2.0}(n+2\,.-n)-n\mu\tilde{F}_{1.0}(n+1.-n)$$

$$f_{2.0}(n.-n) \qquad = n\mu\tilde{F}_{2.0}(n.-n) \quad -n\mu\tilde{F}_{1.0}(n+1.-n)$$

$$-n\mu\tilde{F}_{1.0}(n-1.-n)$$

$$f_{2.0}(n-2.-n) \quad = n\mu\tilde{F}_{2.0}(n-2.-n)-n\mu\tilde{F}_{1.0}(n-1.-n)$$

$$f_{1.1}(n+1.-n+1)=(n-1)\mu\tilde{F}_{1.1}(n+1.-n+1)-(n-1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$f_{1.1}(n-1.-n+1)=(n-1)\mu\tilde{F}_{1.1}(n-1.-n+1)-(n-1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$f_{1.1}(n+1.-n-1)=(n+1)\mu\tilde{F}_{1.1}(n+1.-n-1)-(n+1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n.-n-1)$$

$$f_{1.1}(n-1.-n-1)=(n+1)\mu\tilde{F}_{1.1}(n-1.-n-1)-(n+1)\mu\tilde{F}_{0.1}(n\,.-n-1)$$

$$f_{0.2}(n.-n+2) \quad = (n-2)\mu\tilde{F}_{0.2}(n.-n+2)$$

$$f_{0.2}(n.-n) \qquad = \quad n\mu\tilde{F}_{0.2}(n.-n)$$

$$f_{0.2}(n.-n-2) \quad = (n+2)\mu\tilde{F}_{0.2}(n.-n-2)$$

. . . . . .

$$f_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma} = (n-1)\mu\tilde{F}_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$$

$$f_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma} = (n+1)\mu\tilde{F}_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$$

$$f_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta} = (n+1)\mu\tilde{F}_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$$

$$f_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta} = (n-1)\mu\tilde{F}_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$$

. . . . . .

$$f_{p.q}(n+r.-n+s)=(n-s)\mu\left\{\begin{array}{r}\tilde{F}_{p.q}(n+r.-n+s)-\tilde{F}_{p-1.q}(n+r-1.-n+s)\\ -\tilde{F}_{p-1.q}(n+r+1.-n+s)\end{array}\right\}$$

Es hat keinen Zweck diese Formeln für alle Glieder bis zur vierter Ordnung auszuschreiben, weil sie alle, wenn mit oder ohne die Affixen $\pm\delta$, $\pm\sigma$ aus der zuletzt angeführten allgemeinen Formel entnommen werden können.

Multiplicirt man jetzt den Ausdruck (136) mit $\overline{W}_1$, so wird zunächst

$$(137) \qquad -\mu\,\overline{W}_1\frac{\partial V}{\partial\theta_1}(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)=$$

$$=\frac{\Pi}{\sqrt{-1}}\left\{\left[x+\frac{1}{y}\eta u+y\,\eta v\right]\Sigma\left[f+\frac{y}{v}g+\frac{v}{y}h\right]y^{n+r-(n-s)\mu}\vartheta_1{}^{n-s}\right\},$$

wo unter dem Summenzeichen der Kürze wegen f, g, h statt $f(n+r.-n+s)$ u. s. w. geschrieben worden ist. Dieser Ausdruck zerfällt in die drei Teile

$$(138) \qquad -\mu\,\overline{W}_1\frac{\partial V}{\partial\theta_1}(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)=$$

$$x\Sigma\left[f(n+r.-n+s)_x+\frac{y}{v}g(n+r.-n+s)_x+\frac{v}{y}h(n+r.-n+s)_x\right]y^{n+r-(n-s)\mu}\vartheta_1{}^{n-s}$$

$$+u\Sigma\left[f(n+r.-n+s)_u+\frac{y}{v}g(n+r.-n+s)_u+\frac{v}{y}h(n+r.-n+s)_u\right]y^{n+r-(n-s)\mu}\vartheta_1{}^{n-s}$$

$$+v\Sigma\left[f(n+r.-n+s)_v+\frac{y}{v}g(n+r.-n+s)_v+\frac{v}{y}h(n+r.-n+s)_v\right]y^{n+r-(n-s)\mu}\vartheta_1{}^{n-s},$$

wobei

$$f_{p.q}(n+r.-n+s)_x=f_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$g_{p.q}(n+r.-n+s)_x=g_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$h_{p.q}(n+r.-n+s)_x=h_{p.q}(n+r.-n+s),$$

für die zu den u und v gehörigen Coëfficienten aber

$$f_{p+1.q}(n+r-1.-n+s)_u=f_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$g_{p+1.q}(n+r-1.-n+s)_u=g_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$h_{p+1.q}(n+r-1.-n+s)_u=h_{p.q}(n+r.-n+s)$$

$$f_{p+1.q}(n+r+1.-n+s)_v=f_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$g_{p+1.q}(n+r+1.-n+s)_v=g_{p.q}(n+r.-n+s)$$
$$h_{p+1.q}(n+r+1.-n+s)_v=h_{p.q}(n+r.-n+s),$$

so dass z. B.

$$f_{1.0}(n-1.-n)_u = f_{0.0}(n.-n) \qquad f_{1.0}(n+1.-n)_v = f_{0.0}(n.-n)$$
$$f_{2.0}(n-2.-n)_u = f_{1.0}(n-1.-n) \qquad f_{2.0}(n+2.-n)_v = f_{1.0}(n+1.-n)$$
$$f_{2.0}(n.-n)_u = f_{1.0}(n+1.-n) \qquad f_{2.0}(n.-n)_v = f_{1.0}(n-1.-n)$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Hiermit ist der Teil II entwickelt worden. Es ist aber wichtig zu bemerken, dass, so oft Störungen zweiter Ordnung vernachlässigt werden, die beiden letzten Zeilen von (138) auszulassen sowie in der ersten x mit w zu vertauschen ist. Dann kann man den Teil II, welchen wir der Kürze wegen mit t bezeichnen werden, einfach in der folgenden Form darstellen:

$$(139) \qquad t = -\mu \overline{W}_1 \frac{\partial V}{\partial \theta_1}(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) =$$

$$w \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma \Big[f(n+r.-n+s) + \frac{y}{v} g(n+r.-n+s) + \frac{v}{y} h(n+r.+n+s) \Big] y^{n+r.-(n-s)\mu} \vartheta_1^{n-s}.$$

Die Differentialgleichung (129), worum es sich handelt, nimmt dann die Form

$$\frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = T + (1-w)t - \mu(1-w)\overline{W}_1 \frac{\partial W_1}{\partial \theta_1}(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \ .$$

In Analogie mit den Relationen (130) und (131) können wir nun die Entwicklung

$$(140) \qquad t = t_0 w + t_1 w^2 + \cdots$$

feststellen und dann die Gleichung den verschiedenen Potenzen von w entsprechend in das System

Faktor:

$$(141) \qquad \begin{array}{lll} 1 & \dfrac{\partial V_0}{\partial \varepsilon} = T_0 & \\ w & \dfrac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} = T_1 + t_0 & -\mu(1-w)\overline{W}_1 \dfrac{\partial W_1}{\partial \theta_1}(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \\ w^2 & \dfrac{\partial V_2}{\partial \varepsilon} = T_2 + t_1 - t_0 & \end{array}$$

auflösen. Das Glied hinter dem vertikalen Striche, welches wir zunächst bei Seite lassen werden, gehört gewissermassen allen drei der Gleichungen (141) und soll dazu benutzt werden, die von ε unabhängigen Teile derselben aufzunehmen, liefert aber auch andere Glieder, die später berücksichtigt werden.

Die Integrale zu diesen Gleichungen schreiben wir in der Form

$$V_0 = \mathrm{RT}\,\Sigma \left\{ \begin{array}{r} \tilde{F}_{0.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\tilde{G}_{0.p.q}(n+r.-n+s) \\ + \frac{v}{y}\tilde{H}_{0.p.q}(n+r.-n+s) \end{array} \right| y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s}$$

$$(142)\quad V_1 = \mathrm{RT}\,\Sigma \left\{ \begin{array}{r} \tilde{F}_{1.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\tilde{G}_{1.p.q}(n+r.-n+s) \\ + \frac{v}{y}\tilde{H}_{1.p.q}(n+r.-n+s) \end{array} \right| y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s}$$

$$V_2 = \mathrm{RT}\,\Sigma \left\{ \begin{array}{r} \tilde{F}_{2.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\tilde{G}_{2.p.q}(n+r.-n+s) \\ \frac{v}{y}\tilde{H}_{2.p.q}(n+r.-n+s) \end{array} \right| y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s}\ ,$$

indem wir die Coëfficienten, welche den verschiedenen Potenzen von w entsprechen, durch die Indices 0, 1, 2 unterscheiden. Dieselbe Bezeichnungsweise führen wir für die Coëfficienten der Entwicklungen

$$T = T_0 + T_1 w + T_2 w^2 \ldots$$

$$t = t_0 w + t_1 w^2 + \ldots$$

ein und werden wir auch bei ferneren Entwicklungen derselben Art brauchen, um die zugehörigen Potenzen von w zu kennzeichnen. In dieser Weise bezeichnen wir die Coëfficienten

in T_0 mit $F_{0.p.q}(n+r.-n+s)$
„ T_1 „ $F_{1.p.q}(n+r.-n+s)$
„ T_2 „ $F_{2.p.q}(n+r.-n+s)$

„ t_0 „ $f_{0.p.q}(n+r.-n+s)$
„ t_1 „ $f_{1.p.q}(n+r.-n+s)$
„ t_2 „ $f_{2.p.q}(n+r.-n+s)$.

Was die letzteren betrifft, so finden sich die

$$f_{0.p.q}(n+r.-n+s) \text{ aus den } \tilde{F}_{0.p.q}(n+r.-n+s)$$

$$f_{1.p.q}(n+r.-n+s) \quad ,, \quad ,, \quad \tilde{F}_{1.p.q}(n+r.-n+s)$$

$$f_{2.p.q}(n+r.-n+s) \quad ,, \quad ,, \quad \tilde{F}_{2.p.q}(n+r.-n+s)$$

mittels des Seite 114 angeführten Formelsystemes. Die Coëfficienten der integrirten Functionen (142) ergeben sich jetzt in folgender Weise:

$$\tilde{F}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{F_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

$$\tilde{G}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{G_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r+1-(n-s)\mu} \tag{143}$$

$$\tilde{H}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{H_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-1-(n-s)\mu}$$

ferner

$$\tilde{F}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{F_{1.p.q}(n+r.-n+s) + f_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

$$\tilde{G}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{G_{1.p.q}(n+r.-n+s) + g_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r+1-(n-s)\mu} \tag{144}$$

$$\tilde{H}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{H_{1.p.q}(n+r.-n+s) + h_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-1-(n-s)\mu}$$

und ähnliche der dritten Gleichung (141) entsprechende Formeln [vergl. Tafeln XXVII, XXVIII, XXIX].

Indem es angenommen wird, dass μ ein rationales Verhältniss zweier ganzen Zahlen ist, werden sämmtliche Divisoren rationale Brüche oder Null [vergl. Tafel XXXVIII]. Diejenigen Glieder, die den Divisor Null bekommen würden, und welche man am besten bei der numerischen Rechnung herausgreift, mögen sein:

$$F = F_0 + w F_1 + w^2 F_2$$

(145) $$G = G_0 + w G_1 + w^2 G_2$$

$$H = H_0 + w H_1 + w^2 H_2$$

so dass von den Functionen T, t auf der rechten Seite von (141) im Ganzen ein von ε unabhängiger Teil

(146) $$\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ F + \frac{1}{v} G + v H \right\}$$

übrig bleibt, welcher mittels des letzten Gliedes der Gleichungen (141) gehoben werden soll.

Bezeichnen wir, den Relationen auf Seite (112) analog, mit F', G', H' diejenigen Functionen, in welche F, G, H übergehen, wenn die Zeichen der Argumente der verschiedenen Glieder jener Functionen umgekehrt werden, so kann man den Ausdruck (146) auch in der Form

(147) $$-\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ F' + \frac{1}{v} H' + v G' \right\}$$

ansetzen. Im Mittel aus (146) und (147) erhalten wir also, wenn vorübergehend die Bezeichnungen

$$X_0 = \frac{F - F'}{2\sqrt{-1}}$$

$$U_0 = \frac{G - H'}{2\sqrt{-1}}$$

$$V_0 = \frac{H - G'}{2\sqrt{-1}}$$

eingeführt werden, statt (146) den Ausdruck

(148) $$\mathrm{RT} \left\{ X_0 + \frac{1}{v} U_0 + v V_0 \right\} .$$

Durch die Substitutionen

(149) $$U_0 = \frac{1}{2}(Y_0 + \sqrt{-1}\, Z_0)$$

$$V_0 = \frac{1}{2}(Y_0 - \sqrt{-1}\, Z_0)$$

und mit Anwendung der Beziehungen

$$v = \operatorname{Cos}\eta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\eta \ ; \quad \frac{1}{v} = \operatorname{Cos}\eta - \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\eta$$

geht der Ausdruck (148) in

$$X_0 + Y_0 \operatorname{Cos}\eta + Z_0 \operatorname{Sin}\eta \tag{150}$$

über.

Die von ε unabhängigen Glieder des letzten Teiles der Gleichungen (141) sind nach der Formel (134), welche den vollständigen Ausdruck für diesen Teil enthält, die folgenden:

$$\begin{aligned} &\mu(1-w)\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Big\{[x-\eta^2(u+v)]\vartheta_1\frac{dx}{d\vartheta_1} \\ &+\frac{1}{v}[x-\eta^2(u+v)]\vartheta_1\frac{d\eta u}{d\vartheta_1} \\ &+v[x-\eta^2(u+v)]\vartheta_1\frac{d\eta v}{d\vartheta_1}\Big\} . \end{aligned} \tag{151}$$

Bezeichnet man den Beziehungen (149) analog

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(y+\sqrt{-1}z) \\ v &= \frac{1}{2}(y-\sqrt{-1}z) \ , \end{aligned} \tag{152}$$

so verwandelt sich der Ausdrück (151), indem noch θ_1 statt ϑ_1 als Veränderliche eingeführt wird, in

$$-\mu(1-w)w_1\Big[\frac{dx}{d\theta_1}+\frac{d\eta y}{d\theta_1}\operatorname{Cos}\eta+\frac{d\eta z}{d\theta_1}\operatorname{Sin}\eta\Big] , \tag{153}$$

wobei die Grösse w_1 als

$$w_1 = x-\eta^2(u+v) = x-\eta^2 y \tag{154}$$

definirt ist.

Fassen wir nun alle Ausdrücke zusammen, welche aus (146) und (151) herfliessen, und setzen ihre Summe gleich einer Constante

$$l + m \operatorname{Cos} \eta + n \operatorname{Sin} \eta \quad , \tag{155}$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\mu(1-w)\, w_1 \left[\frac{dx}{d\theta_1} + \frac{d\eta y}{d\theta_1} \operatorname{Cos} \eta + \frac{d\eta z}{d\theta_1} \operatorname{Sin} \eta\right]$$
$$= X_0 + Y_0 \operatorname{Cos} \eta + Z_0 \operatorname{Sin} \eta - l - m \operatorname{Cos} \eta - n \operatorname{Sin} \eta \quad ,$$

welche sich unmittelbar in das System

$$w_1 \frac{dx}{d\theta_1} = \frac{X}{\mu(1-w)}$$
$$w_1 \frac{d\eta y}{d\theta_1} = \frac{Y}{\mu(1-w)} \tag{156}$$
$$w_1 \frac{d\eta z}{d\theta_1} = \frac{Z}{\mu(1-w)}$$

auflöst. Die X, Y, Z sind dabei aus dem Formelsysteme

$$X = X_0 - l$$
$$Y = Y_0 - m \tag{157}$$
$$Z = Z_0 - n$$

zu bestimmen. Die Grössen l, m, n definiren wir durch die Bedingung, dass keine constanten, d. h. von θ_1 unabhängigen Glieder in den X, Y, Z vorkommen dürfen. Der Ausdruck (155) kann mit der ersten der Gleichungen (141) einverleibt werden. In Folge der festgestellten Beziehungen bestehen, wie man leicht sieht, die Relationen

$$X_0 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} F \qquad x = \mathrm{RT}\, f$$
$$Y_0 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} (H - G') \qquad y = u + v = \mathrm{RT}\,(g + h') \tag{158}$$
$$Z_0 = \mathrm{RT}\,(H - G') \qquad z = \frac{u - v}{\sqrt{-1}} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} (g + h') \quad .$$

Bei den folgenden Entwicklungen werden wir besonders den Fall $\mu = \frac{1}{3}$, ins Auge fassen, was indessen nicht hindert, dass die Untersuchung trotzdem ganz allgemeine Gültigkeit besitzt. Wir bekommen in der That jeden anderen Fall z. B. $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{2}{5}$ u. s. w. durch blosse Veränderung des im Folgenden öfters auftretenden Argumentes $3\theta_1$, welches den Fall $\mu = \frac{1}{3}$ carachtärisirt, in $2\theta_1$, $\frac{5}{2}\theta_1$ u. s. w.

Um das System (156) zu integriren, multiplicire wir die zweite der Gleichungen mit $-\eta$ und addiren zu der ersten. Hieraus entsteht mit Anwendung der Relation (154) die Differentialgleichung

$$\mu w_1 \frac{dw_1}{d\theta_1} = \frac{X - \eta Y}{1 - w} ,$$

welche durch Zusammenziehung der Glieder auf der rechten Seite auf die Form

$$w_1 \frac{dw_1}{d3\theta_1} = \frac{f}{1 - w} \operatorname{Sin}(3\theta_1 + F) \tag{159}$$

zurückgeführt wird. Werden höhere Glieder als zweiten Grades mit aufgenommen, so erhält man auf der rechten Seite noch ein Glied mit dem doppelten Argumente, welches durch eine leichte Correction an die anzuführenden Formeln berücksichtigt werden kann. Wir setzen jetzt

$$3\theta_1 + F = 2\psi + 180^0 , \tag{160}$$

wodurch (159) in die Relation

$$dw_1^2 = -\frac{4f}{1 - w} d \operatorname{Sin}^2 \psi$$

übergeht. Durch Integration dieser Gleichung erhält man

$$w_1^2 = w_0^2 - \frac{4f}{1 - w} \operatorname{Sin}^2 \psi$$

oder

$$w_1 = w_0 \sqrt{1 - k^2 \operatorname{Sin}^2 \psi} , \tag{161}$$

wobei

$$k^2 = \frac{4f}{w_0^2} \cdot \frac{1}{1-w} \,. \tag{162}$$

Setzen wir ferner

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{Sin}\psi}} = \frac{2K}{\pi} d\varphi \,,$$

wovon

$$\psi = \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \varphi \,,$$

$$3\theta_1 = 2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} \varphi + 180^0 - F \,, \tag{163}$$

so wird

$$w_1 = w_0 \operatorname{dn} \frac{2K}{\pi} \varphi$$

$$= w_0 \frac{\pi}{2K} [1 + 4q \operatorname{Cos} 2\varphi + 4q^2 \operatorname{Cos} 4\varphi + \ldots] \tag{164}$$

und die beiden letzten Gleichungen (156) nehmen die Form

$$\frac{d\eta y}{d\varphi} = \frac{2K}{\pi} \frac{2Y}{(1-w)w_0}$$

$$\frac{d\eta z}{d\varphi} = \frac{2K}{\pi} \frac{2Z}{(1-w)w_0} \,.$$

Führen wir hier die Grössen

$$u = \frac{1}{2}(y + \sqrt{-1}z) \,, \quad v = \frac{1}{2}(y - \sqrt{-1}z)$$

sowie G und H[1]) gemäss (158) ein, indem noch mit H' und G' diejenigen Functionen bezeichnet werden, welche aus H und G hervorgehen, wenn die Zeichen der Argumente umgekehrt werden, so ergeben sich die Gleichungen

[1]) Von diesen Grössen sind, weil sie den Y und Z entsprechen, die constanten Teile abzuziehen.

$$\frac{d\eta u}{d\varphi} = \sqrt{-1}\,\frac{2K}{\pi}\,\frac{H'-G}{(1-w)w_0}$$

(165)

$$\frac{d\eta v}{d\varphi} = -\sqrt{-1}\,\frac{2K}{\pi}\,\frac{H-G'}{(1-w)w_0}$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass je eine der Grössen ηu und ηv aus der anderen erhalten wird, wenn die Zeichen der Argumente vertauscht werden. Wir brauchen desshalb nur die letztere der beiden Gleichungen zu betrachten. Setzt man

$$e^{\sqrt{-1}\,\varphi} = \omega \,, \tag{166}$$

so kann man derselben die Form

$$\frac{d\eta v}{d\omega} = -\frac{2K}{\pi}\,\frac{H-G'}{(1-w)w_0}\,\omega^{-1} \tag{167}$$

geben.

Die Grösse $H-G'$ ergiebt sich, wie schon bemerkt worden ist, als eine Function von θ_1. Um dieselbe auf das Argument ω zu transformiren, benutzen wir die Formeln

$$\operatorname{Cos}(3\theta_1 + F) = -\operatorname{Cos}\left[2\,\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\varphi\right]$$

$$= \frac{2}{k^2}\left(1-\frac{E}{K}\right) - 1 - \frac{2}{k^2}\,\frac{\pi^2}{K^2}\left[\frac{2q}{1-q^2}\operatorname{Cos}2\varphi + \frac{4q^2}{1-q^4}\operatorname{Cos}4\varphi + \cdots\right]$$

$$\operatorname{Sin}(3\theta_1 + F) = -\operatorname{Sin}\left[2\,\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\varphi\right]$$

$$= -\frac{2}{k^2}\,\frac{\pi^2}{K^2}\left[\frac{2q}{1+q^2}\operatorname{Sin}2\varphi + \frac{4q^2}{1+q^4}\operatorname{Sin}4\varphi + \cdots\right],$$

woraus

$$\vartheta_1^3 = e^{-\sqrt{-1}\,F}\left\{\frac{2}{k^2}\left(1-\frac{E}{K}\right) - 1 - \frac{2}{k^2}\,\frac{\pi^2}{K^2}\left[\frac{2q}{1-q^4}\omega^2 + \frac{4q^2}{1-q^8}\omega^4 + \cdots\right]\right.$$

(168)

$$\left. - \frac{2}{k^2}\,\frac{\pi^2}{K^2}\left[\frac{2q^3}{1-q^4}\omega^{-2} + \frac{4q^6}{1-q^8}\omega^{-4} + \cdots\right]\right\}.$$

Begnügt man sich mit Gliedern erster Ordnung von der Masse, so hat man einfach

$$\vartheta_1^3 = -e^{-\sqrt{-1}F}\,\omega^2 \,. \tag{169}$$

Die Gleichung (167) lautet dann [1])

$$\frac{d\eta v}{d\vartheta_1} = -\frac{3}{2}\,\frac{H-G'}{w}\,\vartheta_1^{-1} \tag{170}$$

und lässt sich unmittelbar integriren, so bald $H - G'$ als Function von ϑ_1 gegeben ist.

Sobald diese Integration ausgeführt worden ist, erhält man

$$\eta u = \eta v'$$

und dann x aus der Formel

$$x = w_1 - \eta^2(u+v) \,.$$

Damit ist die Function W_1 [vergl. (132) und (133)] bestimmt.

Wir kehren jetzt zu der Gleichung (141) oder (129) zurück. Der Teil III dieser Gleichung enthält nach (134) die noch nicht berücksichtigten Glieder

$$\Delta T = \mu(1-w)\,\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\begin{vmatrix} +\eta(v-x)y \\ +\eta(u-x)y^{-1} \\ -\eta^2 v\,y^2 \\ -\eta^2 u\,y^{-2} \end{vmatrix}\left(\vartheta_1\frac{dx}{d\vartheta_1} + \frac{1}{v}\,\vartheta_1\frac{d\eta u}{d\vartheta_1} + v\vartheta_1\frac{d\eta v}{d\vartheta_1}\right) . \tag{171}$$

Der vorletzte Faktor ist, wie man sich leicht überzeugt, eine reele Grösse und

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[\vartheta_1\frac{dx}{d\vartheta_1} + \frac{1}{v}\,\vartheta_1\frac{d\eta u}{d\vartheta_1} + v\vartheta_1\frac{d\eta v}{d\vartheta_1}\right] \\ &= -\frac{dx}{d\theta_1} - \frac{d\eta y}{d\theta_1}\,\mathrm{Cos}\,\eta - \frac{d\eta z}{d\theta_1}\,\mathrm{Sin}\,\eta \\ &= -\frac{1}{\mu(1-w)}\,\frac{1}{w_1}\left[X + Y\,\mathrm{Cos}\,\eta + Z\,\mathrm{Sin}\,\eta\right] \\ &= -\frac{1}{\mu(1-w)}\,\frac{1}{w_1}\cdot\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[F + \frac{1}{v}\,G + vH\right] . \end{aligned}$$

[1]) Vergl. die Bestimmung der Integrationsconstante w_0 (224).

In den F, G, H hat man sich hier die constanten Teile abgezogen zu denken. Der in Frage stehende Teil unserer Gleichung reducirt sich also zu

$$(172) \qquad \Delta T = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \begin{bmatrix} +\eta(v-x)y \\ +\eta(u-x)y^{-1} \\ -\eta^2 v\, y^2 \\ -\eta^2 u\, y^{-2} \end{bmatrix} \frac{F+\frac{1}{v}G+vH}{w_1},$$

welcher Ausdruck, nachdem man x mittels der Relation

$$x = w_1 + \eta^2(u+v)$$

eliminirt hat, sich folgendermassen auflösen lässt

$$\Delta T = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \begin{Bmatrix} -\eta(y+y^{-1}) + \frac{\eta v}{w_1}(y-\eta y^2+\eta^2 y) \\ +\frac{\eta u}{w_1}(y^{-1}-\eta y^{-2}+\eta^2 y^{-1}) \end{Bmatrix} \left(F+\frac{1}{v}G+vH\right).$$

Behalten wir hier von den Gliedern zweiter Ordnung nur

$$\frac{\eta v\, y + \eta u\, y^{-1}}{w_1},$$

so bekommen wir, indem wir noch w_1 mit w ersetzen,

$$(173) \qquad \Delta T = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{\eta(y+y^{-1}) - \frac{\eta v\, y + \eta u\, y^{-1}}{w}\right\} \left(F+\frac{1}{v}G+vH\right).$$

Bei besonders kleinen Werten von w, können allerdings die mit ηv und ηu multiplicirten Glieder merkliches geben und zwar kommen aus diesen Gliedern Correctionen an die mit ε multiplicirten Gliedern, welche bei mässigen Werten der eingehenden Constanten die Zehntelsecunden beeinflussen können. Weil aber diese Glieder zweiter Ordnung den kleinen Divisor nur zum dritten Potenz enthalten und wir solche Glieder durchweg vernachlässigt haben, wollen wir sie auch hier nicht berücksichtigen und setzen einfach

$$(174) \qquad \Delta T = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[F+\frac{1}{v}G+vH\right] . \eta(y+y^{-1}).$$

Statt diese Grösse, wie die Grösse T, nach Potenzen von w zu entwickeln, empfiehlt es sich, den ganzen Ausdruck als Correction

$$\Delta T_0$$

mit der ersten der Gleichungen (141) zu vereinigen. Indem wir die hieraus entstehende Correction an V mit

$$\Delta V = \Delta V_0 + w \Delta V_1 + \ldots$$

bezeichnen, erhalten wir zunächst aus der ersten Gleichung

$$\Delta V_0 = -\mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{v} G + v H\right] . \eta (y - y^{-1}) \ .$$

Hieraus bekommen wir

$$\frac{\partial \Delta V_0}{\partial \theta_1} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[\vartheta_1 \frac{dF}{d\vartheta_1} + \frac{1}{v} \ \vartheta_1 \frac{dG}{d\vartheta_1} + v \ \vartheta_1 \frac{dH}{d\vartheta_1}\right] . \eta (y - y^{-1}) \ .$$

Eine Vereinfachung dieses Ausdruckes bietet sich, wenn nur das Argument θ_1 selbst und nicht die Vielfachen desselben in den Ausdrücken F, G, H berücksichtigt werden, dadurch, dass dann

$$\mu \vartheta_1 \frac{dF}{d\vartheta_1} = F$$

(175)
$$\mu \vartheta_1 \frac{dG}{d\vartheta_1} = G$$

$$\mu \vartheta_1 \frac{dH}{d\vartheta_1} = H \ ,$$

so dass

$$\frac{\partial \Delta V_0}{\partial \theta_1} = \frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left(F + \frac{1}{v} G + v H\right) . \eta (y - y^{-1})$$

herauskommt.

In der zweiten der Gleichungen (141) bekommt man dann gemäss (129) das Correctionsglied

$$\Delta T_1 = -\mu \frac{\partial \Delta V_0}{\partial \theta_1} (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon)$$

$$= -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[F + \frac{1}{v} G + v H\right] [\eta (y - y^{-1}) - \eta^2 (y^2 - y^{-2})]$$

und durch Integration in Bezug auf ε

$$\Delta V_1 = \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{v}G + vH\right]\left[\eta(y + y^{-1}) - \frac{1}{2}\eta^2(y^2 + y^{-2})\right].$$

Durch Differentiation dieses neuen Ausdruckes in Bezug auf θ_1 bekommt man eine Correction ΔT_2 zu der dritten Gleichung, welche zu dem Werte von ΔV_2 führt u. s. w.

Der Gesammtausdruck für V stellt sich, indem man alle die gefundenen Integrationsergebnisse vereinigt, folgendermassen:

$$\begin{aligned} V = {} & l\varepsilon + m\varepsilon \operatorname{Cos}\eta + n\varepsilon \operatorname{Sin}\eta \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\left[\tilde{F}_{0.p.q} + \frac{y}{v}\tilde{G}_{0.p.q} + \frac{v}{y}\tilde{H}_{0.p.q}\right] y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s} \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\left[\tilde{F}_{1.p.q} + \frac{y}{v}\tilde{G}_{1.p.q} + \frac{v}{y}\tilde{H}_{1.p.q}\right] y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\left[\tilde{F}_{2.p.q} + \frac{y}{v}\tilde{G}_{2.p.q} + \frac{v}{y}\tilde{H}_{2.p.q}\right] y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w^2 \\ & - \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{v}G + vH\right].\eta(y - y^{-1}) \\ & + \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{v}G + vH\right].\eta(y + y^{-1})\,.\,w \\ & - \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{v}G + vH\right].2\eta y\,.\,w^2\,. \end{aligned} \tag{176}$$

Dabei sind die mit η^2 und η^3 zu multiplicirenden Glieder in den beiden letzten Zeilen — vergl. den Ausdruck für ΔV_1 — als unwesentlich ausgelassen worden, indem sie dritten und vierten Grades sind und obgleich wohl einige derselben durch die fernere Integration den Divisor w bekommen können.

Aus dem angeführten Ausdrucke und dem oben gefundenen:

$$W_1 = \mathrm{RT}\left[x + \frac{1}{v}\eta u + v\eta v\right] \tag{177}$$

erhält man die Function W mittels der Formel

$$W = -\frac{w}{1-w} + V + W_1\,.$$

9. Störungen der mittleren Anomalie.

Nach der Formel (124) des vorigen Abschnittes haben wir

$$n\delta z = -\frac{w}{1-w} nz + \frac{3\theta_1}{1-w} + \zeta + \frac{3n'\delta z'}{1-w} \tag{178}$$

und dabei gelten für θ_1 und ζ die Differentialgleichungen

$$\frac{d3\theta_1}{d\varepsilon} = (1-w)\overline{W}_1(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \tag{179}$$

$$\frac{d\zeta}{d\varepsilon} = \overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) - \frac{3}{1-w}\frac{dn'\delta z'}{d\varepsilon} . \tag{180}$$

Betrachten wir auf der rechten Seite dieser Gleichungen nur das von $n'\delta z'$ abhängige Glied, so bekommen wir

$$n\delta z = 0 .$$

Wir können daher mit Vernachlässigung solcher Glieder zweiter Ordnung, welche von der Störung der mittleren Anomalie Jupiters abhängen, von der Grösse $n'\delta z'$ in diesen Formeln ganz absehen, bemerken aber dabei, dass ihre Berücksichtigung nach (125) keine teoretische Schwierigkeit darbietet.

Es steht nichts im Wege, die Grösse $\theta = \theta_1 + \mu(1-w)\zeta$ direct aus der entsprechenden Differentialgleichung zu bestimmen. Es trägt aber zur Übersicht bei, wenn wir die Grössen θ_1 und ζ getrennt behandeln. Beschäftigen wir uns zunächst mit der Gleichung (179).

Setzen wir

$$\varepsilon - e\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon = g , \tag{181}$$

so lässt sich dieselbe einfacher als

$$\frac{d3\theta_1}{dg} = (1-w)\overline{W}_1 \tag{182}$$

schreiben. Die rechte Seite dieser Gleichung hat nach (177) den Wert

$$(1-w)\,\overline{W}_1 = (1-w)\,\mathrm{RT}\left[x + \frac{1}{y}\,\eta u + y\,\eta v\right]$$

und diess ist, weil

$$x = w_1 + \eta^2(u+v)$$

und in Folge der Beziehung

$$u = v'$$

[vergl. (165)] nichts anders als

$$(1-w)\mathrm{RT}\,[w_1 + 2\eta^2 v + 2\eta v\, y] \ .$$

Durch Substitution von

$$3\theta_1 = 2\ \mathrm{am}\,\frac{2K}{\pi}\varphi + 180^0 - F$$

erhalten wir also mit Berücksichtigung von (164)

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{w_1}{w_0}\,\frac{d2\varphi}{dg} = (1-w)\,w_1 + (1-w)\,\mathrm{RT}\,[2\eta v\,(\eta+y)] \ .$$

Führen wir die Bezeichnung

(183) $$\varkappa = \frac{\pi w_0}{2K}\,(1-w)$$

ein, so reducirt sich diese Gleichung zu der Form

$$\frac{d2\varphi}{dg} = \varkappa + \varkappa\,\mathrm{RT}\left[\frac{2\eta v}{w_1}\,(\eta+y)\right]$$

oder schliesslich mit Anwendung der Relation (164) zu

(184) $$\frac{d2\varphi}{dg} = \varkappa + (1-w)\,\mathrm{RT}\left[2\eta v\,(1-4q\,\mathrm{Cos}\,2\varphi)\,(\eta+y)\right] \ .$$

Zunächst können wir die excentrische Anomalie auf der rechten Seite mit der mittleren ersetzen und entnehmen zu dem Zweck der Gleichung (84) die Relation

$$y = x\left[1 + \eta(x - x^{-1}) + \eta^2\left(\frac{3}{2}\,x^2 - 1 - \frac{1}{2}\,x^{-2}\right) + \ldots\right] \ .$$

Es genügt, die beiden ersten Glieder dieser Formel zu berücksichtigen, weil die mit η^2 multiplicirten Glieder durch die Integration nicht vergrössert werden. Wenn der Betrag von $2\eta v$ z. B. 1000″ wäre und für einen Excentricitäts-winkel um 10°, würden diese Glieder erst 8″ ausmachen. Wir bekommen so die Differentialgleichung

$$(185)\quad \frac{d2\varphi}{dg} = \varkappa + (1-w)\,\mathrm{RT}\left[2\eta v\,(1-4q\,\mathrm{Cos}\,2\varphi)(x+\eta x^2)\right]\;;\quad x = e^{\sqrt{-1}\,g}\;.$$

Zur Bestimmung von 2φ aus dieser Gleichung haben wir die Kentniss der Function ηv nöthig. Dieselbe ist durch die Differentialgleichung

$$(186)\qquad \frac{d\eta v}{d\omega} = -\frac{H-G'}{\varkappa}\,\omega^{-1}\;;\quad \omega = e^{\sqrt{-1}\,\varphi}$$

definirt worden [vergl. (167)] und die Function $H-G'$, welche hier vorkommt, besteht hauptsächlich aus einer Summe von Gliedern mit dem Argumente $3\theta_1$. Es ist aber leicht, auch die Vielfachen von dem Argumente $3\theta_1$ in dem Ausdrucke $H-G'$ zu berücksichtigen, wenn sie merkbar werden würden. Durch Zusammenziehung der Glieder erhält man die Form

$$(187)\qquad -(H-G') = \mathrm{v}e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{V}}\,.\,\vartheta_1^3 + \ldots$$

und transformirt man gemäss (168) auf das Argument φ, so ergiebt sich

$$(188)\qquad -(H-G') = -\mathrm{v}e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V}-F)}\,.\,\omega^2 - \ldots,$$

wobei die nicht ausgeschriebenen Glieder die Potenzen der Grösse q enthalten. Durch Integration der Gleichung (186) erhalten wir also

$$\eta v = -\frac{\mathrm{v}\,e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V}-F)}\,\omega^2}{2\varkappa} - \ldots$$

— ein Resultat, welches wir in der Form

$$(189)\qquad \eta v = -\frac{(H-G')_\omega}{\varkappa}$$

angeben können, indem mit

$$(H-G')_\omega$$

diejenige Function bezeichnet wird, welche aus dem Ausdrucke (188) für $H - G'$ hervorgeht, wenn jedes Glied mit dem zugehörigen Exponenten dividirt wird. Wenn nur das erste Glied berücksichtigt wird, hat man einfach

$$(H - G')_\omega = \frac{1}{2}(H - G')$$

und demnach

$$2\eta v = -\frac{H - G'}{z} . \tag{190}$$

Den Ausdruck (190), der jetzt eine Function von ω^2 ist, mit

$$1 - 4q \operatorname{Cos} 2\varphi = 1 - 2q(\omega^2 + \omega^{-2})$$

zu multipliciren hat dann keine Schwierigkeit. Indem wir aber in unserem Falle die Glieder zweiter Ordnung übergehen, können wir einfach von der Differentialgleichung

$$\frac{d\,2\varphi}{dg} = z - (1 - w)\,\mathrm{RT}\left[\frac{\mathrm{V}}{z}\, e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V} - F)} \cdot \omega^2(x + \eta x^2)\right] \tag{191}$$

[vergl. (185) und (188)] ausgehen.

Die Integration erfolgt durch Annäherungen, indem man das erste Resultat als

$$2\varphi = zg + G$$

feststellt. Hieraus erhält man

$$\omega^2 = e^{\sqrt{-1}\,G}\, x^z$$

und

$$\omega^2(x + \eta x^2) = e^{\sqrt{-1}\,G}\, x^z\,(x + \eta x^2) .$$

Nachdem dieser Ausdruck in (191) eingeführt worden ist, liefert diese Gleichung in zweiter Annäherung den Ausdruck

$$2\varphi = zg + G - (1 - w)\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\frac{\mathrm{V}}{z}\, e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V} - F + G)}\, x^z \left(\frac{x}{1 + z} + \eta\,\frac{x^2}{2 + z}\right)\Big] , \tag{192}$$

der sich in reeler Form und mit Anwendung der Bezeichnung

$$3\Theta = zg + G + 180^0 - F$$

folgendermassen schreiben lässt:

$$2\varphi = 3\Theta - 180^0 + F$$

$$+ \frac{1-w}{1+z}\frac{\mathrm{V}}{z}\,\mathrm{Sin}\,(g + 3\Theta + \mathrm{V}) \tag{193}$$

$$+ \frac{1-w}{2+z}\frac{\eta\mathrm{V}}{z}\,\mathrm{Sin}\,(2g + 3\Theta + \mathrm{V})\ .$$

Um hieraus den Ausdruck für $3\theta_1$ abzuleiten, entwickeln wir die Relation (163) in die Reihe

$$3\theta_1 = 2\varphi + 180^0 - F + 4q\,\mathrm{Sin}\,2\varphi + 2q^2\,\mathrm{Sin}\,4\varphi\ . \tag{194}$$

Mit genügender Annäherung ergiebt sich dann mit Hülfe der vorigen Formel

$$3\theta_1 = 3\Theta + 4q\,\mathrm{Sin}\,(3\Theta + 180^0 + F) + 2q^2\,\mathrm{Sin}\,(6\Theta + 2F) \tag{195}$$

$$+ \frac{1-w}{1+z}\frac{\mathrm{V}}{z}\,\mathrm{Sin}\,(g + 3\Theta + \mathrm{V})$$

$$+ \frac{1-w}{2+z}\frac{\eta\mathrm{V}}{z}\,\mathrm{Sin}\,(2g + 3\Theta + \mathrm{V})\ ,$$

wobei

$$3\Theta = zg + G + 180^0 - F\ . \tag{196}$$

Mit Anwendung der mittleren Anomalie g ergiebt sich so die Grösse $3\theta_1$ am einfachsten. Handelt es sich aber darum, das erlangte Resultat mit anderen nach Hansens Methode berechneten Störungen zu vergleichen, empfiehlt es sich die excentrische Anomalie im Ausdrucke

$$\frac{x}{1+z} + \eta\frac{x^2}{2+z}$$

wieder einzuführen. Den Fakor x^z können wir aber unverändert lassen, weil derselbe durch die Transformation ausser y^z nur unwesentliche

Glieder liefert, welche mit dem Producte $\varkappa\eta$ multiplicirt sind. Man bekommt in der That [vergl. 106]

$$x^{\varkappa} = y^{\varkappa}\left\{1 - \varkappa\eta(y - y^{-1}) + \frac{\varkappa^2\eta^2}{2}(y^2 - 2 + y^{-2}) - \ldots\right\} .$$

Für $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ giebt aber diese Formel je

$$x = y - \eta(y^2 - 1) + \ldots$$

$$x^2 = y^2 - \ldots ,$$

woraus folgt

$$\frac{x}{1+\varkappa} + \eta\frac{x^2}{2+\varkappa} = \frac{\eta}{1+\varkappa} + \frac{y}{1+\varkappa} - \eta\frac{y^2}{(1+\varkappa)(2+\varkappa)} .$$

Statt (195) bekommen wir also mittels der zuletzt angeführten Formel aus (192)

$$\begin{aligned} 3\theta_1 = {} & 3\Theta + 4q\,\mathrm{Sin}\,(3\Theta + 180^0 + F) + 2q^2\,\mathrm{Sin}\,(6\Theta + 2F) \\ & + \frac{1-w}{1+\varkappa}\frac{\eta\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(3\Theta + \mathrm{V}) \\ (197) \qquad & + \frac{1-w}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) \\ & - \frac{1-w}{(1+\varkappa)(2+\varkappa)}\frac{\eta\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(2\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) . \end{aligned}$$

Zur Integration der Differentialgleichung für ζ (180), müssen wir zunächst den Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung bilden. Ersetzen wir v mit y, so ergiebt sich erstens aus dem Ausdrucke (176) des vorigen Abschnittes

$$\begin{aligned} (198) \qquad \overline{V} = {} & l\varepsilon + m\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + n\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\,\bar{A}_{0,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s} \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\,\bar{A}_{1,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s}\,.\,w \\ & + \mathrm{RT}\,\Sigma\,\bar{A}_{2,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1{}^{n-s}\,.\,w^2 \end{aligned}$$

$$- \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{y}G + yH\right] . \eta(y - y^{-1})$$

$$+ \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{y}G + yH\right] . \eta(y + y^{-1}) . w$$

$$- \mathrm{RT}\left[F + \frac{1}{y}G + yH\right] . 2\eta y . w^2 ,$$

wobei die Coëfficienten $\bar{A}$ durch die Formel

(199) $\bar{A}_{p.q}[n+r.-n+s] = \tilde{F}_{p.q}[n+r.-n+s] + \tilde{G}_{p.q}[n+r.-n+s] + \tilde{H}_{p.q}[n+r.-n+s]$

[vergl. (143) und (144)] bestimmt sind. Hieraus folgt

(200) $$\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) = (l - m\eta)\varepsilon + (m - 2l\eta)\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + n\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - m\eta\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon - n\eta\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon$$

$$+ \mathrm{RT}\,\Sigma A_{0.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

$$+ \mathrm{RT}\,\Sigma A_{1.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s} . w$$

$$+ \mathrm{RT}\,\Sigma A_{2.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s} . w^2$$

$$+ \mathrm{RT}\left\{ \begin{bmatrix} -\eta y \\ +\eta y^{-1} \\ +\eta^2 y^2 \\ -\eta^2 y^{-2} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} -\eta \\ +\eta y^{-2} \\ +\eta^2 y \\ -\eta^2 y^{-3} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} -\eta y^2 \\ +\eta \\ +\eta^2 y^3 \\ -\eta^2 y^{-1} \end{bmatrix} H \right\}$$

$$+ \mathrm{RT}\left\{ \begin{bmatrix} +r_1 y \\ +r_1 y^{-1} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} +r_1 \\ +r_1 y^{-2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} +r_1 y^2 \\ +r_1 \end{bmatrix} H \right\} w$$

$$+ \mathrm{RT}\left\{ -2r_1 y F - 2r_1 G - 2r_1 y^2 H \right\} w^2 ,$$

wobei die Coëfficienten A mittels der Formel

(201) $$A_{p.q}(n+r.-n+s) = \bar{A}_{p.q}(n+r.-n+s) - \bar{A}_{p-1.q}(n+r+1.-n+s) - \bar{A}_{p-1.q}(n+r-1.-n+s)$$

zu berechnen sind [Tafel XXXII]. Über die Zusatzglieder gilt die Bemerkung zu (176).

Es sei der von y unabhängige Teil der vier ersten Abteilungen dieser Formel, den man aus den numerischen Rechnungen unmittelbar herausnehmen kann, gleich A, so bekommt man in $\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$ im Ganzen den von y unabhängigen Teil

$$\text{(202)} \qquad \mathrm{RT}\,A_1 = \mathrm{RT}\left\{A + \eta(H - G') + \eta(H + G')w - 2\eta G' w^2\right\} .$$

Die Differentialgleichung (180) können wir nun durch Einführung von partiellen Derivirten und mit Anwendung der Relation (179) folgendermassen schreiben:

$$\text{(203)} \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} = \overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) - \mu(1 - w)\frac{\partial \zeta}{\partial \theta_1}\,\overline{W}_1(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) .$$

Diese Gleichung können wir in derselben Weise wie die Differentialgleichung für W behandeln. Stellt man für ζ eine ähnliche Entwicklung auf, wie für $\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$ gefunden worden ist, nämlich

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1 w + \zeta_2 w^2 + \cdots + \zeta_\vartheta ,$$

wobei ζ_ϑ nur von θ_1, die ζ_0, ζ_1, ζ_2 aber auch von ε abhängig sind, so löst sich die Gleichung (203) in das folgende System [vergl. (141)] auf:

$$\text{(204)} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_0}{\partial \varepsilon} &= [\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)]_0 \\ \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varepsilon} &= [\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)]_1 - \mu\frac{\partial \zeta_0}{\partial \theta_1}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial \varepsilon} &= [\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)]_2 - \mu\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \zeta_0}{\partial \theta_1}\right)(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \end{aligned}\right| - \mu(1 - w)\frac{\partial \zeta_\vartheta}{\partial \theta_1}\,\overline{W}_1(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) .$$

Das Glied hinter dem vertikalen Striche giebt den Ausdruck

$$\text{(205)} \qquad -\mu(1 - w)\,\mathrm{RT}\left\{\begin{aligned} & x - \eta^2(u + v) \\ & + \eta(v - x)y \\ & + \eta(u - x)y^{-1} \\ & - \eta^2 v\, y^2 \\ & - \eta^2 u\, y^{-2} \end{aligned}\right\}\frac{d\zeta_\vartheta}{d\theta_1} ,$$

dessen von ε unabhängiger Teil —

$$-(1-w)\,w_1\frac{d\zeta_\vartheta}{d3\theta_1}$$

— dem Ausdrucke (202) gleich zu setzen ist:

$$(206)\qquad (1-w)\,w_1\frac{d\zeta_\vartheta}{d3\theta_1}=\mathrm{RT}\,A_1\ .$$

Die Integration dieser Gleichung gestaltet sich sehr einfach. Durch Einführung von 2φ als unabhängige Veränderliche [vergl. (163) und (183)], geht dieselbe nämlich in die folgende:

$$(207)\qquad \varkappa\frac{d\zeta_\vartheta}{d2\varphi}=\mathrm{RT}\,A_1\ .$$

über. Die Function RT A_1 ist aber der reele Teil eines Agregats von Gliedern mit dem Argumente $3\theta_1$ und dessen Vielfachen, also

$$(208)\qquad \mathrm{RT}\,A_1=a_0+\mathrm{RT}\left[ae^{\sqrt{-1}A}\,\vartheta_1^3+..\right]$$

oder mit Anwendung von (168)

$$(209)\qquad \mathrm{RT}\,A_1=a_0-\mathrm{RT}\left[ae^{\sqrt{-1}(A-F)}\omega^2+..\right].$$

Wir erhalten also

$$(210)\qquad \zeta_\vartheta=\frac{a_0}{\varkappa}2\varphi-\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[\frac{a}{\varkappa}e^{\sqrt{-1}(A-F)}\omega^2+..\right],$$

d. h.

$$\zeta_\vartheta=\frac{a_0}{\varkappa}2\varphi+\frac{a}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(2\varphi+180^0+A-F)$$

oder, wenn 2φ mittels (193) eliminirt wird,

$$(211)\qquad \zeta_\vartheta=a_0 g+\frac{a}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(3\Theta+A)\ .$$

Bei der Auflösung der Gleichung (203) haben wir in den Coëfficienten zu den Derivirten von ζ_0, ζ_1, ζ_2 nach θ_1

$$\overline{W}_1=w$$

gesetzt. Eine vollständigere Entwicklung des zweiten Gliedes in (203) mit Berücksichtigung von Gliedern zweiter Ordnung würde zu einer mit (138) analogen Entwicklung führen.

Wir integriren das System (204), indem wir zunächst nur auf die vier ersten Abteilungen des Ausdruckes (200) Rücksicht nehmen und können nachträglich die Zusatzglieder bestimmen, welche den übrigen Teilen dieses Ausdruckes entsprechen. Dann bekommen wir zuerst

$$\begin{aligned}\zeta_0 = \frac{l-m\eta}{2}\varepsilon^2 &+ (m-2l\eta)\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \quad - \quad n\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon \\ &- \frac{m\eta}{2}\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon + \frac{n\eta}{2}\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon \\ &+ (m-2l\eta)\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon \quad + \quad n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \\ &- \frac{m\eta}{4}\,\mathrm{Cos}\,2\varepsilon - \frac{n\eta}{4}\,\mathrm{Sin}\,2\varepsilon \\ &+ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\Sigma R_{0.p.q}(n+r.-n+s)\; y^{n+r-(n-s)\mu}\;\vartheta_1^{n-s}\;,\end{aligned} \tag{212}$$

wobei die Coëfficienten folgende Werte haben:

$$R_{0.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{A_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}\;. \tag{213}$$

Die $R_{0.p.q}$ sind in der Tafel XXXV numerisch gegeben. Aus (212) folgt

$$\mu\,\frac{\partial\zeta_0}{\partial\theta_1} = \mathrm{RT}\,\Sigma\mu(n-s)R_{0.p.q}(n+r.-n+s)\; y^{n+r-(n-s)\mu}\;\vartheta_1^{n-s}\;,$$

wonach die zweite der Gleichungen (204) ergiebt:

$$\zeta_1 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\Sigma R_{1.p.q}(n+r.-n+s)\; y^{n+r-(n-s)\mu}\;\vartheta_1^{n-s}\;. \tag{214}$$

Die Coëfficienten sind durch die Formel

$$R_{1.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{A_{1.p.q}(n+r.-n+s) - a_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu} \tag{215}$$

[vergl. (143) und (144)] gegeben, vorausgesetzt dass die $a_{0.p.q}(n+r.-n+s)$ aus den $R_{0.p.q}(n+r.-n+s)$ gemäss den Relationen

(216)
$$a_{0.0}(n.-n) = n\mu R_{0.0}(n.-n)$$

$$a_{1.0}(n+1.-n) = n\mu R_{1.0}(n+1.-n) - n\mu R_{0.0}(n.-n)$$
$$a_{1.0}(n-1.-n) = n\mu R_{1.0}(n-1.-n) - n\mu R_{0.0}(n.-n)$$

$$a_{0.1}(n.-n+1) = (n-1)\mu R_{0.1}(n.-n+1)$$
$$a_{0.1}(n.-n-1) = (n+1)\mu R_{0.1}(n.-n-1)$$

. . . . . .

[vergl. (136)] berechnet werden. Wenn man ebenso $a_{1.p.q}(n+r.-n+s)$ aus $R_{1.p.q}(n+r.-n+s)$ bestimmt hat, so ergeben sich die Coëfficienten zu der Reihe

(217)
$$\zeta_2 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma R_{2.p.q}(n+r.-n+s)\ y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}$$

als

(218)
$$R_{2.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{A_{2.p.q}(n+r.-n+s) - a_{1.p.q}(n+r.-n+s) + a_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}.$$

Zu dem so gefundenen Werte von ζ kommt aber noch eine Correction $\Delta\zeta$, welche den bis jetzt vernachlässigten Gliedern in $\overline{V}(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$ aus (200) und dem Ausdrucke

$$-\mu(1-w)\,\mathrm{RT}\left\{\begin{array}{l} +\eta(v-x)\,y \\ +\eta(u-x)\,y^{-1} \\ -\eta^2 v\ y^2 \\ -\eta^2 u\ y^{-2} \end{array}\right\}\frac{d\zeta_\theta}{d\theta_1}$$

aus (205) entspringt. Der letztere Ausdruck, der sich auch nach (206) als

$$-\mathrm{RT}\left\{\begin{array}{l} +\eta(v-x)\,y \\ +\eta(u-x)\,y^{-1} \\ -\eta^2 v\ y^2 \\ -\eta^2 u\ y^{-2} \end{array}\right\}\cdot\frac{A_1}{w_1}$$

angeben lässt, verwandelt sich durch Elimination von x mittels der Formel

$$x = w_1 + \eta^2(u+v)$$

in

$$-\mathrm{RT}\begin{Bmatrix} -r(y+y^{-1})+\dfrac{\eta v}{w_1}(y-\eta y^2-\eta^2(y+y^{-1}) \\ +\dfrac{\eta u}{w_1}(y^{-1}-\eta y^{-2}-\eta^2(y+y^{-1}) \end{Bmatrix} \cdot A_1$$

oder, mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung, in

$$\mathrm{RT}\begin{bmatrix} +\eta y \\ +\eta y^{-1} \end{bmatrix} A_1 \,, \tag{219}$$

wozu noch die drei letzten Zeilen aus (200) hinzuzufügen sind.

Die Zuschussglieder —

$$\Delta\zeta = \Delta\zeta_0 + \Delta\zeta_1 w + \Delta\zeta_2 w^2 + \cdots \tag{220}$$

— ergeben sich dann in der folgenden Weise:

$$\Delta\zeta_0 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left\{\begin{bmatrix} -\eta y \\ -\eta y^{-1} \\ +\frac{1}{2}\eta^2 y^2 \\ +\frac{1}{2}\eta^2 y^{-2} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} - \\ -\frac{1}{2}\eta y^{-2} \\ +r^2 y \\ +\frac{1}{3}\eta^2 y^{-3} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\eta y^2 \\ - \\ +\frac{1}{3}\eta^2 y^3 \\ +\eta^2 y^{-1} \end{bmatrix} H\right\} + \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\begin{bmatrix} +\eta y \\ -r y^{-1} \end{bmatrix} A_1 \,. \tag{221}$$

Durch Differentiation nach θ_1 erhält man hieraus [vergl. (175)]

$$-\mu\frac{\partial\Delta\zeta_0}{\partial\theta_1} = -\mathrm{RT}\left\{\begin{bmatrix} -\eta y \\ -\eta y^{-1} \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} - \\ -\frac{1}{2}\eta y^{-2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\eta y^2 \\ - \end{bmatrix} H\right\} - \mathrm{RT}\begin{bmatrix} +\eta y \\ -\eta y^{-1} \end{bmatrix} A_1 \,,$$

welcher Ausdruck mit $(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)$ zu multipliciren wäre, wonach die Integration, der zweiten der Gleichungen (204) gemäss, ergiebt:

$$(222)\qquad \Delta\zeta_1 = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left\{\begin{bmatrix} -2\eta y \\ +2\eta y^{-1}\end{bmatrix}F + \begin{bmatrix} - \\ +\frac{3}{4}\eta y^{-2}\end{bmatrix}G + \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}\eta y^2 \\ - \end{bmatrix}H\right\}$$

$$-\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\begin{bmatrix} +\eta y \\ +\eta y^{-1}\end{bmatrix}A_1$$

[vergl. die Bemerkung zu (176)]. In ähnlicher Weise leitet man den Ausdruck für $\Delta\zeta_2$ ab. Diese Rechnungen nehmen, wenn sie in algebraischer Form und mit grösserer Vollständigkeit, die etwa für andere Typen von Planeten erforderlich sein würde, ausgeführt werden, etwas viel Raum ein, das Resultat vereinfacht sich aber zum Ende bedeutend, weil die Mehrzahl der Glieder unmerkbar werden. Dasselbe gilt von den mit q multiplicirten Gliedern zweiter Ordnung.

Der vollständige Ausdruck für ζ ergiebt sich nun als

$$(223)\qquad \zeta = \zeta_0 + \Delta\zeta_0 + (\zeta_1 + \Delta\zeta_1)w + (\zeta_2 + \Delta\zeta_2)w^2 \ .$$

Bevor wir zur Zusammenstellung der Grösse $n\delta z$ aus den gewonnenen Resultaten gemäss (178) schreiten, mögen folgende Bemerkungen über die Bestimmung der Integrationsconstante w_0 vorausgeschickt werden. Für die Osculationsepoche hat man

$$\frac{dn\delta z}{dt} = 0$$

oder gemäss (24) mit Vernachlässigung von ν^2

$$\overline{W} = 0 \ ,$$

also nach (128)

$$\frac{w}{1-w} = \overline{V} + \overline{W}_1 \ .$$

Durch Einsetzung des entsprechenden Wertes von ε in (177) und (198) erhält man $\overline{V} + \overline{W}_1$ in Zahlen und in w_0 resp. $\varkappa$ ausgedrückt [vergl. (164) und (190)], so dass die Bestimmung von w_0 aus der angeführten Gleichung erfolgen kann. Mit Vernachlässigung von den Störungen hat man einfach

$$\overline{V} + \overline{W}_1 = w_1 = \frac{\pi}{2K} w_0$$

und daher

$$w_0 = \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{w}{1-w} , \tag{224}$$

welche Bestimmung als erste Annäherung benutzt werden kann. Es folgt dann einfach [vergl. 183]

$$\varkappa = w . \tag{225}$$

Mit Anwendung von (224) erhalten wir aus (162)

$$k^2 = \frac{4f}{w^2} \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 (1-w) , \tag{226}$$

wobei in erster Annäherung zu setzen ist:

$$\frac{\pi}{2K} = 1 .$$

Aus (197) bekommen wir ganz allgemein

$$\begin{aligned} \frac{3\theta_1}{1-w} = {} & \frac{3\Theta}{1-w} + \frac{4q}{1-w} \operatorname{Sin}(3\Theta + 180^\circ + F) + \frac{2q^2}{1-w} \operatorname{Sin}(6\Theta + 2F) \\ & + \frac{\eta}{1+\varkappa} \frac{\mathrm{v}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(3\Theta + \mathrm{V}) \\ & + \frac{1}{1+\varkappa} \frac{\mathrm{v}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) \\ & - \frac{\eta}{(1+\varkappa)(2+\varkappa)} \frac{\mathrm{v}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(2\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) . \end{aligned} \tag{227}$$

Die Glieder in $n\delta z$, welche das Argument 3Θ allein enthalten, können durch die Hülfsformeln

$$r \operatorname{Cos} R = \frac{4q}{1-w} + \frac{a}{\varkappa} \operatorname{Cos}(180^\circ + A - F) + \frac{\eta}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa} \operatorname{Cos}(180^\circ + \mathrm{V} - F)$$

(228)

$$r \operatorname{Sin} R = \frac{a}{\varkappa} \operatorname{Sin}(180^\circ + A - F) + \frac{\eta}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(180^\circ + \mathrm{V} - F)$$

zu dem einzigen Gliede:

(229) $$r \operatorname{Sin}(3\Theta + 180^\circ + R + F)$$

zusammengezogen werden. Die letzten Glieder der Ausdrucke (228) haben auf die Bestimmung der Hülfsgrössen r und R nur unerheblichen Einfluss. Stellen wir schliesslich alle Glieder zusammen, aus welchen die Zeitreduction gemäss (178) sich zusammensetzt. Dieselben sind: [1])

(230)
$$\begin{aligned} n\delta z = {} & \frac{\varkappa - w}{1-w} g + a_0 g + \frac{l - m\eta}{2}\varepsilon^2 \\ & + (m - 2l\eta)\,\varepsilon \operatorname{Sin}\varepsilon - n\,\varepsilon \operatorname{Cos}\varepsilon \\ & - \frac{m\eta}{2}\varepsilon \operatorname{Sin} 2\varepsilon + \frac{n\eta}{2}\varepsilon \operatorname{Cos} 2\varepsilon \\ & + (m - 2l\eta) \operatorname{Cos}\varepsilon + n \operatorname{Sin}\varepsilon \\ & - \frac{m\eta}{4} \operatorname{Cos} 2\varepsilon - \frac{n\eta}{4} \operatorname{Sin} 2\varepsilon \\ & + r \operatorname{Sin}(3\Theta + 180^\circ + R + F) + 2q^2 \operatorname{Sin}(6\Theta + 2F) \\ & + \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) \\ & - \frac{\eta}{(1+\varkappa)(2+\varkappa)}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(2\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) \end{aligned}$$

[1]) In der entsprechenden Formel, die in A. N. N:o 3294 angegeben worden ist, hat das Glied $\frac{m\eta}{4} \operatorname{Cos} 2\varepsilon$ falsches Vorzeichen.

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma R_{0,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma R_{1,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma R_{2,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w^2$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left\{\begin{bmatrix}-\eta y\\ -\eta y^{-1}\\ +\frac{1}{2}\eta^2 y^2\\ +\frac{1}{2}\eta^2 y^{-2}\end{bmatrix}F+\begin{bmatrix}-\\ -\frac{1}{2}\eta y^{-2}\\ +\eta^2 y\\ +\frac{1}{3}\eta^2 y^{-3}\end{bmatrix}G+\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\eta y^2\\ -\\ +\frac{1}{3}\eta^2 y^3\\ +\eta^2 y^{-1}\end{bmatrix}H\right\}$$

$$-\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left\{\begin{bmatrix}-2\eta y\\ +2\eta y^{-1}\end{bmatrix}F+\begin{bmatrix}-\\ +\frac{3}{4}\eta y^{-2}\end{bmatrix}G+\begin{bmatrix}-\frac{3}{4}\eta y^2\\ -\end{bmatrix}H\right\}.w$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[A_1\,.\,\eta(y-y^{-1})\right]-\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[A_1\,.\,\eta(y+y^{-1})\right].w\,.$$

Ausser ε enthält diese Formel die Argumente g, Θ und θ_1, welche durch die Relationen

$$g=\varepsilon-e\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon\;;\quad 3\Theta=\varkappa g+G+180^0-F$$

und die Formel (197) bestimmt sind. Das erste Glied des angeführten Ausdruckes für $n\delta z$ verschwindet zufolge (225), wenn die Störungen zweiter Ordnung ausser Acht gelassen werden. Unter derselben Bedingung kann auch das in der Mehrzahl der Glieder auftretende Argument θ_1 mit Θ ersetzt werden.

10. Störungen des Radiusvectors.

Aus (176) und (177) erhält man durch Differentiation nach η und v und indem diese Argumente nach der Differentiation in ε und y vertauscht werden, einerseits

$$\frac{\partial \overline{W_1}}{\partial \eta} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} [-2\eta v y] \tag{231}$$

und anderseits

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial \eta} = -m\varepsilon \operatorname{Sin}\varepsilon + n\varepsilon \operatorname{Cos}\varepsilon \tag{232}$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma B_{0\,p,q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s}$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma B_{1,p,q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} . w$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma B_{2,p,q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} . w^2$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ \begin{bmatrix} -\eta \\ +\eta y^{-2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} +\eta y^2 \\ -\eta \end{bmatrix} H \right\}$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ \begin{bmatrix} +\eta \\ +\eta y^{-2} \end{bmatrix} G + \begin{bmatrix} -\eta y^2 \\ -\eta \end{bmatrix} H \right\} w$$

$$+\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ -2\eta G + 2\eta y^2 H \right\} w^2$$

wobei [vergl. (199)] die Coëfficienten folgende Werte haben:

$$B_{p,q}(n+r.-n+s) = \tilde{G}_{p,q}(n+r.-n+s) - \tilde{H}_{p,q}(n+r.-n+s) \ . \tag{233}$$

Die numerischen Werte der Coëfficienten $B_{p,q}$ sind in der Tafel XXXIII enthalten.

Zerlegen wir der besseren Übersicht wegen und um die Analogie mit der Behandlungsweise in dem vorigen Abschnitte zu verwahren, die Grösse 2ν in zwei Teile, deren der eine $-2N$ — aus der Gleichung

$$\frac{d\,2N}{d\varepsilon} = -\frac{\partial \overline{W_1}}{\partial \eta} \tag{234}$$

zu bestimmen ist, so ergiebt sich der andere Teil aus der Differentialgleichung

$$\frac{d\,2\nu}{d\varepsilon} = -\overline{\frac{\partial V}{\partial \eta}}\,, \tag{235}$$

die wir sofort in der Form

$$\frac{\partial\,2\nu}{\partial\varepsilon} = -\overline{\frac{\partial V}{\partial\eta}} - \mu(1-w)\frac{\partial\,2\nu}{\partial\theta_1}\,\overline{W}_1(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \tag{236}$$

ansetzen, bez. in das System

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\,2\nu_0}{\partial\varepsilon} &= -\left[\overline{\frac{\partial V}{\partial\eta}}\right]_0 \\
\frac{\partial\,2\nu_1}{\partial\varepsilon} &= -\left[\overline{\frac{\partial V}{\partial\eta}}\right]_1 - \mu\frac{\partial\,2\nu_0}{\partial\theta_1}(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \\
\frac{\partial\,2\nu_2}{\partial\varepsilon} &= -\left[\overline{\frac{\partial V}{\partial\eta}}\right]_2 - \mu\left(\frac{\partial\,2\nu_1}{\partial\theta_1} - \frac{\partial\,2\nu_0}{\partial\theta_1}\right)(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon)
\end{aligned}\right| \quad -\mu(1-w)\frac{d\,2\nu_\theta}{d\theta_1}\,\overline{W}_1(1-e\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon) \tag{237}$$

auflösen können, indem der besprochene zweite Teil von 2ν in der Form

$$2\nu_0 + 2\nu_1 w + 2\nu_2 w^2 + \ldots + 2\nu_\theta \tag{238}$$

dargestellt vorausgesetzt worden ist.

Mittels (189) oder (190) ergiebt sich

$$-\overline{\frac{\partial W_1}{\partial\eta}} = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[-\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V}-F)}\cdot\omega^2 y - \ldots\right]$$

und ersetzt man hier nach (192) mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

$$\omega^2 \text{ mit } e^{\sqrt{-1}G}\,y^\varkappa(1-\varkappa\eta\,y+\varkappa\eta\,y^{-1})\,,$$

so lässt sich zu (234) unmittelbar das Integral

$$2N = \mathrm{RT}\left[\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}e^{\sqrt{-1}(\mathrm{V}-F+G)}\,y^\varkappa\left(\frac{y}{1+\varkappa} - \varkappa\eta\frac{y^2}{2+\varkappa} + \eta\right)\right] \tag{239}$$

aufstellen.

Benennen wir B das Agregat von Gliedern mit dem Argumente θ_1, welche aus den vier ersten Zeilen des Ausdruckes (232) herfliessen, so ergiebt sich die Gesammtheit solcher Glieder in $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ als

$$(240) \qquad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} B_1 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[B - \eta(H - G') - \eta(H + G')\, w + 2\eta G' w^2 \right] .$$

Diesen Ausdruck fassen wir mit dem von ε unabhängigen Gliede im dritten Teil der Gleichungen (237) —

$$(241) \qquad -\mu(1-w)\,\mathrm{RT} \left\{ \begin{array}{l} x - \eta^2(u+v) \\ +\eta(v-x)y \\ +\eta(u-x)y^{-1} \\ -\eta^2 v\, y^2 \\ -\eta^2 u\, y^{-2} \end{array} \right\} \frac{d\,2\nu_\vartheta}{d\,\theta_1}$$

— zusammen und bekommen so die Differentialgleichung

$$(242) \qquad (1-w)\, w_1 \frac{d\,2\nu_\vartheta}{d\,3\theta_1} = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} B_1 ,$$

oder durch Einführung von 2φ als unabhängige Veränderliche,

$$(243) \qquad \varkappa \frac{d\,2\nu_\vartheta}{d\,2\varphi} = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} B_1 .$$

Es sei jetzt

$$(244) \qquad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} B_1 = b_0 + \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[b\, e^{\sqrt{-1}\,B}\, \vartheta_1^3 + \ldots \right]$$

oder mit Anwendung von (168)

$$(245) \qquad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} B_1 = b_0 - \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left[b\, e^{\sqrt{-1}(B-F)}\, \omega^2 + \ldots \right] .$$

Wir erhalten dann unmittelbar

$$2\nu_\vartheta = -\frac{b_0}{\varkappa} 2\varphi + \frac{b}{\varkappa} \mathrm{Cos}\,(2\varphi + 180^0 + B - F)$$

oder, wenn das Argument 2φ mittels (193) eliminirt wird,

$$2\nu_\vartheta = -b_0 g + \frac{b}{z}\operatorname{Cos}(3\Theta + B) \ . \tag{246}$$

Die Integration der übrigen Glieder in den Gleichungen (237) erfolgt in derselben Weise, wie wir die Gleichungen (204) integrirt haben. Wir erhalten successive:

$$\begin{aligned} 2\nu_0 = &- m\,\varepsilon \operatorname{Cos}\varepsilon - n\,\varepsilon \operatorname{Sin}\varepsilon \\ &- n \ \operatorname{Cos}\varepsilon + m \operatorname{Sin}\varepsilon \\ &+ \mathrm{RT}\,\Sigma S_{0.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} \end{aligned} \tag{247}$$

mit der Bestimmung der Coëfficienten:

$$S_{0.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{B_{0\,p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu} \ ; \tag{248}$$

ferner

$$\mu\frac{\partial 2\nu_0}{\partial \theta_1} = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Sigma\mu(n-s)\, S_{0.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s}$$

und dann

$$2\nu_1 = \mathrm{RT}\,\Sigma S_{1.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} \tag{249}$$

mit der Bestimmung der Coëfficienten:

$$S_{1.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{B_{1.p.q}(n+r.-n+s) - b_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu} \tag{250}$$

und schliesslich

$$2\nu_2 = \mathrm{RT}\,\Sigma S_{2.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} \ , \tag{251}$$

wobei die Coëfficienten $S_{2.p.q}$ der dritten der Gleichungen (237) gemäss bestimmt sind. Dabei ergeben sich die Correctionsgrössen $b_{0.p.q}(n+r.-n+s)$, $b_{1.p.q}(n+r.-n+s)$ aus den Coëfficienten $S_{0.p.q}(n+r.-n+s)$, $S_{1.p.q}(n+r.-n+s)$ mittels des folgenden Formelsystemes [vergl. (136) und (216)]:

$$b_{0.0}(n.-n) \quad = n\mu\, S_{0.0}(n.-n)$$

$$b_{1.0}(n+1.-n) = n\mu\, S_{1.0}(n+1.-n) - n\mu\, S_{0.0}(n.-n)$$

$$b_{1.0}(n-1.-n) = n\mu\, S_{1.0}(n-1.-n) - n\mu\, S_{0.0}(n.-n)$$

$$b_{0.1}(n.-n+1) = (n-1)\mu\, S_{0.1}(n.-n+1)$$

$$b_{0.1}(n.-n-1) = (n+1)\mu\, S_{0.1}(n.-n-1)$$

. . . . . .

Es ist leicht, aus den letzten Zeilen des Ausdruckes (232) und den im dritten Teil der Gleichungen (237) übrig gebliebenen Gliedern:

$$(254) \qquad -\mu(1-w)\left\{\begin{array}{l} +\eta(v-x)\,y \\ +\eta(u-x)\,y^{-1} \\ -\eta^2 v\,y^2 \\ -\eta^2 u\,y^{-2} \end{array}\right\} \frac{d\,2\nu_0}{d\,\theta_1},$$

die wir mit Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung einfach zu

$$(255) \qquad -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[\begin{array}{l} +\eta\,y \\ +\eta\,y^{-1} \end{array}\right] B_1$$

reduciren können [vergl. (219)], die Correction

$$(256) \qquad \Delta\nu_0 + \Delta\nu_1\, w + \Delta\nu_2\, w^2 + \ldots$$

zu dem vorhin erhaltenen Resultate zu ermitteln.

Die von Θ allein abhängigen Glieder in 2ν können durch Einführung zweier Hülfsgrössen s und S mittels der Formeln

$$(255) \qquad \begin{aligned} s\,\mathrm{Cos}\,S &= \frac{b}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + B - F) - \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + \mathrm{V} - F) \\ s\,\mathrm{Sin}\,S &= \frac{b}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + B - F) - \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + \mathrm{V} - F) \end{aligned}$$

zu dem einzigen Gliede

$$(258) \qquad s\,\mathrm{Cos}\,(3\,\Theta + 180^0 + S + F)$$

zusammengezogen werden.

Der vollständige Ausdruck für 2ν ergiebt sich, wie folgt:

(259)
$$\begin{aligned}
2\nu = &- b_0 g - m\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \\
&\quad - n\ \mathrm{Cos}\,\varepsilon + m\ \mathrm{Sin}\,\varepsilon \\
&\quad + s\,\mathrm{Cos}\,(3\Theta + 180^0 + S + F) \\
&- \frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{\mathrm{v}}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(\varepsilon + 3\Theta + V) \\
&+ \mathrm{RT}\,\Sigma S_{0.p\,q}(n+r.-n+s)\ y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s} \\
&+ \mathrm{RT}\,\Sigma S_{1\,p.q}(n+r.-n+s)\ y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}\,.\,w \\
&+ \mathrm{RT}\,\Sigma S_{2.p.q}(n+r.-n+s)\ y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}\,.\,w^2 \\
&+ \mathrm{RT}\left\{-\frac{1}{2}\,\eta\,y^{-2}G + \frac{1}{2}\,\eta\,y^2 H\right\} \\
&+ \mathrm{RT}\left\{-\frac{3}{4}\,\eta\,y^{-2}G - \frac{3}{4}\,\eta\,y^2 H\right\} w \\
&+ \mathrm{RT}\left\{B_1\,.\,\eta(y - y^{-1})\right\} - \mathrm{RT}\left\{B_1\,.\,\eta(y + y^{-1})\right\} w \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

11. Störungen der dritten Coordinate.

Gemäss (28) und (111) nimmt die erste der auf die Neigungsstörungen bezüglichen Differentialgleichungen die Form

(260)
$$\begin{aligned}
\mathrm{Sec}\,i\,\frac{dU}{d\varepsilon} = &- \mathrm{RT}\,\Sigma\left\{F_{0.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\,G_{0.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{v}{y}\,H_{0.p.q}(n+r.-n+s)\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s} \\
&- \mathrm{RT}\,\Sigma\left\{F_{1.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{y}{v}\,G_{1.p.q}(n+r.-n+s) + \frac{v}{y}\,H_{1.p.q}(n+r.-n+s)\right\} y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}\,.\,w \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$U = V + U_1 \quad (261)$$

[1])

und bestimmen wir U_1 aus der Gleichung

$$\mu(1-w)w_1 \operatorname{Sec} i \frac{dU_1}{d\theta_1} = -\mathrm{RT}\left\{\frac{1}{v}G + vH\right\}, \quad (262)$$

indem die rechte Seite dieser Gleichung die Summe der von y unabhängigen Glieder des Ausdruckes (260) darstellt so ergiebt sich für V eine Differentialgleichung

$$\operatorname{Sec} i \frac{dV}{d\varepsilon} = Qa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}, \quad (263)$$

welche nichts anders ist, als die Gleichung (260) nach Abzug der erwähnten Glieder.

Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$\operatorname{Sec} i \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} = Qa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z} - \mu(1-w) \operatorname{Sec} i \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \overline{W}_1 (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \quad (264)$$

[vergl. (123)] und zerlegen dieselbe in das System

$$\begin{aligned} \operatorname{Sec} i \frac{\partial V_0}{\partial \varepsilon} &= \left[Qa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right]_0 \\ \operatorname{Sec} i \frac{\partial V_1}{\partial \varepsilon} &= \left[Qa^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right]_1 - \mu \operatorname{Sec} i \frac{\partial V_0}{\partial \theta_1} (1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \quad (265)$$

indem die Grösse V in die Reihe

$$V = V_0 + V_1 w + V_2 w^2 + \cdots \quad (266)$$

aufgelöst wird. Gemäss (260) erhalten wir dann

[1]) Die hier auftretende Function V, sowie die Coëfficienten F, G, H in (260) spielen für die Neigungsstörungen dieselbe Rolle, wie die gleichnahmigen in den vorigen Abschnitten vorkommenden Grössen für die Störungen in der Bahn, sind aber keineswegs mit jenen zu verwechseln. [vergl. die Bemerkung zu (111)].

$$\operatorname{Sec} i\ V_0 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left| \begin{matrix} \tilde{F}_{0.p.q}(n+r.-n+s) + \dfrac{y}{v}\,\tilde{G}_{0.p.q}(n+r.-n+s) \\ + \dfrac{v}{y}\,\tilde{H}_{0.p.q}(n+r.-n+s) \end{matrix} \right| y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}$$

(267)

$$\operatorname{Sec} i\ V_1 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left| \begin{matrix} \tilde{F}_{1.p.q}(n+r.-n+s) + \dfrac{y}{v}\,\tilde{G}_{1.p.q}(n+r.-n+s) \\ + \dfrac{v}{y}\,\tilde{H}_{1.p.q}(n+r.-n+s) \end{matrix} \right| y^{n+r-(n-s)\mu}\ \vartheta_1^{n-s}\ ,$$

wobei die Coëfficienten durch folgende Relationen [vergl. (143) und (144)] definirt sind:

$$\tilde{F}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{F_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

(268)
$$\tilde{G}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{G_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r+1-(n-s)\mu}$$

$$\tilde{H}_{0.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{H_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-1-(n-s)\mu}\ ,$$

$$\tilde{F}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{F_{1.p.q}(n+r.-n+s) + f_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

(269)
$$\tilde{G}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{G_{1.p.q}(n+r.-n+s) + g_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r+1-(n-s)\mu}$$

$$\tilde{H}_{1.p.q}(n+r.-n+s) = -\frac{H_{1.p.q}(n+r.-n+s) + h_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-1-(n-s)\mu}$$

Die Correctionsgrössen $f_{0.p.q}(n+r.-n+s)$, $f_{1.p.q}(n+r.-n+s)$ u. s. w. hat man gemäss dem folgenden Formelsysteme [vergl. (136)] zu berechnen:

$$f_{0.0}(n.-n) = n\mu\,\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{1.0}(n+1.-n) = n\mu\,\tilde{F}_{1.0}(n+1.-n) - n\mu\,\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{1.0}(n-1.-n) = n\mu\,\tilde{F}_{1.0}(n-1.-n) - n\mu\,\tilde{F}_{0.0}(n.-n)$$

$$f_{0.1}(n.-n+1) = (n-1)\mu\,\tilde{F}_{0.1}(n.-n+1)$$

$$f_{0.1}(n.-n-1) = (n+1)\mu\,\tilde{F}_{0.1}(n.-n-1)$$

. . . . . .

Die zur Bestimmung der Grösse U_1 dienende Differentialgleichung (262) lässt sich auch in der Form

$$\varkappa \operatorname{Sec} i \frac{dU_1}{d2\varphi} = -\operatorname{RT}\left\{v\,(H+G')\right\} \tag{271}$$

schreiben. Hieraus folgt

$$\operatorname{Sec} i\, U_1 = -\frac{\operatorname{IT}}{\sqrt{-1}}\,[\,vD\,]\,, \tag{272}$$

wobei nämlich

$$D = \int \frac{H+G'}{\varkappa}\,\frac{d\omega^2}{\omega^2} \tag{273}$$

gesetzt worden ist. Die Function $H+G'$ ergiebt sich durch die numerische Rechnung in der Form

$$H+G' = \mathrm{v}e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{V}}\,\vartheta_1^3 + \ldots \tag{274}$$

oder gemäss (169) als

$$H+G' = -\,\mathrm{v}e^{\sqrt{-1}\,(\mathrm{V}-F)}\,\omega^2 - \ldots \tag{275}$$

Führen wir den Ausdruck für ω^2 nach (192) —

$$\omega^2 = e^{\sqrt{-1}\,G}\,x^\varkappa$$

$$= e^{\sqrt{-1}\,G}\,y^\varkappa\,(1 - \varkappa\eta\,y + \varkappa\eta\,y^{-1})$$

— ein, so ergiebt die Integration (273) den Ausdruck

$$D = -\frac{\mathrm{v}}{\varkappa}\,e^{\sqrt{-1}\,(\mathrm{V}-F)}\,\omega^2 = -\frac{\mathrm{v}}{\varkappa}\,e^{\sqrt{-1}\,(\mathrm{V}-F+G)}\,y^\varkappa \tag{276}$$

$$+\,\eta\,\mathrm{v}\,e^{\sqrt{-1}\,(\mathrm{V}-F+G)}\,y^{\varkappa+1}$$

$$-\,\eta\,\mathrm{v}\,e^{\sqrt{-1}\,(\mathrm{V}-F+G)}\,y^{\varkappa-1}.$$

Der Gesammtwert von U setzt sich aus (267) und (272) zusammen. Hierzu kommt aber noch der Ausdruck

$$-m\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\eta - n\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\eta\ , \tag{277}$$

weil wir uns das Glied

$$-m\,\mathrm{Cos}\,\eta - n\,\mathrm{Sin}\,\eta$$

aus (271) ausgeschieden denken. Die Grössen m und n entsprechen hierbei den constanten Teilen in G und H, indem nämlich

$$\begin{aligned} m &= \quad \mathrm{RT}\,(H + \bar{G}') \\ n &= -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,(\bar{H} + G')\ . \end{aligned} \tag{278}$$

Durch Differentiation in Bezug auf η und indem man nachher η mit ε vertauscht, entsteht der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathrm{Sec}\,i\,\overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}} &= m\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon - n\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon \\ &\quad - \mathrm{RT}\,[\,y\,D\,] \\ &\quad + \mathrm{RT}\,\Sigma\,C_{0.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s} \\ &\quad + \mathrm{RT}\,\Sigma\,C_{1.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{279}$$

wobei die Coëfficienten nach den Formeln

$$\begin{aligned} C_{0.p.q}(n+r.-n+s) &= -\tilde{G}_{0.p.q}(n+r.-n+s) + \tilde{H}_{0.p.q}(n+r.-n+s) \\ C_{1.p.q}(n+r.-n+s) &= -\tilde{G}_{1.p.q}(n+r.-n+s) + \tilde{H}_{1.p.q}(n+r.-n+s) \end{aligned} \tag{280}$$

zu berechnen sind. Die numerischen Werte dieser Coëfficienten sind in der Tafel XXXIV angeführt.

Setzt man

$$s = \frac{u}{\mathrm{Cos}\,i}\ ,$$

wobei u die gleichbenannte Hansen'sche Grösse ist, so hat man gemäss (30)

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \operatorname{Sec} i \frac{\overline{\partial U}}{\partial \eta} \quad . \tag{281}$$

Zerlegen wir jetzt s, ähnlich wie es mit 2ν geschehen ist, in zwei Teile, deren der eine mit S bezeichnet und aus der Gleichung

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = -\mathrm{RT}\,[\,y\,D\,] \tag{282}$$

bestimmt werden mag, so bekommen wir zur Ermittlung des zweiten Teiles von s die Differentialgleichung (281) mit Abzug der in (282) schon berücksichtigten Glieder auf der rechten Seite.

Das Integral zu (282) ist

$$S = -\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\left[\int D\,dy\right] \tag{283}$$

oder gemäss (276)

$$\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}} S = \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\nabla}{\varkappa} e^{\sqrt{-1}(\nabla - F + G)}\, y^{\varkappa+1}$$

$$+ \eta \frac{\nabla}{\varkappa} e^{\sqrt{-1}(\nabla - F + G)}\, y^{\varkappa} \quad .$$

Eliminirt man $y^{\varkappa}$ mittels der Relation

$$y^{\varkappa} = \omega^2\, e^{-\sqrt{-1}\,G}\,(1 + \varkappa\eta y - \varkappa\eta y^{-1}) \quad ,$$

so erhält man hieraus

$$\frac{\sqrt{-1}}{\mathrm{IT}} S = +\eta \frac{\nabla}{\varkappa} e^{\sqrt{-1}(\nabla - F)}\,\omega^2$$

$$+ \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\nabla}{\varkappa} e^{\sqrt{-1}(\nabla - F)}\,\omega^2 y \quad .$$

Ersetzt man ferner 2φ mit 3Θ und geht zur reelen Form über, so ergiebt sich

$$S = -\eta \frac{\nabla}{\varkappa} \operatorname{Sin}(3\Theta + \mathrm{V})$$

(284)

$$-\frac{1}{1+\varkappa}\frac{\nabla}{\varkappa} \operatorname{Sin}(\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V}) \ .$$

Setzen wir nun, um den vorhin befolgten Vorgang auch fernerhin zu folgen,

(285) $$s = s_0 + s_1 w + s_2 w^2 + \ldots + s_\varphi$$

und lösen wir dementsprechend die Gleichung (281) in das System

(286)
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial s_0}{\partial \varepsilon} &= \left[\operatorname{Sec} i \overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}}\right]_0 \\ \frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon} &= \left[\operatorname{Sec} i \overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}}\right]_1 - \mu \frac{\partial s_0}{\partial \theta_1}(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon) \end{aligned}\right| - \mu(1-w)\frac{\partial s_\varphi}{\partial \theta_1}\overline{W}_1(1 - e \operatorname{Cos} \varepsilon)$$

auf, so können wir erstens die allein von θ_1 abhängigen Glieder auf der rechten Seite zum Verschwinden bringen. Zu diesem Zweck erhalten wir die Relation

$$\mu(1-w)w_1 \frac{\partial s_\varphi}{\partial \theta_1} = \mathrm{RT}\, C_1 \ ,$$

deren rechte Seite die von ε unabhängigen Glieder des Ausdruckes (279) enthält: [1])

$$\mathrm{RT}\, C_1 = c_0 + \mathrm{RT}\left[c e^{\sqrt{-1}\, C} \vartheta_1^3 + \ldots\right]$$

(287)

$$= c_0 - \mathrm{RT}\left[c e^{\sqrt{-1}(C-F)} \omega^2 + \ldots\right] .$$

Mit Rücksicht auf (163) verwandelt sich die Differentialgleichung für s_φ in die folgende:

(288) $$\varkappa \frac{d s_\varphi}{d 2\varphi} = \mathrm{RT}\, C_1 \ ,$$

wozu das Integral

[1]) Den Ausdrücken (202) und (240) analog ist

$$\mathrm{RT}\, C_1 = \mathrm{RT}\left\{ C + \eta(H + G') + \eta(H - G')w \right\} .$$

$$s_\vartheta = \frac{c_0}{\varkappa} 2\varphi + \frac{c}{\varkappa} \operatorname{Sin}(2\varphi + 180^0 + C - F)$$

(289)

$$= c_0 g + \frac{c}{\varkappa} \operatorname{Sin}(3\Theta + C)$$

sich unmittelbar ergiebt.

Schliesslich erhalten wir in mehrerwähnter Weise aus (286)

$$s_0 = -m\varepsilon \operatorname{Cos}\varepsilon - n\varepsilon \operatorname{Sin}\varepsilon$$
$$- n \operatorname{Cos}\varepsilon + m \operatorname{Sin}\varepsilon$$

(290)
$$+ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma D_{0.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} ,$$

$$s_1 = \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \Sigma D_{1.p.q}(n+r.-n+s)\, y^{n+r-(n-s)\mu}\, \vartheta_1^{n-s} ,$$

wobei die Coëfficienten aus den Formeln

(291)
$$D_{0.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{C_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

$$D_{1.p.q}(n+r.-n+s) = \frac{C_{1.p.q}(n+r.-n+s) - c_{0.p.q}(n+r.-n+s)}{n+r-(n-s)\mu}$$

mit dem Nebensysteme [vergl. S. 114]

(292)
$$c_{p.q}(n+r.-n+s) = (n-s)\mu \left\{ \begin{array}{r} D_{p.q}(n+r.-n+s) - D_{p-1.q}(n+r-1.-n+s) \\ - D_{p-1.q}(n+r+1.-n+s) \end{array} \right\}$$

zu berechnen sind. Die numerischen Werte der Coëfficienten sind in der Tafel XXXVII angeführt.

Der vollständige Ausdruck der Störungen der dritten Coordinate setzt sich nach dem Angeführten folgendermassen zusammen:

(293)
$$s = c_0 g - m\varepsilon \operatorname{Cos}\varepsilon - n\varepsilon \operatorname{Sin}\varepsilon$$
$$- n \operatorname{Cos}\varepsilon + m \operatorname{Sin}\varepsilon$$
$$+ t \operatorname{Sin}(3\Theta + 180^0 + T + F)$$
$$- \frac{1}{1+\varkappa} \frac{\mathrm{v}}{\varkappa} \operatorname{Sin}(\varepsilon + 3\Theta + \mathrm{V})$$

$$+\frac{\Pi}{\sqrt{-1}}\Sigma D_{0.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

$$+\frac{\Pi}{\sqrt{-1}}\Sigma D_{1.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w$$

$$+\ .$$

Dabei sind die Hülfsgrössen t und T mittels der Formeln

$$t\,\mathrm{Cos}\,T=\frac{c}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0+C-F)-\eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0+\mathrm{V}-F)$$

(294)

$$t\,\mathrm{Sin}\,T=\frac{c}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0+C-F)-\eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0+\mathrm{V}-F)$$

zu berechnen.

In einer im Jahre 1864 erschienenen Abhandlung[1]), die dem Verf. erst bekannt wurde, nachdem die hier mitgeteilten Resultate fast vollständig fertig vorlagen, hat KLINKERFUES, um die *Störungstafeln* eines Planeten auf ein geringeres Mass zu reduciren, ein rationales Verhältniss der mittleren Bewegungen einzuführen versucht. Ein daselbst von ihm vorübergehend gemachter Vorschlag, auch die *Störungen* von demselben Standpunkte aus zu berechnen, ist nicht zur Ausführung gekommen, befremdet übrigens dadurch, dass ein Teil der Störungsausdrücke, die bei der vorliegenden Behandlung nach dem Vorgange von Herrn H. GYLDÉN durch elliptische Functionen ermittelt worden sind, nach Potenzen der Zeit entwickelt werden sollten. Zu der Idé, ein rationales Verhältniss der mittleren Bewegungen als Ausgangspunkt mit der Behandlung der Aufgabe durch partielle Differentialgleichungen in oben dargelegter Weise zu verbinden, fand sich die Veranlassung durch die neuen Gesichtspunkte, die durch Herrn H. POINCARÉS Inauguraldissertation über partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung eröffnet wurden. Herr POINCARÉ hat ausserdem in seinem Buche, *Les methodes nouvelles de la mécanique céleste* T. I. Paris 1892, die analytischen Grundzüge einer verwandten Integrationsmethode für den Fall der assymptotischen Lösungen aufgestellt.

[1]) Ueber Construction von Störungstafeln für die kleinen Planeten. Abhandl. der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 11, 1864.

TAFELN UND FORMELN.

Bemerkung: Die Tafeln erstrecken sich zu den Störungsgliedern zweiten Grades inclusive und enthalten: allgemeine Zahlencoëfficienten, I—XVIII; die Werte der von μ abhängigen Störungscoefficienten für $\mu = \frac{1}{3}$, XIX ff. Über jeder Tafel sind angeführt: die Bezeichnung der jeweiligen Function, worauf sich die Tafel bezieht, die Argumente der betreffenden Reihenentwicklung und die Nummern der in der vorangehenden Entwicklung abgeleiteten Formeln, die mit jeder Tafel correspondiren. Wo die numerischen Coëfficienten der Tafel noch mit einem Faktor zu multipliciren sind, ist dieser in einer besonderen Columne aufgeführt.

Den Faktor w in dieser Weise anzugeben wurde als unnöthig erachtet, weil diejenigen Coëfficienten, welche durch Multiplication mit der Entwicklungsgrösse w gemäss Abschn. 7 Correctionsglieder ergeben, in besonderen Tafeln zusammengeführt sind. Diese Tafeln sind durch ein an die römische Zahl angehängtes *a*, z. B. XXa, gekennzeichnet.

Der *veränderliche* Teil der Argumente, welche jedem Coëfficienten entsprechen, ist durch die Indices $(n+r.-n+s)$ bestimmt, so dass z. B. [vergl. (68) (86) (109)]

Coëfficient	Faktor	Argument
$Q(n+r.-n+s)$	$y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$	$[n+r-(n-s)\mu]\,\varepsilon+(n-s)\,\theta_1$

zusammen gehören. Sämmtliche Argumente enthalten den *constanten* Teil $n\Delta$; die den Indices $\pm\sigma$, $\pm\delta$, $\pm\pi'$ entsprechenden Argumente ausserdem noch je $\pm\Sigma$, $\pm\Delta$, $\pm\Pi'$, wie das folgende Schema veranschaulicht:

Coëfficient	Faktor	Argument
$Q(n+r.-n+s)$	D^n	$n\Delta$
$Q(n+r.-n+s)_{+\sigma}$	$D^n S$	$n\Delta+\Sigma$
$Q(n+r.-n+s)_{-\sigma}$	$D^n S^{-1}$	$n\Delta-\Sigma$
$Q(n+r.-n+s)_{+\delta}$	$D^n D$	$n\Delta+\Delta$
$Q(n+r.-n+s)_{-\delta}$	$D^n D^{-1}$	$n\Delta-\Delta$
$R(n+r.-n+s)_{+\pi'}$	$D^n P'$	$n\Delta+\Pi'$
$R(n+r.-n+s)_{-\pi'}$	$D^n P'^{-1}$	$n\Delta-\Pi'$

wo der Kürze halber die im Vorigen eingeführten Bezeichnungen

$$\Delta = \Pi - \Pi' \;;\quad \Sigma = \Pi + \Pi'$$

$$D = e^{\sqrt{-1}\,\Delta} \;;\quad S = e^{\sqrt{-1}\,\Sigma} \;;\quad P' = e^{\sqrt{-1}\,\Pi'}$$

angewandt worden sind.

I. $K^m_{p.q}(n+r.-n+s)$; (63)

	m	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^m_{0.0}(n.-n)$	–	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$K^m_{1.0}(n-1.-n)$	–	0	− 2	− 4	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20
$K^m_{0.1}(n.-n+1)$	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3
	5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
	7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
	9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9
	11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11	+11
	13	+13	+13	+13	+13	+13	+13	+13	+13	+13	+13	+13
$K^m_{0.1}(n.-n-1)$	1	+ 1	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21
	3	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23
	5	+ 5	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25
	7	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27
	9	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27	+29
	11	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27	+29	+31
	13	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27	+29	+31	+33
$K^m_{2.0}(n-2.-n)$	–	0	+ 1	+ 6	+15	+28	+45	+66	+91	+120	+153	+190
$K^m_{1.1}(n-1.-n+1)$	1	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20
	3	0	− 6	−12	−18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60
	5	0	−10	−20	−30	− 40	− 50	− 60	− 70	− 80	− 90	−100
	7	0	−14	−28	−42	− 56	− 70	− 84	− 98	−112	−126	−140
	9	0	−18	−36	−54	− 72	− 90	−108	−126	−144	−162	−180
	11	0	−22	−44	−66	− 88	−110	−132	−154	−176	−198	−220
	13	0	−26	−52	−78	−104	−130	−156	−182	−208	−234	−260
$K^m_{1.1}(n-1.-n-1)$	1	0	− 6	−20	− 42	− 72	−110	−156	−210	−272	−342	−420
	3	0	−10	−28	− 54	− 88	−130	−180	−238	−304	−378	−460
	5	0	−14	−36	− 66	−104	−150	−204	−266	−336	−414	−500
	7	0	−18	−44	− 78	−120	−170	−228	−294	−368	−450	−540
	9	0	−22	−52	− 90	−136	−190	−252	−322	−400	−486	−580
	11	0	−26	−60	−102	−152	−210	−276	−350	−432	−522	−620
	13	0	−30	−68	−114	−168	−230	−300	−378	−464	−558	−660
$K^m_{0.2}(n.-n+2)$	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	3	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
	5	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15
	7	+28	+28	+28	+28	+28	+28	+28	+28	+28	+28	+28
	9	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45	+45
	11	+66	+66	+66	+66	+66	+66	+66	+66	+66	+66	+66
	13	+91	+91	+91	+91	+91	+91	+91	+91	+91	+91	+91

	m	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^m_{0.2}(n.-n)$	1	+ 1	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21
	3	+ 9	+ 15	+ 21	+ 27	+ 33	+ 39	+ 45	+ 51	+ 57	+ 63	+ 69
	5	+ 25	+ 35	+ 45	+ 55	+ 65	+ 75	+ 85	+ 95	+ 105	+ 115	+ 125
	7	+ 49	+ 63	+ 77	+ 91	+ 105	+ 119	+ 133	+ 147	+ 161	+ 175	+ 189
	9	+ 81	+ 99	+ 117	+ 135	+ 153	+ 171	+ 189	+ 207	+ 225	+ 243	+ 261
	11	+ 121	+ 143	+ 165	+ 187	+ 209	+ 231	+ 253	+ 275	+ 297	+ 319	+ 341
	13	+ 169	+ 195	+ 221	+ 247	+ 273	+ 299	+ 325	+ 351	+ 377	+ 403	+ 429
$K^m_{0.2}(n.-n-2)$	1	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231
	3	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276
	5	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325
	7	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325	+ 378
	9	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325	+ 378	+ 435
	11	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325	+ 378	+ 435	+ 496
	13	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325	+ 378	+ 435	+ 496	+ 561

II. $K^{s.i}_{p.q}(n+r.-n+s)$; (64)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^{1.i}_{0.0}(n.-n)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$K^{1.i}_{1.0}(n+1.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2
	2	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4
	3	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6
$K^{1.i}_{1.0}(n-1.-n)$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22
	2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24
	3	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	− 26
$K^{1.i}_{0.1}(n.-n+1)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3
	2	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
	3	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
$K^{1.i}_{0.1}(n.-n-1)$	0	+ 1	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21
	1	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23
	2	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	+ 25
	3	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	+ 25	+ 27

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^{1.i}_{2.0}(n+2.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	2	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
	3	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15
$*K^{1.i}_{2.0}(n.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	+ 4	+ 8	+12	+16	+20	+24	+ 28	+ 32	+ 36	+ 40	+ 44
	2	+16	+24	+32	+40	+48	+56	+ 64	+ 72	+ 80	+ 88	+ 96
	3	+36	+48	+60	+72	+84	+96	+108	+120	+132	+144	+156
$K^{1.i}_{2.0}(n-2.-n)$	0	0	+ 1	+ 6	+15	+28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190
	1	+ 1	+ 6	+15	+28	+45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231
	2	+ 6	+15	+28	+45	+66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276
	3	+15	+28	+45	+66	+91	+120	+153	+190	+231	+276	+325
$K^{1.i}_{1.1}(n+1.-n+1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6
	2	−20	−20	−20	−20	−20	− 20	− 20	− 20	− 20	− 20	− 20
	3	−42	−42	−42	−42	−42	− 42	− 42	− 42	− 42	− 42	− 42
$K^{1.i}_{1.1}(n-1.-n+1)$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20
	1	− 6	−12	−18	−24	−30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66
	2	−20	−30	−40	−50	−60	− 70	− 80	− 90	−100	−110	−120
	3	−42	−56	−70	−84	−98	−112	−126	−140	−154	−168	−182
$K^{1.i}_{1.1}(n+1.-n-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	− 6	−10	−14	−18	−22	− 26	− 30	− 34	− 38	− 42	− 46
	2	−20	−28	−36	−44	−52	− 60	− 68	− 76	− 84	− 92	−100
	3	−42	−54	−66	−78	−90	−102	−114	−126	−138	−150	−162
$K^{1.i}_{1.1}(n-1.-n-1)$	0	0	− 6	− 20	− 42	− 72	−110	−156	−210	−272	−342	−420
	1	− 6	−20	− 42	− 72	−110	−156	−210	−272	−342	−420	−506
	2	−20	−42	− 72	−110	−156	−210	−272	−342	−420	−506	−600
	3	−42	−72	−110	−156	−210	−272	−342	−420	−506	−600	−702
$K^{1.i}_{0.2}(n.-n+2)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	1	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
	2	+15	+15	+15	+15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15
	3	+28	+28	+28	+28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28
$*K^{1.i}_{0.2}(n.-n)$	0	+ 1	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21
	1	+ 9	+15	+21	+27	+ 33	+ 39	+ 45	+ 51	+ 57	+ 63	+ 69
	2	+25	+35	+45	+55	+ 65	+ 75	+ 85	+ 95	+105	+115	+125
	3	+49	+63	+77	+91	+105	+119	+133	+147	+161	+175	+189
$K^{1.i}_{0.2}(n.-n-2)$	0	+ 1	+ 6	+15	+28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231
	1	+ 6	+15	+28	+45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276
	2	+15	+28	+45	+66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	+325
	3	+28	+45	+66	+91	+120	+153	+190	+231	+276	+325	+378

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^{3.i}_{0.0}(n.-n)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$K^{3.i}_{1.0}(n+1.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2
	2	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4
	3	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6
$K^{3.i}_{1.0}(n-1.-n)$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20	−22
	2	− 4	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20	−22	−24
	3	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20	−22	−24	−26
$K^{3.i}_{0.1}(n.-n+1)$	0	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3
	1	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5
	2	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7
	3	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9
$K^{3.i}_{0.1}(n.-n-1)$	0	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23
	1	+ 5	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25
	2	+ 7	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27
	3	+ 9	+11	+13	+15	+17	+19	+21	+23	+25	+27	+29
$K^{3.i}_{2.0}(n+2.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	2	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
	3	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15	+15
$*K^{3.i}_{2.0}(n.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	+ 4	+ 8	+ 12	+ 16	+ 20	+ 24	+ 28	+ 32	+ 36	+ 40	+ 44
	2	+16	+24	+32	+40	+48	+56	+64	+72	+80	+88	+96
	3	+36	+48	+60	+72	+84	+96	+108	+120	+132	+144	+156
$K^{3.i}_{2.0}(n-2.-n)$	0	0	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190
	1	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231
	2	+ 6	+15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276
	3	+15	+28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	+325
$K^{3.i}_{1.1}(n+1.-n+1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	−10	−10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10
	2	−28	−28	− 28	− 28	− 28	− 28	− 28	− 28	− 28	− 28	− 28
	3	−54	−54	− 54	− 54	− 54	− 54	− 54	− 54	− 54	− 54	− 54
$K^{3.i}_{1.1}(n-1.-n+1)$	0	0	− 6	− 12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60
	1	−10	−20	− 30	− 40	− 50	− 60	− 70	− 80	− 90	−100	−110
	2	−28	−42	− 56	− 70	− 84	− 98	−112	−126	−140	−154	−168
	3	−54	−72	− 90	−108	−126	−144	−162	−180	−198	−216	−234

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^{3.i}_{1.1}(n+1.-n-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	−10	−14	− 18	− 22	− 26	− 30	− 34	− 38	− 42	− 46	− 50
	2	−28	−36	− 44	− 52	− 60	− 68	− 76	− 84	− 92	−100	−108
	3	−54	−66	− 78	− 90	−102	−114	−126	−138	−150	−162	−174
$K^{3.i}_{1.1}(n-1.-n-1)$	0	0	−10	− 28	− 54	− 88	−130	−180	−238	−304	−378	−460
	1	−10	−28	− 54	− 88	−130	−180	−238	−304	−378	−460	−550
	2	−28	−54	− 88	−130	−180	−238	−304	−378	−460	−550	−648
	3	−54	−88	−130	−180	−238	−304	−378	−460	−550	−648	−754
$K^{3.i}_{0.2}(n.-n+2)$	0	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
	1	+15	+15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15
	2	+28	+28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28	+ 28
	3	+45	+45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45	+ 45
$*K^{3.i}_{0.2}(n.-n)$	0	+ 9	+15	+ 21	+ 27	+ 33	+ 39	+ 45	+ 51	+ 57	+ 63	+ 69
	1	+25	+35	+ 45	+ 55	+ 65	+ 75	+ 85	+ 95	+105	+115	+125
	2	+49	+63	+ 77	+ 91	+105	+119	+133	+147	+161	+175	+189
	3	+81	+99	+117	+135	+153	+171	+189	+207	+225	+243	+261
$K^{3.i}_{0.2}(n.-n-2)$	0	+ 6	+15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276
	1	+15	+28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	+325
	2	+28	+45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	+325	+378
	3	+45	+66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	+325	+378	+435

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K^{5.i}_{0.0}(n.-n)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1

III. $\overline{K}^{s.i}_{p.q}(n+r.-n+s)$; (68) (71).

$\overline{K}^{s.i}_{p.q}(n+r.-n+s) = K^{s.i}_{p.q}(n+r.-n+s)$ [1])

mit Ausnahme von:

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{K}^{1.i}_{2.0}(n.-n)$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10
	1	+ 2	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32
	2	+12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82
	3	+30	+ 41	+ 52	+ 63	+ 74	+ 85	+ 96	+107	+118	+129	+140
$\overline{K}^{1.i}_{0.2}(n.-n)$	0	+ 2	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32
	1	+12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82
	2	+30	+ 41	+ 52	+ 63	+ 74	+ 85	+ 96	+107	+118	+129	+140
	3	+56	+ 71	+ 86	+101	+116	+131	+146	+161	+176	+191	+206

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{K}^{3.i}_{2.0}(n.-n)$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10
	1	+ 2	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32
	2	+12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82
	3	+30	+ 41	+ 52	+ 63	+ 74	+ 85	+ 96	+107	+118	+129	+140
$\overline{K}^{3.i}_{0.2}(n.-n)$	0	+12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82
	1	+30	+ 41	+ 52	+ 63	+ 74	+ 85	+ 96	+107	+118	+129	+140
	2	+56	+ 71	+ 86	+101	+116	+131	+146	+161	+176	+191	+206
	3	+90	+109	+128	+147	+166	+185	+204	+223	+242	+261	+280

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
$\overline{K}^{1.i}_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
$\overline{K}^{3.i}_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$\overline{K}^{3.i}_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
$\overline{K}^{2.i}_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1
$\overline{K}^{3.i}_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1

[1]) Diejenigen Coëfficienten K in der Tafel II, für welche diese Relation nicht gilt und welche bei dem Übergang zu den $\overline{K}$ mit den Zahlen aus Tafel III zu ersetzen sind, sind in der Tafel II mit einem Stern besonders angemerkt.

IV. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\varepsilon')$; (75)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$P^i_{0.0}(n.-n)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	$2\Gamma_i^{1,n}$
	1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
	2	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
	3	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
$P^i_{1.0}(n+1.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	
	2	− 4	− 8	− 12	− 16	− 20	− 24	− 28	− 32	− 36	− 40	− 44	
	3	− 6	−12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	
$P^i_{1.0}(n-1.-n)$	0	0	0	− 4	− 12	− 24	− 40	− 60	− 84	− 112	− 144	− 180	»
	1	+ 2	0	− 6	− 16	− 30	− 48	− 70	− 96	− 126	− 160	− 198	
	2	+ 4	0	− 8	− 20	− 36	− 56	− 80	−108	− 140	− 176	− 216	
	3	+ 6	0	− 10	− 24	− 42	− 64	− 90	−120	− 154	− 192	− 234	
$P^i_{0.1}(n.-n+1)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	»
	1	0	+ 3	+ 6	+ 9	+ 12	+ 15	+ 18	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	
	2	0	+ 5	+ 10	+ 15	+ 20	+ 25	+ 30	+ 35	+ 40	+ 45	+ 50	
	3	0	+ 7	+ 14	+ 21	+ 28	+ 35	+ 42	+ 49	+ 56	+ 63	+ 70	
$P^i_{0.1}(n.-n-1)$	0	0	+ 3	+ 10	+ 21	+ 36	+ 55	+ 78	+105	+ 136	+ 171	+ 219	»
	1	0	+ 5	+ 14	+ 27	+ 44	+ 65	+ 90	+119	+ 152	+ 189	+ 230	
	2	0	+ 7	+ 18	+ 33	+ 52	+ 75	+102	+133	+ 168	+ 207	+ 250	
	3	0	+ 9	+ 22	+ 39	+ 60	+ 85	+114	+147	+ 184	+ 225	+ 270	
$P^i_{2.0}(n+2.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	
	2	+12	+18	+ 24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	+ 66	+ 72	
	3	+30	+45	+ 60	+ 75	+ 90	+105	+120	+135	+ 150	+ 165	+ 180	
$P^i_{2.0}(n.-n)$	0	0	− 1	− 4	− 9	− 16	− 25	− 36	− 49	− 64	− 81	− 100	»
	1	0	+ 5	+ 16	+ 33	+ 56	+ 85	+120	+161	+ 208	+ 261	+ 320	
	2	0	+19	+ 52	+ 99	+160	+235	+324	+427	+ 544	+ 675	+ 820	
	3	0	+41	+104	+189	+296	+425	+576	+749	+ 944	+1161	+1400	
$P^i_{2.0}(n-2.-n)$	0	− 0	− 1	0	+ 15	+ 56	+135	+264	+455	+ 720	+1071	+1520	»
	1	− 2	− 6	0	+ 28	+ 90	+198	+364	+600	+ 918	+1330	+1848	
	2	−12	−15	0	+ 45	+132	+273	+480	+765	+1140	+1617	+2208	
	3	−30	−28	0	+ 66	+182	+360	+612	+950	+1386	+1932	+2600	
$P^i_{1.1}(n+1.-n+1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 6	−12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	
	2	−20	−40	− 60	− 80	−100	−120	−140	−160	− 180	− 200	− 220	
	3	−42	−84	−126	−168	−210	−252	−294	−336	− 378	− 420	− 462	
$P^i_{1.1}(n-1.-n+1)$	0	0	0	− 4	− 12	− 24	− 40	− 60	− 84	− 112	− 144	− 180	»
	1	+ 6	0	− 18	− 48	− 90	−144	−210	−288	− 378	− 480	− 594	
	2	+20	0	− 40	−100	−180	−280	−400	−540	− 700	− 880	−1080	
	3	+42	0	− 70	−168	−294	−448	−630	−840	−1078	−1344	−1638	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$P^i_{1.1}(n+1.-n-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	− 6	− 20	− 42	− 72	−110	− 156	− 210	− 272	− 342	− 420	− 506	
	2	−20	− 56	−108	−176	−260	− 360	− 476	− 608	− 756	− 920	−1100	
	3	−42	−108	−198	−312	−450	− 612	− 798	−1008	−1242	−1500	−1782	
$P^i_{1.1}(n-1.-n-1)$	0	0	0	− 20	− 84	−216	− 440	− 780	−1260	−1904	−2736	−3780	»
	1	+ 6	0	− 42	−144	−330	− 624	−1050	−1632	−2394	−3360	−4554	
	2	+20	0	− 72	−220	−468	− 840	−1360	−2052	−2940	−4048	−5400	
	3	+42	0	−110	−312	−630	−1088	−1710	−2520	−3542	−4800	−6318	
$P^i_{0.2}(n.-n+2)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	»
	1	0	+ 6	+ 12	+ 18	+ 24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	
	2	0	+ 15	+ 30	+ 45	+ 60	+ 75	+ 90	+ 105	+ 120	+ 135	+ 150	
	3	0	+ 28	+ 56	+ 84	+112	+ 140	+ 168	+ 196	+ 224	+ 252	+ 280	
$P^i_{0.2}(n.-n)$	0	0	+ 5	+ 16	+ 33	+ 56	+ 85	+ 120	+ 161	+ 208	+ 261	+ 320	»
	1	0	+ 19	+ 52	+ 99	+160	+ 235	+ 324	+ 427	+ 544	+ 675	+ 820	
	2	0	+ 41	+104	+189	+296	+ 425	+ 576	+ 749	+ 944	+1161	+1400	
	3	0	+ 71	+172	+303	+464	+ 655	+ 876	+1127	+1408	+1719	+2060	
$P^i_{0.2}(n.-n-2)$	0	0	+ 6	+ 30	+ 84	+180	+ 330	+ 546	+ 840	+1224	+1710	+2310	»
	1	0	+ 15	+ 56	+135	+264	+ 455	+ 720	+1071	+1520	+2079	+2760	
	2	0	+ 28	+ 90	+198	+364	+ 600	+ 918	+1330	+1848	+2484	+3250	
	3	0	+ 45	+132	+273	+480	+ 765	+1140	+1617	+2208	+2925	+3780	
$P^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	$\frac{1}{2\alpha} 2\Gamma_i^{3.n}$
	1	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
	2	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
	3	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
$P^i_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	0	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	»
	1	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
	2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
	3	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
$P^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	»
	1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
	2	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
	3	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
$P^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	0	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	»
	1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	
	2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	
	3	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	

V. $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon,\varepsilon')$; (77)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$Q^i_{0.0}(n.-n)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	
	2	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	
	3	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	
$Q^i_{1.0}(n+1.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 4	− 6	− 8	−10	−12	−14	−16	−18	−20	−22	−24	
	2	−16	−20	−24	−28	−32	−36	−40	−44	−48	−52	−56	
	3	−36	−42	−48	−54	−60	−66	−72	−78	−84	−90	−96	
$Q^i_{1.0}(n-1.-n)$	0	0	− 2	− 8	− 18	− 32	− 50	− 72	− 98	−128	−162	−200	»
	1	− 4	−12	−24	− 40	− 60	− 84	−112	−144	−180	−220	−264	
	2	−16	−30	−48	− 70	− 96	−126	−160	−198	−240	−286	−336	
	3	−36	−56	−80	−108	−140	−176	−216	−260	−308	−360	−416	
$Q^i_{0.1}(n.-n+1)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	»
	1	+ 6	+ 9	+12	+ 15	+ 18	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	+ 33	+ 36	
	2	+20	+25	+30	+ 35	+ 40	+ 45	+ 50	+ 55	+ 60	+ 65	+ 70	
	3	+42	+49	+56	+ 63	+ 70	+ 77	+ 84	+ 91	+ 98	+105	+112	
$Q^i_{0.1}(n.-n-1)$	0	0	+ 3	+10	+ 21	+ 36	+ 55	+ 78	+105	+136	+171	+210	»
	1	+ 6	+15	+28	+ 45	+ 66	+ 91	+120	+153	+190	+231	+276	
	2	+20	+35	+54	+ 77	+104	+135	+170	+209	+252	+299	+350	
	3	+42	+63	+88	+117	+150	+187	+228	+273	+322	+375	+432	
$Q^i_{2.0}(n+2.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	
	2	+24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	+ 66	+ 72	+ 78	+ 84	
	3	+90	+105	+120	+135	+150	+165	+180	+195	+210	+225	+240	
$Q^i_{2.}(n.-n)$	0	0	− 1	− 4	− 9	− 16	− 25	− 36	− 49	− 64	− 81	− 100	»
	1	+ 4	+ 15	+ 32	+ 55	+ 84	+119	+ 160	+ 207	+ 260	+ 319	+ 384	
	2	+ 48	+ 95	+156	+231	+320	+423	+ 540	+ 671	+ 816	+ 975	+1148	
	3	+180	+287	+416	+567	+740	+935	+1152	+1391	+1652	+1935	+2240	
$Q^i_{2.0}(n-2.-n)$	0	0	+ 1	+ 12	+ 45	+112	+ 225	+ 396	+ 637	+ 960	+1377	+1900	»
	1	+ 2	+ 18	+ 60	+140	+270	+ 462	+ 728	+1080	+1530	+2090	+2772	
	2	+ 24	+ 75	+168	+315	+528	+ 819	+1200	+1683	+2280	+3003	+3864	
	3	+ 90	+196	+360	+594	+910	+1320	+1836	+2470	+3234	+4140	+5200	
$Q^i_{1.1}(n+1.-n+1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	− 72	
	2	− 80	−100	−120	−140	−160	− 180	− 200	− 220	− 240	− 260	− 280	
	3	−252	−294	−336	−378	−420	− 462	− 504	− 546	− 588	− 630	− 672	
$Q^i_{1.1}(n-1.-n+1)$	0	0	− 2	− 8	− 18	− 32	− 50	− 72	− 98	− 128	− 162	− 200	»
	1	− 12	− 36	− 72	−120	−180	− 252	− 336	− 432	− 540	− 660	− 792	
	2	− 80	−150	−240	−350	−480	− 630	− 800	− 990	−1200	−1430	−1680	
	3	−252	−392	−560	−756	−980	−1232	−1512	−1820	−2156	−2520	−2912	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$Q^i_{1.1}(n+1.-n-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\Gamma_i^{1\,n}$
	1	− 12	− 30	− 56	− 90	− 132	− 182	− 240	− 306	− 380	− 462	− 552	
	2	− 80	− 140	− 216	− 308	− 416	− 540	− 680	− 836	− 1008	− 1196	− 1400	
	3	− 252	− 378	− 528	− 702	− 900	− 1122	− 1368	− 1638	− 1932	− 2250	− 2592	
$Q^i_{1.1}(n-1.-n-1)$	0	0	− 6	− 40	− 126	− 288	− 550	− 936	− 1470	− 2176	− 3078	− 4200	»
	1	− 12	− 60	− 168	− 360	− 660	− 1092	− 1680	− 2448	− 3420	− 4620	− 6072	
	2	− 80	− 210	− 432	− 770	− 1248	− 1890	− 2720	− 3762	− 5040	− 6578	− 8400	
	3	− 252	− 504	− 880	− 1404	− 2100	− 2992	− 4104	− 5460	− 7084	− 9000	− 11232	
$Q^i_{0.2}(n.-n+2)$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	»
	1	+ 12	+ 18	+ 24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	+ 66	+ 72	
	2	+ 60	+ 75	+ 90	+ 105	+ 120	+ 135	+ 150	+ 165	+ 180	+ 195	+ 210	
	3	+ 168	+ 196	+ 224	+ 252	+ 280	+ 308	+ 336	+ 364	+ 392	+ 420	+ 448	
$Q^i_{0.2}(n.-n)$	0	0	+ 5	+ 16	+ 33	+ 56	+ 85	+ 120	+ 161	+ 208	+ 261	+ 320	»
	1	+ 24	+ 57	+ 104	+ 165	+ 240	+ 329	+ 432	+ 549	+ 680	+ 825	+ 984	
	2	+ 120	+ 205	+ 312	+ 441	+ 592	+ 765	+ 960	+ 1177	+ 1416	+ 1677	+ 1960	
	3	+ 336	+ 497	+ 688	+ 909	+ 1160	+ 1441	+ 1752	+ 2093	+ 2464	+ 2865	+ 3296	
$Q^i_{0.2}(n.-n-2)$	0	0	+ 6	+ 30	+ 84	+ 180	+ 330	+ 546	+ 840	+ 1224	+ 1710	+ 2310	»
	1	+ 12	+ 45	+ 112	+ 225	+ 396	+ 637	+ 960	+ 1377	+ 1900	+ 2541	+ 3312	
	2	+ 60	+ 140	+ 270	+ 462	+ 728	+ 1080	+ 1530	+ 2090	+ 2772	+ 3588	+ 4550	
	3	+ 168	+ 315	+ 528	+ 819	+ 1200	+ 1683	+ 2280	+ 3003	+ 3864	+ 4875	+ 6048	
$Q^i_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	$\frac{1}{2\alpha} 2\Gamma_i^{3.n}$
	1	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	
	2	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	
	3	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	+ 16	+ 17	
$Q^i_{0\,0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	»
	1	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	
	2	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	
	3	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	+ 16	+ 17	
$Q^i_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	»
	1	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	
	2	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	− 14	− 15	
	3	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	− 14	− 15	− 16	− 17	
$Q^i_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	»
	1	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	
	2	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	− 14	− 15	
	3	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	− 12	− 13	− 14	− 15	− 16	− 17	

VI. $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}(\varepsilon, \varepsilon')$; (82)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$R^i_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	$\frac{1}{2\alpha} 2\Gamma_i^{3\cdot n}$
	1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
	2	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
	3	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
$R^i_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	»
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
$R^i_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
	3	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	
$R^i_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	0	0	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	»
	1	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	
	2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	+ 24	
	3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	+ 24	+ 26	
$R^i_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
	2	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	
	3	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	
$R^i_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	»
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	
	2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	
	3	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	− 26	
$R^i_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	0	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	»
	1	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	− 5	
	2	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	− 7	
	3	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	− 9	
$R^i_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	0	− 1	− 3	− 5	− 7	− 9	− 11	− 13	− 15	− 17	− 19	− 21	»
	1	− 3	− 5	− 7	− 9	− 11	− 13	− 15	− 17	− 19	− 21	− 23	
	2	− 5	− 7	− 9	− 11	− 13	− 15	− 17	− 19	− 21	− 23	− 25	
	3	− 7	− 9	− 11	− 13	− 15	− 17	− 19	− 21	− 23	− 25	− 27	
$R^i_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	»
	1	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	
	2	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	+ 5	
	3	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	+ 7	
$R^i_{0\,1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	0	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	»
	1	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	+ 25	
	2	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	+ 25	+ 27	
	3	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	+ 25	+ 27	+ 29	

VII. $a\Omega(\varepsilon, g')$; (86)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^i_{0.0}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
$O^i_{1.0}\,\vert\, n+1.-n\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
	2	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	
	3	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	
$O^i_{1.0}\,\vert\, n-1.-n\,\vert$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	»
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	
	2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	
	3	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	− 26	
$O^i_{0.1}\,\vert\, n.-n+1\,\vert$	0	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	»
	1	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	
	2	+ 5	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	
	3	+ 7	+ 6	+ 5	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	
$O^i_{0.1}\,\vert\, n.-n-1\,\vert$	0	+ 1	+ 4	+ 7	+ 10	+ 13	+ 16	+ 19	+ 22	+ 25	+ 28	+ 31	»
	1	+ 3	+ 6	+ 9	+ 12	+ 15	+ 18	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	+ 33	
	2	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32	+ 35	
	3	+ 7	+ 10	+ 13	+ 16	+ 19	+ 22	+ 25	+ 28	+ 31	+ 34	+ 37	
$O^i_{2.0}\,\vert\, n+2.-n\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	
	3	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	+ 15	
$O^i_{2.0}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	»
	1	+ 2	+ 5	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32	
	2	+ 12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82	
	3	+ 30	+ 41	+ 52	+ 63	+ 74	+ 85	+ 96	+ 107	+ 118	+ 129	+ 140	
$O^i_{2.0}\,\vert\, n-2.-n\,\vert$	0	0	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	»
	1	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	
	2	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	
	3	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	+ 325	
$O^i_{1.1}\,\vert\, n+1.-n+1\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 6	− 4	− 2	0	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	
	2	− 20	− 16	− 12	− 8	− 4	0	+ 4	+ 8	+ 12	+ 16	+ 20	
	3	− 42	− 36	− 30	− 24	− 18	− 12	− 6	0	+ 6	+ 12	+ 18	
$O^i_{1.1}\,\vert\, n-1.-n+1\,\vert$	0	0	0	+ 4	+ 12	+ 24	+ 40	+ 60	+ 84	+ 112	+ 144	+ 180	»
	1	− 6	− 8	− 6	0	+ 10	+ 24	+ 42	+ 64	+ 90	+ 120	+ 154	
	2	− 20	− 24	− 24	− 20	− 12	0	+ 16	+ 36	+ 60	+ 88	+ 120	
	3	− 42	− 48	− 50	− 48	− 42	− 32	− 18	0	+ 22	+ 48	+ 78	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^i_{1.1}\,\vert\, n+1.-n-1\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\,\Gamma_i^{1.n}$
	1	− 6	−12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	
	2	−20	−32	− 44	− 56	− 68	− 80	− 92	−104	−116	−128	−140	
	3	−42	−60	− 78	− 96	−114	−132	−150	−168	−186	−204	−222	
$O^i_{1.1}\,\vert\, n-1.-n-1\,\vert$	0	0	− 8	− 28	− 60	−104	−160	−228	−308	−400	−504	−620	»
	1	− 6	−24	− 54	− 96	−150	−216	−294	−384	−486	−600	−726	
	2	−20	−48	− 88	−140	−204	−280	−368	−468	−580	−704	−840	
	3	−42	−80	−130	−192	−266	−352	−450	−560	−682	−816	−962	
$O^i_{0.2}\,\vert\, n.-n+2\,\vert$	0	+ 2	+ 0.5	0	+ 0.5	+ 2	+ 4.5	+ 8	+ 12.5	+ 18	+ 24.5	+ 32	»
	1	+ 9	+ 5.5	+ 3	+ 1.5	+ 1	+ 1.5	+ 3	+ 5.5	+ 9	+ 13.5	+ 19	
	2	+20	+14.5	+ 10	+ 6.5	+ 4	+ 2.5	+ 2	+ 2.5	+ 4	+ 6.5	+ 10	
	3	+35	+27.5	+ 21	+ 15.5	+ 11	+ 7.5	+ 5	+ 3.5	+ 3	+ 3.5	+ 5	
$O^i_{0.2}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	0	− 2	− 10	− 24	− 44	− 70	−102	−140	−184	−234	−290	»
	1	+ 6	+ 8	+ 4	− 6	− 22	− 44	− 72	−106	−146	−192	−244	
	2	+20	+26	+ 26	+ 20	+ 8	− 10	− 34	− 64	−100	−142	−190	
	3	+42	+52	+ 56	+ 54	+ 46	+ 32	+ 12	− 14	− 46	− 84	−128	
$O^i_{0.2}\,\vert\, n.-n-2\,\vert$	0	+ 2	+13.5	+ 34	+ 63.5	+102	+149.5	+206	+271.5	+346	+429.5	+522	»
	1	+ 9	+26.5	+ 53	+ 88.5	+133	+186.5	+249	+320.5	+401	+490.5	+589	
	2	+20	+43.5	+ 76	+117.5	+168	+227.5	+296	+373.5	+460	+555.5	+660	
	3	+35	+64.5	+103	+150.5	+207	+272.5	+347	+430.5	+523	+624.5	+735	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^i_{0.0}\,\vert\, n+1.-n+1\,\vert_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$\frac{1}{2\alpha}\,2\,\Gamma_i^{3.n}$
$O^i_{0.0}\,\vert\, n-1.-n-1\,\vert_{-\sigma}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	»
$O^i_{0.0}\,\vert\, n+1.-n-1\,\vert_{+\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	»
$O^i_{0.0}\,\vert\, n-1.-n+1\,\vert_{-\delta}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	»

VIII. $$-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, g'); \quad (86)$$

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$P^i_{0.0}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	$2\,\Gamma_i^{1.n}$
	1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
	2	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
	3	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	
$P^i_{1.0}\,\vert\, n+1.-n\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	
	2	− 4	− 8	− 12	− 16	− 20	− 24	− 28	− 32	− 36	− 40	− 44	
	3	− 6	− 12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	
$P^i_{1.0}\,\vert\, n-1.-n\,\vert$	0	0	0	− 4	− 12	− 24	− 40	− 60	− 84	− 112	− 144	− 180	»
	1	+ 2	0	− 6	− 16	− 30	− 48	− 70	− 96	− 126	− 160	− 198	
	2	+ 4	0	− 8	− 20	− 36	− 56	− 80	− 108	− 140	− 176	− 216	
	3	+ 6	0	− 10	− 24	− 42	− 64	− 90	− 120	− 154	− 192	− 234	
$P^i_{0.1}\,\vert\, n.-n+1\,\vert$	0	0	0	− 2	− 6	− 12	− 20	− 30	− 42	− 56	− 72	− 90	»
	1	0	+ 2	+ 2	0	− 4	− 10	− 18	− 28	− 40	− 54	− 70	
	2	0	+ 4	+ 6	+ 6	+ 4	0	− 6	− 14	− 24	− 36	− 50	
	3	0	+ 6	+ 10	+ 12	+ 12	+ 10	+ 6	0	− 8	− 18	− 30	
$P^i_{0.1}\,\vert\, n.-n-1\,\vert$	0	0	+ 4	+ 14	+ 30	+ 52	+ 80	+ 114	+ 154	+ 200	+ 252	+ 310	»
	1	0	+ 6	+ 18	+ 36	+ 60	+ 90	+ 126	+ 168	+ 216	+ 270	+ 330	
	2	0	+ 8	+ 22	+ 42	+ 68	+ 100	+ 138	+ 182	+ 232	+ 288	+ 350	
	3	0	+ 10	+ 26	+ 48	+ 76	+ 110	+ 150	+ 196	+ 248	+ 306	+ 370	
$P^i_{2.0}\,\vert\, n+2.-n\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	
	2	+ 12	+ 18	+ 24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	+ 66	+ 72	
	3	+ 30	+ 45	+ 60	+ 75	+ 90	+ 105	+ 120	+ 135	+ 150	+ 165	+ 180	
$P^i_{2.0}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	0	− 1	− 4	− 9	− 16	− 25	− 36	− 49	− 64	− 81	− 100	»
	1	0	+ 5	+ 16	+ 33	+ 56	+ 85	+ 120	+ 161	+ 208	+ 261	+ 320	
	2	0	+ 19	+ 52	+ 99	+ 160	+ 235	+ 324	+ 427	+ 544	+ 675	+ 820	
	3	0	+ 41	+ 104	+ 189	+ 296	+ 425	+ 576	+ 749	+ 944	+ 1161	+ 1400	
$P^i_{2.0}\,\vert\, n-2.-n\,\vert$	0	0	− 1	0	+ 15	+ 56	+ 135	+ 264	+ 455	+ 720	+ 1071	+ 1520	»
	1	− 2	− 6	0	+ 28	+ 90	+ 198	+ 364	+ 600	+ 918	+ 1330	+ 1848	
	2	− 12	− 15	0	+ 45	+ 132	+ 273	+ 480	+ 765	+ 1140	+ 1617	+ 2208	
	3	− 30	− 28	0	+ 66	+ 182	+ 360	+ 612	+ 950	+ 1386	+ 1932	+ 2600	
$P^i_{1.1}\,\vert\, n+1.-n+1\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 6	− 8	− 6	0	+ 10	+ 24	+ 42	+ 64	+ 90	+ 120	+ 154	
	2	− 20	− 32	− 36	− 32	− 20	0	+ 28	+ 64	+ 108	+ 160	+ 220	
	3	− 42	− 72	− 90	− 96	− 90	− 72	− 42	0	+ 54	+ 120	+ 198	
$P^i_{1.1}\,\vert\, n-1.-n+1\,\vert$	0	0	0	+ 4	+ 24	+ 72	+ 160	+ 300	+ 504	+ 784	+ 1152	+ 1620	»
	1	+ 6	0	− 6	0	+ 30	+ 96	+ 210	+ 384	+ 630	+ 960	+ 1386	
	2	+ 20	0	− 24	− 40	− 36	0	+ 80	+ 216	+ 420	+ 704	+ 1080	
	3	+ 42	0	− 50	− 96	− 126	− 128	− 90	0	+ 154	+ 384	+ 702	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$P^i_{1.1}\,\vert\, n+1.-n-1\,\vert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	− 6	− 24	− 54	− 96	−150	− 216	− 294	− 384	− 486	− 600	− 726	
	2	−20	− 64	−132	−224	−340	− 480	− 644	− 832	−1044	−1280	−1540	
	3	−42	−120	−234	−384	−570	− 792	−1050	−1344	−1674	−2040	−2442	
$P^i_{1.1}\,\vert\, n-1.-n-1\,\vert$	0	0	0	− 28	−120	−312	− 640	−1140	−1848	−2800	−4032	−5580	»
	1	+ 6	0	− 54	−192	−450	− 864	−1470	−2304	−3402	−4800	−6534	
	2	+20	0	− 88	−280	−612	−1120	−1840	−2808	−4060	−5632	−7560	
	3	+42	0	−130	−384	−798	−1408	−2250	−3360	−4774	−6528	−8658	
$P^i_{0.2}\,\vert\, n.-n+2\,\vert$	0	0	+ 0.5	0	+ 1.5	+ 8	+ 22.5	+ 48	+ 87.5	+ 144	+ 220 5	+ 320	»
	1	0	+ 5.5	+ 6	+ 4 5	+ 4	+ 7.5	+ 18	+ 38.5	+ 72	+ 121.5	+ 190	
	2	0	+14.5	+ 20	+ 19.5	+ 16	+ 12 5	+ 12	+ 17.5	+ 32	+ 58.5	+ 100	
	3	0	+27.5	+ 42	+ 46.5	+ 44	+ 37.5	+ 30	+ 24.5	+ 24	+ 31.5	+ 50	
$P^i_{0.2}\,\vert\, n.-n\,\vert$	0	0	− 2	− 20	− 72	−176	− 350	− 612	− 980	−1472	−2106	−2900	»
	1	0	+ 8	+ 8	− 18	− 88	− 220	− 432	− 742	−1168	−1728	−2440	
	2	0	+26	+ 52	+ 60	+ 32	− 50	− 204	− 448	− 800	−1278	−1900	
	3	0	+52	+112	+162	+184	+ 160	+ 72	− 98	− 368	− 756	−1280	
$P^i_{0.2}\,\vert\, n.-n-2\,\vert$	0	0	+13.5	+ 68	+190.5	+408	+ 747.5	+1236	+1900.5	+2768	+3865.5	+5220	»
	1	0	+26.5	+106	+265.5	+532	+ 932.5	+1494	+2243.5	+3208	+4414.5	+5890	
	2	0	+43.5	+152	+352.5	+672	+1137.5	+1776	+2614.5	+3680	+4999.5	+6600	
	3	0	+64.5	+206	+451.5	+828	+1362.5	+2082	+3013.5	+4184	+5620.5	+7350	
$P^i_{0.0}\vert n+1.-n+1\vert_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	$\frac{1}{2\alpha}2\Gamma_i^{3.n}$
	1	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
	2	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
	3	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	
$P^i_{0.0}\vert n-1.-n-1\vert_{-\sigma}$	0	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	»
	1	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
	2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
	3	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	
$P^i_{0.0}\vert n+1.-n-1\vert_{+\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	»
	1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
	2	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
	3	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	− 11	
$P^i_{0.0}\vert n-1.-n+1\vert_{-\delta}$	0	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	»
	1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	
	2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	
	3	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	

IX. $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (86)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$Q^i_{0.0}\mid n.-n\mid$	0	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	
	2	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	
	3	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	+ 13	+ 14	+ 15	+ 16	
$Q^i_{1.0}\mid n+1.-n\mid$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	
	2	− 16	− 20	− 24	− 28	− 32	− 36	− 40	− 44	− 48	− 52	− 56	
	3	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	− 66	− 72	− 78	− 84	− 90	− 96	
$Q^i_{1.0}\mid n-1.-n\mid$	0	0	− 2	− 8	− 18	− 32	− 50	− 72	− 98	− 128	− 162	− 200	»
	1	− 4	− 12	− 24	− 40	− 60	− 84	− 112	− 144	− 180	− 220	− 264	
	2	− 16	− 30	− 48	− 70	− 96	− 126	− 160	− 198	− 240	− 286	− 336	
	3	− 36	− 56	− 80	− 108	− 140	− 176	− 216	− 260	− 308	− 360	− 416	
$Q^i_{0.1}\mid n.-n+1\mid$	0	0	0	− 2	− 6	− 12	− 20	− 30	− 42	− 56	− 72	− 90	»
	1	+ 6	+ 6	+ 4	0	− 6	− 14	− 24	− 36	− 50	− 66	− 84	
	2	+ 20	+ 20	+ 18	+ 14	+ 8	0	− 10	− 22	− 36	− 52	− 70	
	3	+ 42	+ 42	+ 40	+ 36	+ 30	+ 22	+ 12	0	− 14	− 30	− 48	
$Q^i_{0.1}\mid n.-n-1\mid$	0	0	+ 4	+ 14	+ 30	+ 52	+ 80	+ 114	+ 154	+ 200	+ 252	+ 310	»
	1	+ 6	+ 18	+ 36	+ 60	+ 90	+ 126	+ 168	+ 216	+ 270	+ 330	+ 396	
	2	+ 20	+ 40	+ 66	+ 98	+ 136	+ 180	+ 230	+ 286	+ 348	+ 416	+ 490	
	3	+ 42	+ 70	+ 104	+ 144	+ 190	+ 242	+ 300	+ 364	+ 434	+ 510	+ 592	
$Q^i_{2.0}\mid n+2.-n\mid$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 10	+ 11	+ 12	
	2	+ 24	+ 30	+ 36	+ 42	+ 48	+ 54	+ 60	+ 66	+ 72	+ 78	+ 84	
	3	+ 90	+ 105	+ 120	+ 135	+ 150	+ 165	+ 180	+ 195	+ 210	+ 225	+ 240	
$Q^i_{2.0}\mid n.-n\mid$	0	0	− 1	− 4	− 9	− 16	− 25	− 36	− 49	− 64	− 81	− 100	»
	1	+ 4	+ 15	+ 32	+ 55	+ 84	+ 119	+ 160	+ 207	+ 260	+ 319	+ 384	
	2	+ 48	+ 95	+ 156	+ 231	+ 320	+ 423	+ 540	+ 671	+ 816	+ 975	+ 1148	
	3	+ 180	+ 287	+ 416	+ 567	+ 740	+ 935	+ 1152	+ 1391	+ 1652	+ 1935	+ 2240	
$Q^i_{2.0}\mid n-2.-n\mid$	0	+ 0	+ 1	+ 12	+ 45	+ 112	+ 225	+ 396	+ 637	+ 960	+ 1377	+ 1900	»
	1	+ 2	+ 18	+ 60	+ 140	+ 270	+ 462	+ 728	+ 1080	+ 1530	+ 2090	+ 2772	
	2	+ 24	+ 75	+ 168	+ 315	+ 528	+ 819	+ 1200	+ 1683	+ 2280	+ 3003	+ 3864	
	3	+ 90	+ 196	+ 360	+ 594	+ 910	+ 1320	+ 1836	+ 2470	+ 3234	+ 4140	+ 5200	
$Q^i_{1.1}\mid n+1.-n+1\mid$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 12	− 12	− 8	0	+ 12	+ 28	+ 48	+ 72	+ 100	+ 132	+ 168	
	2	− 80	− 80	− 72	− 56	− 32	0	+ 40	+ 88	+ 144	+ 208	+ 280	
	3	− 252	− 252	− 240	− 216	− 180	− 132	− 72	0	+ 84	+ 180	+ 288	
$Q^i_{1.1}\mid n-1.-n+1\mid$	0	0	0	+ 8	+ 36	+ 96	+ 200	+ 360	+ 588	+ 896	+ 1296	+ 1800	»
	1	− 12	− 24	− 24	0	+ 60	+ 168	+ 336	+ 576	+ 900	+ 1320	+ 1848	
	2	− 80	− 120	− 144	− 140	− 96	0	+ 160	+ 396	+ 720	+ 1144	+ 1680	
	3	− 252	− 336	− 400	− 432	− 420	− 352	− 216	0	+ 308	+ 720	+ 1248	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$Q^i_{1.1}\,\lvert\, n+1.-n-1\,\rvert$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\Gamma_i^{1.n}$
	1	− 12	− 36	− 72	− 120	− 180	− 252	− 336	− 432	− 540	− 660	− 792	
	2	− 80	−160	− 264	− 392	− 544	− 720	− 920	−1144	−1392	− 1664	− 1960	
	3	−252	−420	− 624	− 864	−1140	−1452	−1800	−2184	−2604	− 3060	− 3552	
$Q^i_{1.1}\,\lvert\, n-1.-n-1\,\rvert$	0	0	− 8	− 56	− 180	− 416	− 800	−1368	−2156	−3200	− 4536	− 6200	»
	1	− 12	− 72	− 216	− 480	− 900	−1512	−2352	−3456	−4860	− 6600	− 8712	
	2	− 80	−240	− 528	− 980	−1632	−2520	−3680	−5148	−6960	− 9152	−11760	
	3	−252	−560	−1040	−1728	−2660	−3872	−5400	−7280	−9548	−12240	−15392	
$Q^i_{0.2}\,\lvert\, n.-n+2\,\rvert$	0	0	+ 0.5	0	+ 1.5	+ 8	+ 22.5	+ 48	+ 87.5	+ 144	+ 220.5	+ 320	»
	1	+ 18	+ 16.5	+ 12	+ 7.5	+ 6	+ 10.5	+ 24	+ 49.5	+ 90	+ 148.5	+ 228	
	2	+ 80	+ 72.5	+ 60	+ 45.5	+ 32	+ 22.5	+ 20	+ 27.5	+ 48	+ 84.5	+ 140	
	3	+210	+192.5	+ 168	+ 139.5	+ 110	+ 82.5	+ 60	+ 45.5	+ 42	+ 52.5	+ 80	
$Q^i_{0.2}\,\lvert\, n.-n\,\rvert$	0	0	− 2	− 20	− 72	− 176	− 350	− 612	− 980	−1472	−2106	− 2900	»
	1	+ 12	+ 24	+ 16	− 30	− 132	− 308	− 576	− 954	−1460	−2112	− 2928	
	2	+ 80	+130	+ 156	+ 140	+ 64	− 90	− 340	− 704	−1200	−1846	− 2660	
	3	+252	+364	+ 448	+ 486	+ 460	+ 352	+ 144	− 182	− 644	−1260	− 2048	
$Q^i_{0.2}\,\lvert\, n.-n-2\,\rvert$	0	0	+ 13.5	+ 68	+ 190.5	+ 408	+ 747.5	+1236	+1900.5	+2768	+3865.5	+ 5220	»
	1	+ 18	+ 79.5	+ 212	+ 442.5	+ 798	+1305 5	+1992	+2884.5	+4010	+5395.5	+ 7068	
	2	+ 80	+217.5	+ 456	+ 822.5	+1344	+2047.5	+2960	+4108.5	+5520	+7221.5	+ 9240	
	3	+210	+451.5	+ 824	+1354.5	+2070	+2997.5	+4164	+5596.5	+7322	+9367.5	+11760	
$Q^i_{0.0}\lvert n+1.-n+1\rvert_{+\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	$\frac{1}{2\alpha}\,2\Gamma_i^{3.}$
	1	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	
	2	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	
	3	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17	
$Q^i_{0.0}\lvert n-1.-n-1\rvert_{-\sigma}$	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	»
	1	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	
	2	+ 5	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	
	3	+ 7	+ 8	+ 9	+10	+11	+12	+13	+14	+15	+16	+17	
$Q^i_{0.0}\lvert n+1.-n-1\rvert_{+\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	»
	1	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	
	2	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	
	3	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	
$Q^i_{0.0}\lvert n-1.-n+1\rvert_{-\delta}$	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	»
	1	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	
	2	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	
	3	− 7	− 8	− 9	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	

X. $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}(\varepsilon\,,\, g')$; (86)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$R^i_{0.0}\,\vert\, n.-n+1\,\vert_{+\pi'}$	0	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	$\frac{1}{2a}\,2\Gamma_i^{3.n}$
	1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
	2	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
	3	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	
$R^i_{0.0}\,\vert\, n.-n-1\,\vert_{-\pi'}$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	»
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
$R^i_{1.0}\,\vert n+1.-n+1\,\vert_{+\pi'}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
	3	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	
$R^i_{1.0}\,\vert n-1.-n+1\,\vert_{+\pi'}$	0	0	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	»
	1	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	
	2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	+ 24	
	3	+ 6	+ 8	+ 10	+ 12	+ 14	+ 16	+ 18	+ 20	+ 22	+ 24	+ 26	
$R^i_{1.0}\,\vert n+1.-n-1\,\vert_{-\pi'}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
	2	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	− 4	
	3	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	− 6	
$R^i_{1.0}\,\vert n-1.-n-1\,\vert_{-\pi'}$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	»
	1	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	
	2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	
	3	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	− 26	
$R^i_{0.1}\,\vert\, n.-n+2\,\vert_{+\pi'}$	0	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 5	+ 6	»
	1	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	
	2	− 8	− 7	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1	+ 2	
	3	− 10	− 9	− 8	− 7	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	
$R^i_{0.1}\,\vert\, n.-n\,\vert_{+\pi'}$	0	0	− 3	− 6	− 9	− 12	− 15	− 18	− 21	− 24	− 27	− 30	»
	1	− 2	− 5	− 8	− 11	− 14	− 17	− 20	− 23	− 26	− 29	− 32	
	2	− 4	− 7	− 10	− 13	− 16	− 19	− 22	− 25	− 28	− 31	− 34	
	3	− 6	− 9	− 12	− 15	− 18	− 21	− 24	− 27	− 30	− 33	− 36	
$R^i_{0.1}\,\vert\, n.-n\,\vert_{-\pi'}$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	»
	1	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	
	2	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	
	3	+ 6	+ 5	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	
$R^i_{0.1}\,\vert\, n.-n-2\,\vert_{-\pi'}$	0	+ 4	+ 7	+ 10	+ 13	+ 16	+ 19	+ 22	+ 25	+ 28	+ 31	+ 34	»
	1	+ 6	+ 9	+ 12	+ 15	+ 18	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	+ 33	+ 36	
	2	+ 8	+ 11	+ 14	+ 17	+ 20	+ 23	+ 26	+ 29	+ 32	+ 35	+ 38	
	3	+ 10	+ 13	+ 16	+ 19	+ 22	+ 25	+ 28	+ 31	+ 34	+ 37	+ 40	

XI. $a\Omega(\varepsilon, g')$; (89)

	i	$n=0$	1	2	3	4
$O^i_{0.0}[n.-n]$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$O^i_{1.0}[n+1.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$O^i_{1.0}[n-1.-n]$	0	—	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$O^i_{0.1}[n.-n+1]$	0	0.000000	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$O^i_{0.1}[n.-n-1]$	0	0.000000	0.602060	0.845098	1.000000	1.113943
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$O^i_{2.0}[n+2.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$O^i_{2.0}[n.-n]$	0	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n
	1	0.301030	0.778151	1.000000	1.146128	0.255273
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$O^i_{2.0}[n-2.-n]$	0	—	0.000000	0.778151	1.176091	0.447158
	1	0.000000	0.698970	0.954243	1.113943	0.230449
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$O^i_{1.1}[n+1.-n+1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	0.602060_n	0.301030_n	—	0.301030
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$O^i_{1.1}[n-1.-n+1]$	0	—	—	0.602060	1.079181	1.380211
	1	0.778151_n	0.903090_n	1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$O^i_{1.1}[n+1.-n-1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	1.079181_n	1.255273_n	1.380211_n	1.477121_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$O^i_{1.1}[n-1.-n-1]$	0	—	0.903090_n	1.447158_n	1.778151_n	2.017033_n
	1	0.778151_n	1.204120_n	1.414973_n	1.556303_n	1.662758_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$O^i_{0.2}[n.-n+2]$	0	0.301030	9.698970	—	9.698970	0.301030
	1	0.845098	0.698970	0.477121	0.000000	0.000000_n
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$O^i_{0.2}[n.-n]$	0	—	0.301030_n	1.000000_n	1.380211_n	1.643453_n
	1	0.778151	1.000000	1.146128	1.255273	1.342423
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$O^i_{0.2}[n.-n-2]$	0	0.301030	1.130334	1.531479	1.802774	2.008600
	1	0.845098	1.113943	1.278754	1.397940	1.491362
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$O^i_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$O^i_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$O^i_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n
$O^i_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n

XI. $a\Omega(\varepsilon, g')$; (89)

5	6	7	8	9	10	Faktor
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$2\gamma_i^{1.n}$
—	—	—	—	—	—	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.602060_n	0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
1.204120	1.278754	1.342423	1.397940	1.447158	1.491362	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
—	—	—	—	—	—	»
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	»
1.342423	1.414973	1.477121	1.531479	1.579784	1.623249	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
1.653213	1.819544	1.959041	2.079181	2.184691	2.278754	»
1.322219	1.397940	1.462398	1.518514	1.568202	1.612784	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
—	—	—	—	—	—	»
0.602060	0.778151	0.903090	1.000000	1.079181	1.146128	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
1.602060	1.778151	1.924279	2.049218	2.158362	2.255273	»
1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	1.342423_n	1.380211_n	1.414973_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
—	—	—	—	—	—	»
1.556303_n	1.623249_n	1.681241_n	1.732394_n	1.778151_n	1.819544_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
2.204120_n	2.357935_n	2.488551_n	2.602060_n	2.702431_n	2.792392_n	»
1.748188_n	1.819544_n	1.880814_n	1.934498_n	1.982271_n	2.025306_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
0.653213	0.903090	1.096910	1.255273	1.389166	1.505150	»
0.477121_n	0.698970_n	0.845098_n	0.954243_n	1.041393_n	1.113943_n	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
1.845098_n	2.008600_n	2.146128_n	2.264818_n	2.369216_n	2.462398_n	»
1.414973	1.477121	1.531479	1.579784	1.623249	1.662758	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
2.174641	2.313867	2.433770	2.539076	2.632963	2.717671	»
1.568202	1.633468	1.690196	1.740363	1.785330	1.826075	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$\frac{1}{2\alpha} 2\gamma_i^{3.n}$
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	»
0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	»
0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	»

XII. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, g')$; (89)

	i	$n=0$	1	2	3	4
$P^i_{0.0}[n.-n]$	0	—	0.000000	0.301030	0.477121	0.602060
$P^i_{1.0}[n+1.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n	1.000000_n
$P^i_{1.0}[n-1.-n]$	0	—	—	0.602060_n	1.079181_n	1.380211_n
	1	0.301030	—	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n
$P^i_{0.1}[n.-n+1]$	0	—	—	0.301030_n	0.778151_n	1.079181_n
	1	—	0.301030	0.602060	0.778151	0.903090
$P^i_{0.1}[n.-n-1]$	0	—	0.602060	1.146128	1.477121	1.716003
	1	—	0.301030	0.602060	0.778151	0.903090
$P^i_{2.0}[n+2.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970	0.778151
	2	0.903090	1.079181	1.204120	1.301030	1.380211
$P^i_{2.0}[n.-n]$	0	—	0.000000_n	0.602060_n	0.954243_n	1.204120_n
	1	—	0.778151	1.301030	1.623249	1.857332
	2	—	0.903090	1.204120	1.380211	1.505150
$P^i_{2.0}[n-2.-n]$	0	—	0.000000_n	—	1.176091	1.748188
	1	0.301030_n	0.698970_n	—	1.113943	1.531479
	2	0.903090_n	0.602060_n	—	0.602060	0.903090
$P^i_{1.1}[n+1.-n+1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	0.903090_n	0.778151_n	—	1.000000
	2	0.903090_n	1.204120_n	1.380211_n	1.505150_n	1.602060_n
$P^i_{1.1}[n-1.-n+1]$	0	—	—	0.602060	1.380211	1.857332
	1	0.778151	—	1.000000_n	1.380211_n	1.623249_n
	2	0.903090	—	0.903090_n	1.204120_n	1.380211_n
$P^i_{1.1}[n+1.-n-1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	1.380211_n	1.732394_n	1.982271_n	2.176091_n
	2	0.903090_n	1.204120_n	1.380211_n	1.505150_n	1.602060_n
$P^i_{1.1}[n-1.-n-1]$	0	—	—	1.447158_n	2.079181_n	2.494155_n
	1	0.778151	—	1.414973_n	1.857332_n	2.139879_n
	2	0.903090	—	0.903090_n	1.204120_n	1.380211_n
$P^i_{0.2}[n.-n+2]$	0	—	9.698970	—	0.176091	0.903090
	1	—	0.698970	0.778151	0.477121	0.602060_n
	2	—	0.602060	0.903090	1.079181	1.204120
$P^i_{0.2}[n.-n]$	0	—	0.301030_n	1.301030_n	1.857332_n	2.245513_n
	1	—	1.000000	1.447158	1.732394	1.944483
	2	—	0.903090	1.204120	1.380211	1.505150
$P^i_{0.2}[n.-n-2]$	0	—	1.130334	1.832509	2.279895	2.610660
	1	—	1.113943	1.579784	1.875061	2.093422
	2	—	0.602060	0.903090	1.079181	1.204120
$P^i_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	0.000000	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970
$P^i_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	0.000000_n	—	0.000000	0.301030	0.477121
$P^i_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n	0.698970_n
$P^i_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	0.000000	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n

XII. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, g')$; (89)

5	6	7	8	9	10	Faktor
0 698970	0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	$2\gamma_i^{1.n}$
—	—	—	—	—	—	»
1.079181_n	1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	1.342423_n	
1.602060_n	1.778151_n	1.924279_n	2.049218_n	2.158362_n	2.255273_n	»
0.903090_n	1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	
1.301030_n	1.477121_n	1.623249_n	1.748188_n	1.857332_n	1.954243_n	»
1.000000	1.079181	1.146128	1.204120	1.255273	1.301030	
1.903090	2.056905	2.187521	2.301030	2.401401	2.491362	»
1.000000	1.079181	1.146128	1.204120	1.255273	1.301030	
—	—	—	—	—	—	»
0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	1.041393	1.079181	
1.447158	1.505150	1.556303	1.602060	1.643453	1.681241	
1.397940_n	1.556303_n	1.690196_n	1.806180_n	1.908485_n	2.000000_n	»
2.041393	2.193125	2.322219	2.434569	2.534026	2.623249	
1.602060	1.681241	1.748188	1.806180	1.857332	1.903090	
2.130334	2.421604	2.658011	2.857332	3.029789	3 181844	»
1.799341	2.000000	2.161368	2.296665	2.413300	2.515874	
1.079181	1.204120	1.301030	1.380211	1.447158	1.505150	
—	—	—	—	—	—	»
1.380211	1.623249	1.806180	1.954243	2.079180	2.187521	
1.681241_n	1.748188_n	1.806180_n	1.857332_n	1.903090_n	1.944483_n	
2.204120	2.477121	2.702431	2.894316	3.061452	3.209515	»
1.806180_n	1.954243_n	2.079181_n	2.187521_n	2.283301_n	2.369216_n	
1.505150_n	1.602060_n	1.681241_n	1.748188_n	1.806180_n	1.857332_n	
—	—	—	—	—	—	»
2.334454_n	2.468347_n	2.584331_n	2.686636_n	2.778151_n	2.860937_n	
1.681241_n	1.748188_n	1.806180_n	1.857332_n	1.903090_n	1.944483_n	
2.806180_n	3.056905_n	3.266702_n	3.447158_n	3.605521_n	3.746634_n	»
2.350248_n	2.518514_n	2.658965_n	2.779596_n	2.885361_n	2.979548_n	
1.505150_n	1.602060_n	1.681241_n	1.748188_n	1.806180_n	1.857332_n	
1.352183	1.681241	1.942008	2.158362	2.343409	2.505150	»
1.176091_n	1.477121_n	1.690196_n	1.857332_n	1.995635_n	2.113943_n	
1.301030	1.380211	1.447158	1.505150	1.556303	1.602060	
2.544068_n	2.786751_n	2.991226_n	3.167908_n	3 323458$_n$	3.462398_n	»
2.113943	2.255273	2.376577	2.482874	2.577492	2.662758	
1.602060	1.681241	1.748188	1.806180	1.857332	1.903090	
2.873611	3.092018	3.278868	3.442166	3.587206	3.717671	»
2.267172	2.411620	2.535294	2.643453	2.739572	2.826075	
1.301030	1.380211	1.447158	1.505150	1.556303	1.602060	
0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	1.041393	$\frac{1}{2\alpha}2\gamma_i^{3.n}$
0.602060	0.698970	0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	»
0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	1.041393_n	»
0.602060_n	0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	»

XIII. $ar\dfrac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (89)

	i	$n=0$	1	2	3	4
$Q^i_{0.0}[n.-n]$	0	—	0.000000	0.301030	0.477121	0.602060
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$Q^i_{1.0}[n+1.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n	1.000000_n	1.079181_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$Q^i_{1.0}[n-1.-n]$	0	—	0.301030_n	0.903090_n	1.255273_n	1.505150_n
	1	0.602060_n	1.000000_n	1.204120_n	1.342423_n	1.447158_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$Q^i_{0.1}[n.-n+1]$	0	—	—	0.301030_n	0.778151_n	1.079181_n
	1	0.778151	0.778151	0.778151	0.778151	0.778151
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$Q^i_{0.1}[n.-n-1]$	0	—	0.602060	1.146128	1.477121	1.716003
	1	0.778151	1.146128	1.342423	1.477121	1.579784
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$Q^i_{2.0}[n+2.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970	0.778151
	2	1.301030	1.380211	1.447158	1.505150	1.556303
	3	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211
$Q^i_{2.0}[n.-n]$	0	—	0.000000_n	0.602060_n	0.954243_n	1.204120_n
	1	0.602060	1.204120	1.556303	1.806180	2.000000
	2	1.602060	1.806180	1.944483	2.049218	2.133539
	3	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241
$Q^i_{2.0}[n-2.-n]$	0	—	0.000000	1.079181	1.653213	2.049218
	1	0.301030	1.230449	1.681241	1.977724	2.198657
	2	1.301030	1.602060	1.778151	1.903090	2.000000
	3	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211
$Q^i_{1.1}[n+1.-n+1]$	0	—	—	—	—	—
	1	1.079181_n	1.079181_n	0.903090_n	—	1.079181
	2	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n
	3	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n
$Q^i_{1.1}[n-1.-n+1]$	0	—	—	0.903090	1.556303	1.982271
	1	1.079181_n	1.380211_n	1.505150_n	1.556303_n	1.556303_n
	2	1.748188_n	1.857332_n	1.944483_n	2.017033_n	2.079181_n
	3	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n
$Q^i_{1.1}[n+1.-n-1]$	0	—	—	—	—	—
	1	1.079181_n	1.556303_n	1.857332_n	2.079181_n	2.255273_n
	2	1.748188_n	1.944483_n	2.079181_n	2.181844_n	2.264818_n
	3	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n

XIII. $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (89)

5	6	7	8	9	10	Faktor
0.698970	0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	$2\gamma_i^{1.n}$
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
—	—	—	—	—	—	»
1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	1.342423_n	1.380211_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
1.698970_n	1.857332_n	1.991226_n	2.107210_n	2.209515_n	2.301030_n	»
1.531479_n	1.602060_n	1.662758_n	1.716003_n	1.763428_n	1.806180_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
1.301030_n	1.477121_n	1.623249_n	1.748188_n	1.857332_n	1.954243_n	»
0.778151	0.778151	0.778151	0.778151	0.778151	0.778151	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
1.903090	2.056905	2.187521	2.301030	2.401401	2.491362	»
1.662758	1.732394	1.792392	1.845098	1.892095	1.934498	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
—	—	—	—	—	—	»
0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	1.041393	1.079181	
1.602060	1.643453	1.681241	1.716003	1.748188	1.778151	
1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	
1.397940_n	1.556303_n	1.690196_n	1.806180_n	1.908485_n	2.000000_n	»
2.158362	2.292256	2.408240	2.510545	2.602060	2.684845	
2.204120	2.264818	2.318063	2.365488	2.408240	2.447158	
1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	
2.352183	2.597695	2.804139	2.982271	3.138934	3.278754	»
2.374748	2.521138	2.646404	2.755875	2.853090	2.940516	
2.079181	2.146128	2.204120	2.255273	2.301030	2.342423	
1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	
—	—	—	—	—	—	»
1.447158	1.681241	1.857332	2.000000	2.120574	2.225309	
1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	1.748188_n	
1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	
2.301030	2.556303	2.769377	2.952308	3.112605	3.255273	»
1.505150_n	1.380211_n	1.079181_n	0.602060	1.380211	1.681241	
2.133539_n	2.181844_n	2.225309_n	2.264818_n	2.301030_n	2.334454_n	
1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	
—	—	—	—	—	—	»
2.401401_n	2.526339_n	2.635484_n	2.732394_n	2.819544_n	2.898725_n	
2.334454_n	2.394452_n	2.447158_n	2.494155_n	2.536558_n	2.575188_n	
1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	

XIII. $-ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (89)

	i	$n=0$	1	2	3	4
$Q^i_{1.1}[n-1.-n-1]$	0	—	0.903090_n	1.748188_n	2.255273_n	2.619093_n
	1	1.079181_n	1.806180_n	2.204120_n	2.477121_n	2.684845_n
	2	1.748188_n	2.017033_n	2.181844_n	2.301030_n	2.394452_n
	3	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n
$Q^i_{0.2}[n.-n+2]$	0	—	9.698970	—	0.176091	0.903090
	1	1.255273	1.204120	1.079181	0.778151	0.301030_n
	2	1.643453	1.602060	1.556303	1.505150	1.447158
	3	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211
$Q^i_{0.2}[n.-n]$	0	—	0.301030_n	1.301030_n	1.857332_n	2.245513_n
	1	1.079181	1.414973	1.556303	1.623249	1.643453
	2	1.748188	1.903090	2.017033	2.107210	2.181844
	3	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241
$Q^i_{0.2}[n.-n-2]$	0	—	1.130334	1.832509	2.279895	2.610660
	1	1.255273	1.819544	2.158362	2.401401	2.591065
	2	1.643453	1.857332	2.000000	2.107210	2.193125
	3	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211
$Q^i_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	0.000000	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$Q^i_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	0.000000	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$Q^i_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n	0.698970_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$Q^i_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n	0.698970_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n

XIII. $-ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (89)

5	6	7	8	9	10	Faktor
2.903090_n	3.136086_n	3.333649_n	3.505150_n	3.656673_n	3.792392_n	$2\gamma_i^{1.n}$
2.852480_n	2.992995_n	3.113943_n	3.220108_n	3.314710_n	3.400020_n	
2.471292_n	2.536558_n	2.593286_n	2.643453_n	2.688420_n	2.729165_n	
1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	1.681241_n	
1.352183	1.681241	1.942008	2.158362	2.343409	2.505150	»
1.079181_n	1.380211_n	1.579784_n	1.732394_n	1.857332_n	1.963788_n	
1.380211	1.301030	1.204120	1.079181	0.903090	0.602060	
1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	
2.544068_n	2.786751_n	2.991226_n	3.167908_n	3.323458_n	3.462398_n	»
1.623249	1.556303	1.414973	1.079181	0.778151_n	1.447158_n	
2.245513	2.301030	2.350248	2.394452	2.434569	2.471292	
1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	1.681241	
2.873611	3.092018	3.278868	3.442166	3.587206	3.717671	»
2.746634	2.878522	2.992995	3.094122	3.184691	3.266702	
2.264818	2.326336	2.380211	2.428135	2.471292	2.510545	
1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	1.380211	
0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	1.041393	$\frac{1}{2\alpha}2\gamma_i^{3.n}$
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
0.778151	0.845098	0.903090	0.954243	1.000000	1.041393	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	1.041393_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	1.041393_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	

XIV. $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}(\varepsilon, g')$; (89)

	i	$n=0$	1	2	3	4
$R^i_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$	0	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n
$R^i_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$R^i_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'}$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$R^i_{1.0}[n-1.-n+1]_{+\pi'}$	0	—	0.301030	0.602060	0.778151	0.903090
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$R^i_{1.1}[n+1.-n-1]_{-\pi'}$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$R^i_{1.0}[n-1.-n-1]_{--\pi'}$	0	—	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$R^i_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'}$	0	0.602060_n	0.477121_n	0.301030_n	0.000000_n	—
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$R^i_{0.1}[n.-n]_{+\pi'}$	0	—	0.477121_n	0.778151_n	0.954243_n	1.079181_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$R^i_{0.1}[n.-n]_{-\pi'}$	0	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$R^i_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'}$	0	0.602060	0.845098	1.000000	1.113943	1.204120
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030

XIV. $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}(\varepsilon, g')$; (89)

5	6	7	8	9	10	Faktor
0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	$\frac{1}{2a} 2\gamma_i^{3.n}$
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	»
—	—	—	—	—	—	
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
1.000000	1.079181	1.146128	1.204120	1.255273	1.301030	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
—	—	—	—	—	—	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.000000	0.301030	0.477121	0.602060	0.698970	0.778151	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
1.176091_n	1.255273_n	1.322219_n	1.380211_n	1.431364_n	1.477121_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
1.278754	1.342423	1.397940	1.447158	1.491362	1.531479	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	

XV. $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3(\varepsilon\,,\,\varepsilon')$; (93)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^{3.i}_{0.0}(n.-n)$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$2\gamma_i^{3.n}$
$O^{3.i}_{1.0}(n+1.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
$O^{3.i}_{1.0}(n-1.-n)$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
$O^{3.i}_{0.1}(n.-n+1)$	0	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
$O^{3.i}_{0.1}(n.-n-1)$	0	+ 3	+ 5	+ 7	+ 9	+ 11	+ 13	+ 15	+ 17	+ 19	+ 21	+ 23	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
$O^{3.i}_{2.0}(n+2.-n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{2.0}(n.-n)$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	»
	1	+ 2	+ 6	+ 10	+ 14	+ 18	+ 22	+ 26	+ 30	+ 34	+ 38	+ 42	
	2	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	
$O^{3.i}_{2.0}(n-2.-n)$	0	0	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	»
	1	+ 1	+ 5	+ 9	+ 13	+ 17	+ 21	+ 25	+ 29	+ 33	+ 37	+ 41	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{1.1}(n+1.-n+1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	− 10	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}(n-1.-n+1)$	0	0	− 6	− 12	− 18	− 24	− 30	− 36	− 42	− 48	− 54	− 60	»
	1	− 10	− 14	− 18	− 22	− 26	− 30	− 34	− 38	− 42	− 46	− 50	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}(n+1.-n-1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 10	− 14	− 18	− 22	− 26	− 30	− 34	− 38	− 42	− 46	− 50	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}(n-1.-n-1)$	0	0	− 10	− 28	− 54	− 88	− 130	− 180	− 238	− 304	− 378	− 460	»
	1	− 10	− 18	− 26	− 34	− 42	− 50	− 58	− 66	− 74	− 82	− 90	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{0.2}(n.-n+2)$	0	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	»
	1	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	+ 9	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{0.2}(n.-n)$	0	+ 12	+ 19	+ 26	+ 33	+ 40	+ 47	+ 54	+ 61	+ 68	+ 75	+ 82	»
	1	+ 18	+ 22	+ 26	+ 30	+ 34	+ 38	+ 42	+ 46	+ 50	+ 54	+ 58	
	2	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^{3.i}_{0.2}(n.-n-2)$	0	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	+ 231	+ 276	$2\gamma_i^{3.n}$
	1	+ 9	+ 13	+ 17	+ 21	+ 25	+ 29	+ 33	+ 37	+ 41	+ 45	+ 49	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	$\frac{1}{2\alpha} 2\gamma_i^{5.n}$
$O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	»
$O^{3.i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	»
$O^{3.i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	»

XVI. $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3(\varepsilon, g')$; (94)

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O^{3.i}_{0.0}[n.-n]$	0	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	$2\gamma_i^{3.n}$
$O^{3.i}_{1.0}[n+1.-n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
$O^{3.i}_{1.0}[n-1.-n]$	0	0	− 2	− 4	− 6	− 8	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	»
	1	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	− 2	
$O^{3.i}_{0.1}[n.-n+1]$	0	+ 3	+ 2	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
$O^{3.i}_{0.1}[n.-n-1]$	0	+ 3	+ 6	+ 9	+ 12	+ 15	+ 18	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	+ 33	»
	1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	
$O^{3.i}_{2.0}[n+2.-n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	+ 1*	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{2.0}[n.-n]$	0	0	− 1	− 2	− 3	− 4	− 5	− 6	− 7	− 8	− 9	− 10	»
	1	+ 2	+ 6	+ 10	+ 14	+ 18	+ 22	+ 26	+ 30	+ 34	+ 38	+ 42	
	2	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	
$O^{3.i}_{2.0}[n-2.-n]$	0	0	+ 1	+ 6	+ 15	+ 28	+ 45	+ 66	+ 91	+ 120	+ 153	+ 190	»
	1	+ 1	+ 5	+ 9	+ 13	+ 17	+ 21	+ 25	+ 29	+ 33	+ 37	+ 41	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n+1]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 10	− 8	− 6	− 4	− 2	0	+ 2	+ 4	+ 6	+ 8	+ 10	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n+1]$	0	0	− 4	− 4	0	+ 8	+ 20	+ 36	+ 56	+ 80	+ 108	+ 140	»
	1	− 10	− 12	− 14	− 16	− 18	− 20	− 22	− 24	− 26	− 28	− 30	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}[n+1.-n-1]$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	»
	1	− 10	− 16	− 22	− 28	− 34	− 40	− 46	− 52	− 58	− 64	− 70	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{1.1}[n-1.-n-1]$	0	0	− 12	− 36	− 72	− 120	− 180	− 252	− 336	− 432	− 540	− 660	»
	1	− 10	− 20	− 30	− 40	− 50	− 60	− 70	− 80	− 90	− 100	− 110	
	2	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	− 8	
$O^{3.i}_{0.2}[n.-n+2]$	0	+ 9	+ 5.5	+ 3	+ 1.5	+ 1	+ 1.5	+ 3	+ 5.5	+ 9	+ 13.5	+ 19	»
	1	+ 11	+ 9	+ 7	+ 5	+ 3	+ 1	− 1	− 3	− 5	− 7	− 9	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	

	i	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Faktor
$O_{0.2}^{3.i}[n.-n]$	0	+ 6	+ 8	+ 4	− 6	− 22	− 44	− 72	−106	−146	−192	−244	$2\gamma_i^{3\,n}$
	1	+14	+18	+22	+26	+ 30	+ 34	+ 38	+ 42	+ 46	+ 50	+ 54	
	2	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	+ 8	
$O_{0.2}^{3.i}[n.-n-2]$	0	+ 9	+26.5	+53	+88.5	+133	+186.5	+249	+320.5	+401	+490.5	+589	»
	1	+11	+17	+23	+29	+ 35	+ 41	+ 47	+ 53	+ 59	+ 65	+ 71	
	2	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	+ 4	
$O_{0.0}^{3.i}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	$\frac{1}{2\alpha}2\gamma_i^{5.n}$
$O_{0.0}^{3.i}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	+ 3	− 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	+ 3	»
$O_{0.0}^{3.i}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	»
$O_{0.0}^{3.i}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	− 3	»

XVII. $-\left(\frac{a}{A}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2(\varepsilon, g')$; (96)[1])

	i	$n=0$	1	2	3	4
$\overline{O}^{3,i}_{0.0}[n.-n]$	0	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n
$\overline{O}^{3,i}_{1.0}[n+1.-n]$	0	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$\overline{O}^{3,i}_{1.0}[n-1.-n]$	0	0.301030	0.602060	0.778151	0.903090	1.000000
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$\overline{O}^{3,i}_{0.1}[n.-n+1]$	0	0.477121_n	0.301030_n	0.000000_n	—	0.000000
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.1}[n.-n-1]$	0	0.477121_n	0.778151_n	0.954243_n	1.079181_n	1.176091_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$\overline{O}^{3,i}_{2.0}[n+2.-n]$	0	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n
	1	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n
	2	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n
$\overline{O}^{3,i}_{2.0}[n.-n]$	0	0.301030_n	0.698970_n	0.903090_n	1.041393_n	1.146128_n
	1	1.000000_n	1.146128_n	1.255273_n	1.342423_n	1.414973_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{O}^{3,i}_{2.0}[n-2.-n]$	0	0.000000_n	0.778151_n	1.176091_n	1.447158_n	1.653213_n
	1	0.698970_n	0.954243_n	1.113943_n	1.230449_n	1.322219_n
	2	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n
$\overline{O}^{3,i}_{1.1}[n+1.-n+1]$	0	0.778151	0.602060	0.301030	—	0.301030_n
	1	1.146128	1.079181	1.000000	0.903090	0.778151
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{O}^{3,i}_{1.1}[n-1.-n+1]$	0	0.778151	0.903090	0.778151	—	1.000000_n
	1	1.146128	1.204120	1.255273	1.301030	1.342423
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{O}^{3,i}_{1.1}[n+1.-n-1]$	0	0.778151	1.079181	1.255273	1.380211	1.477121
	1	1.146128	1.301030	1.414973	1.505150	1.579784
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{O}^{3,i}_{1.1}[n-1.-n-1]$	0	0.778151	1.380211	1.732394	1.982271	2.176091
	1	1.146128	1.380211	1.531479	1.643453	1.732394
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{O}^{3,i}_{0.2}[n.-n+2]$	0	0.954243_n	0.740363_n	0.477121_n	0.176091_n	0.000000_n
	1	1.041393_n	0.954243_n	0.845098_n	0.698970_n	0.477121_n
	2	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.2}[n.-n]$	0	0.778151_n	0.903090_n	0.602060_n	0.778151	1.342423
	1	1.146128_n	1.255273_n	1.342423_n	1.414973_n	1.477121_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.2}[n.-n-2]$	0	0.954243_n	1.423246_n	1.724276_n	1.946943_n	2.123852_n
	1	1.041393_n	1.230449_n	1.361728_n	1.462398_n	1.544068_n
	2	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n
$\overline{O}^{3,i}_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121
$\overline{O}^{3,i}_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121

[1]) Für $n=0$ keine Correction an $\gamma_0^{3\,n}$.

XVII. $-\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 (\varepsilon, g')$; (96)[1]

5	6	7	8	9	10	Faktor
0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	$2\gamma_i^{3.n}$
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
1.079181	1.146128	1.204120	1.255273	1.301030	1.342423	
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
0.301030	0.477121	0.602060	0.698970	0.778151	0.845098	
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
1.255273_n	1.322219_n	1.380211_n	1.431364_n	1.477121_n	1.518514_n	
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	0.000000_n	»
0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	0.698970_n	
0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	
1.230449_n	1.301030_n	1.361728_n	1.414973_n	1.462398_n	1.505150_n	»
1.477121_n	1.531479_n	1.579784_n	1.623249_n	1.662758_n	1.698970_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
1.819544_n	1.959041_n	2.079181_n	2.184691_n	2.278754_n	2.363612_n	»
1.397940_n	1.462398_n	1.518514_n	1.568202_n	1.612784_n	1.653213_n	
0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	
0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n	1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n	»
0.602060	0.301030	—	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
1.380211_n	1.623249_n	1.806180_n	1.954243_n	2.079181_n	2.187521_n	»
1.380211	1.414973	1.447158	1.477121	1.505150	1.531479	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
1.556303	1.623249	1.681241	1.732394	1.778151	1.819544	»
1.643453	1.698970	1.748188	1.792392	1.832509	1.869232	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
2.334454	2.468347	2.584331	2.686636	2.778151	2.860937	
1.806180	1.869232	1.924279	1.973128	2.017033	2.056905	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	
0.176091_n	0.477121_n	0.740363_n	0.954243_n	1.130334_n	1.278754_n	»
0.000000_n	0.000000	0.477121	0.698970	0.845098	0.954243	
0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	
1.643453	1.857332	2.025306	2.164353	2.283301	2.387390	»
1.531479_n	1.579784_n	1.623249_n	1.662758_n	1.698970_n	1.732394_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
2.270679_n	2.396199_n	2.505828_n	2.603144_n	2.690639_n	2.770115_n	»
1.612784_n	1.672098_n	1.724276_n	1.770852_n	1.812913_n	1.851258_n	
0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	0.602060_n	
0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	$\frac{1}{2\alpha} 2\gamma_i^{5.n}$
0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	»
0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	»
0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	

[1]) Für $n=0$ keine Correction an $\gamma_0^{3.n}$.

XVIII. $\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r'}{a'}\right)^2(\varepsilon\,,\ g')$; (97)[1]

	i	$n=0$	1	2	3	4
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,0}[n.-n]$	0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,0}[n+1.-n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,0}[n-1.-n]$	0	—	0.301030_n	0.602060_n	0.778151_n	0.903090_n
	1	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,1}[n.-n+1]$	0	0.000000	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,1}[n.-n-1]$	0	0.000000	0.602060	0.845098	1.000000	1.113943
	1	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{2,0}[n+2.+n]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{2,0}[n.-n]$	0	—	0.000000_n	0.301030_n	0.477121_n	0.602060_n
	1	0.301030	0.778151	1.000000	1.146128	1.255273
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{2,0}[n-2.-n]$	0	—	0.000000	0.778151	1.176091	1.447158
	1	0.000000	0.698970	0.954243	1.113943	1.230449
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,1}[n+1.-n+1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	0.602060_n	0.301030_n	—	0.301030
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,1}[n-1.-n+1]$	0	—	—	0.602060	1.079181	1.380211
	1	0.778151_n	0.903090_n	1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,1}[n+1.-n-1]$	0	—	—	—	—	—
	1	0.778151_n	1.079181_n	1.255273_n	1.380211_n	1.477121_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{1,1}[n-1.-n-1]$	0	—	0.903090_n	1.447158_n	1.778151_n	2.017033_n
	1	0.778151_n	1.204120_n	1.414973_n	1.556303_n	1.662758_n
	2	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,2}[n.-n+2]$	0	0.301030	9.698970	—	9.698970	0.301030
	1	0.845098	0.698970	0.477121	0.000000	0.000000_n
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,2}[n.-n]$	0	—	0.301030_n	1.000000_n	1.380211_n	1.643453_n
	1	0.778151	1.000000	1.146128	1.255273	1.342423
	2	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0.903090
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,2}[n.-n-2]$	0	0.301030	1.130334	1.531479	1.802774	2.008600
	1	0.845098	1.113943	1.278754	1.397940	1.491362
	2	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	0	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	0	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	0	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n
$\overline{\overline{O}}^{3,i}_{0,0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	0	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n

[1]) Für $n=0$ keine Correction an $\gamma_0^{3,n}$.

XVIII. $\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3\left(\frac{r'}{a'}\right)^2(\varepsilon, g')$; (97) [1]

5	6	7	8	9	10	Faktor
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	$\frac{1}{a^2}2\gamma_i^{3.n}$
—	—	—	—	—	—	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
1.000000_n	1.079181_n	1.146128_n	1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	»
0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	0.301030_n	
0.602060_n	0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
1.204120	1.278754	1.342423	1.397940	1.447158	1.491362	»
0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	0.301030	
—	—	—	—	—	—	»
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
0.698970_n	0.778151_n	0.845098_n	0.903090_n	0.954243_n	1.000000_n	»
1.342423	1.414973	1.477121	1.531479	1.579784	1.623249	
0.903090	0.903090	0.903090	0.903090	0 903090	0.903090	
1.653213	1.819544	1.959041	2.079181	2.184691	2.278754	»
1.322219	1.397940	1.462398	1.518514	1.568202	1.612784	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
—	—	—	—	—	—	»
0.602060	0.778151	0.903090	1.000000	1.079181	1.146128	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
1.602060	1.778151	1.924279	2.049218	2.158362	2.255273	»
1.204120_n	1.255273_n	1.301030_n	1.342423_n	1.380211_n	1.414973_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
—	—	—	—	—	—	»
1.556303_n	1.623249_n	1.681241_n	1.732394_n	1.778151_n	1.819544_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
2.204120_n	2.357935_n	2.488551_n	2.602060_n	2.702431_n	2.792392_n	»
1.748188_n	1.819544_n	1.880814_n	1.934498_n	1.982271_n	2.025306_n	
0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	0.903090_n	
0.653213	0.903090	1.096910	1.255273	1.389166	1.505150	»
0.477121_n	$0.698970_{n'}$	0.845098_n	0.954243_n	1.041393_n	1.113943_n	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
1.845098_n	2.008600_n	2.146128_n	2.264818_n	2.369216_n	2.462398_n	»
1.414973	1.477121	1.531479	1.579784	1.623249	1.662758	
0.903090	0.903090	0.903090	0 903090	0.903090	0.903090	
2.174641	2.313867	2.433770	2.539076	2.632963	2.717671	»
1.568202	1.633468	1.690196	1.740363	1.785330	1.826075	
0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	0.602060	
0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	$\frac{1}{2a^3}2\gamma_i^{5.n}$
0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	0.477121	»
0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	»
0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	0.477121_n	»

[1]) Für $n=0$ keine Correction an $\gamma_0^{3.n}$.

XIX. $\gamma_i^{s.n}$; (52) [1])

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$\gamma_0^{1.n}$	2.003942	[0.363952]	0.960347	0.565396	0.190677	9.827707	9.472424	9.122567
$\gamma_1^{1.n}$	0.865018	0.435643	0.045300	9.673405	9.312349	8.958453	8.609647	8.264652
$\gamma_2^{1.n}$	0.088068	9.701970	9.332699	8.973436	8.620846	8.273036	7.928826	7.587427
$\gamma_3^{1.n}$	9.405033	9.038199	8.680615	8.329257	7.982391	7.638928	7.298136	6.959500
$\gamma_4^{1.n}$	8.765310	8.409301	8.059104	7.713133	7.370382	7.030171	6.692017	6.355564
$\gamma_0^{3.n}$	[1.237104]	1.412320	1.177257	0.918827	0.647361	0.367553	0.081940	9.792052
$\gamma_1^{3.n}$	1.409862	1.167431	0.904958	0.630927	0.349344	0.062429	9.771544	9.477587
$\gamma_2^{3.n}$	1.077160	0.811115	0.534767	0.251556	9.963432	9.671615	9.376915	9.079904
$\gamma_0^{5.n}$	1.343162	1.274712	1.138551	0.963137	0.762269	0.543600		
$\gamma_1^{5.n}$	1.533938	1.381781	1.196564	0.989102	0.765704	0.530348		

XIX a. $\bar{\gamma}_i^{s.n}$; (118) [1])

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$\bar{\gamma}_0^{1.n}$	1.886750	[0.827243]	1.295231	1.018354	0.735957	0.448901	0.158125
$\bar{\gamma}_1^{1.n}$	1.253417	0.935199	0.630782	0.329705	0.029124	9.728094	9.426293
$\bar{\gamma}_2^{1.n}$	0.707499	0.389280	0.077608	9.768684	9.460928	9.153595	8.846308
$\bar{\gamma}_3^{1.n}$	0.175093	9.856871	9.542444	9.230035			
$\bar{\gamma}_0^{3.n}$	[1.837514]	1.947023	1.784236	1.589734	1.374738	1.145252	0.904921
$\bar{\gamma}_1^{3.n}$	2.070065	1.881255	1.668663	1.440257	1.200396	0.951786	0.696212
$\bar{\gamma}_2^{3.n}$	1.876091	1.650902	1.412796	1.165194			
$\bar{\gamma}_0^{5.n}$	2.075727	2.031053	1.930281	1.792365			

[1]) Diesen Tafeln liegen die Anfangswerte

$$\mu = \frac{1}{3};\ \log \alpha = 9.681781;\ \log \beta^2 = 9.477621$$

zum Grund. Die nach den Formeln (53) und den Bemerkungen bei (118) corrigirten Werte der γ und $\bar{\gamma}$ für $n = 1$ und $n = 0$ sind in Klammern angeführt. Siehe übrigens (119) und (120).

Uncorrigirte Werte: $\log \gamma_0^{1.1} = 1.398708$; $\log \gamma_0^{3.0} = 1.592319$

$\log \bar{\gamma}_0^{1.1} = 1.568530$; $\log \bar{\gamma}_0^{3.0} = 2.051109$.

Die numerischen Werte der Grössen γ und $\bar{\gamma}$ enthalten schon die Jupitersmasse ($\log m = 6.979689$) als Faktor und sind in Bogensecunden ausgedrückt.

XX. $a\Omega(\varepsilon, g')$; (90) (91)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$O_{0.0}[n.-n]$	2.003942	0.664982	1.261377	0.866426	0.491707	0.128737	9.773454	9.423597
$O_{1.0}[n+1.-n]$	1.166048_n	1.037703_n	0.647360_n	0.275465_n	9.914409_n	9.560513_n	9.211707_n	8.866712_n
$O_{1.0}[n-1.-n]$	1.166048_n	1.304365_n	1.889072_n	1.662756_n	1.408932_n	1.140319_n	0.862451_n	0.578246_n
$O_{0.1}[n.-n+1]$	2.062841	1.037703	1.140351_n	1.107854_n	0.928717_n	0.700416_n	0.447919_n	0.181192_n
$O_{0.1}[n.-n-1]$	2.062841	1.468368	2.121308	1.877424	1.614403	1.340131	1.058434	0.77146
$O_{2.0}[n+2.-n]$	1.087348	0.976863	0.595596	0.229262	9.871985	9.520834	9.174109	8.83075
$O_{2.0}[n.-n]$	1.388378	1.558139	1.036178_n	0.86642_n	0.63864_n	0.38501_n	0.11688_n	9.83950_n
$O_{2.0}[n-2.-n]$	1.087347	1.555320	2.118029	2.090943	1.973971	1.809518	1.615709	1.401955
$O_{1.1}[n+1.-n+1]$	1.730538_n	1.475226_n	0.896627_n	0.177556_n	9.18421	9.63042	9.54734	9.36626
$O_{1.1}[n-1.-n+1]$	1.730538_n	$1.71335o_n$	1.675580	1.877424	1.832783	1.704097	1.531625	1.332042
$O_{1.1}[n+1.-n-1]$	1.730538_n	1.866271_n	1.637490_n	1.382613_n	1.113449_n	0.835256_n	0.550842_n	0.261881_n
$O_{1.1}[n-1.-n-1]$	1.730538_n	2.121560_n	2.757618_n	2.678143_n	2.534293_n	2.353503_n	2.148717_n	1.927081_n
$O_{0.2}[n.-n+2]$	2.411658	1.526429	0.923278	0.730098	0.787355	0.752622	0.644363	0.489765
$O_{0.2}[n.-n]$	1.730536	1.727077	2.170342_n	2.198602_n	2.103147_n	1.950012_n	1.763154_n	1.554094_n
$O_{0.2}[n.-n-2]$	2.411658	2.137801	2.822535	2.691256	2.517872	2.317978	2.099816	1.868286
$O_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	1.254293	1.730539	1.495476	1.237046	0.965580	0.685772	0 400159	0.110271
$O_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	1.254293	1.730539	1.495476	1.237046	0.965580	0.685772	0.400159	0.110271
$O_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	1.254293_n	1.730538_n	1.495476_n	1.237046_n	0.965580_n	0.685772_n	0.400159_n	0.110271_n
$O_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	1.254293_n	1.730538_n	1.495476_n	1.237046_n	0.965580_n	0.685772_n	0.400159_n	0.110271_n

XX a. $a\Omega(\varepsilon, y')$; (90) (91) (117)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$O_{0.0}[n.-n]$	1.886750_n	1.128273_n	1.596261_n	1.319384_n	1.036987_n	0.74993_n	0.45916_n
$O_{1.0}[n+1.-n]$	1.554447	1.537259	1.232842	0.931765	0.63118	0.33015	0.02835
$O_{1.0}[n-1.-n]$	1.554447	1.787657	2.242966	2.126216	1.96089	1.76615	1.55155
$O_{0.1}[n.-n+1]$	2.052663_n	1.537258_n	1.34976	1.52090	1.45317	1.30859	1.12467
$O_{0.1}[n.-n-1]$	2.052663_n	1.945468_n	2.467431_n	2.336818_n	2.163859_n	1.964257_n	1.74630_n
$O_{2.0}[n.-n]$	1.88446_n	—	—	—			
$O_{2.0}[n-2.-n]$	—	—	—	2.571936_n			
$O_{1.1}[n-1.-n+1]$	—	2.248052	—	—			
$O_{1.1}[n-1.-n-1]$	—	—	3.129205	—			
$O_{0.2}[n.-n]$	2.171238_n	—	—	—			
$O_{0.2}[n.-n-2]$	—	2.628342_n	—	—			
$O_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	—	—	2.024257_n	—			
$O_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	—	2.171238	—	—			

XXI. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, g')$; (90) (91)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$P_{0.0}[n.-n]$	—	0.664982	1.562407	1.343547	1.093767	0.827707	0.551605	0.268695
$P_{1.0}[n+1.-n]$	1.166048_n	1.338733_n	1.124481_n	0.877525_n	0.613379_n	0.338664_n	0.056805_n	9.769802_n
$P_{1.0}[n-1.-n]$	1.166048	—	1.889072_n	1.963786_n	1.886054_n	1.742378_n	1.561420_n	1.356397_n
$P_{0.1}[n.-n+1]$	—	1.037703	1.441383_n	1.584976_n	1.530778_n	1.399386_n	1.226071_n	1.026288_n
$P_{0.1}[n.-n-1]$	—	1.468368	2.422338	2.354545	2.216463	2.039102	1.836584	1.616560
$P_{2.0}[n+2.-n]$	1.388378	1.453985	1.197657	0.928234	0.650137	0.365928	0.077201	9.78500
$P_{2.0}[n.-n]$	—	1.558139	1.337208_n	1.343544_n	1.240692_n	1.083975_n	0.89503_n	0.68459_n
$P_{2.0}[n-2.-n]$	1.388378_n	1.555320_n	—	2.090943	2.275001	2.286640	2.217770	2.100926
$P_{1.1}[n+1.-n+1]$	1.730538_n	1.776256_n	1.373749_n	0.779616_n	9.88317	0.40858	0.39243	0.26935
$P_{1.1}[n-1.-n+1]$	1.730538	—	1.675580	2.178453	2.309903	2.306157	2.230597	2.110196
$P_{1.1}[n+1.-n-1]$	1.730538_n	2.167300_n	2.114611_n	1.984673_n	1.812418_n	1.613407_n	1.395941_n	1.164971_n
$P_{1.1}[n-1.-n-1]$	1.730538	—	2.757618_n	2.979173_n	3.011415_n	2.955564_n	2.847688_n	2.705232_n
$P_{0.2}[n.-n+2]$	—	1.526429	1.224310	1.207219	1.389416	1.451593	1.422513	1.334864
$P_{0.2}[n.-n]$	—	1.727077	2.471372_n	2.675723_n	2.705207_n	2.648982_n	2.541305_n	2.399196_n
$P_{0.2}[n.-n-2]$	—	2.137803	3.123566	3.168378	3.119932	3.016948	2.877965	2.713385
$P_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	1.254293	2.031569	1.972597	1.839106	1.664550	1.463923	1.245257	1.013361
$P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	1.254293_n	—	1.495476	1.538076	1.442701	1.287832	1.099129	0.888422
$P_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	1.254293_n	2.031569_n	1.972597_n	1.839106_n	1.664550_n	1.463923_n	1.245257_n	1.013361_n
$P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	1.254293	—	1.495476_n	1.538076_n	1.442701_n	1.287832_n	1.099129_n	0.888422_n

XXI a. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon, g')$; (90) (91) (117)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$P_{0.0}[n.-n]$	—	1.128273_n	1.897291_n	1.796504_n	1.639047_n	1.448901_n	1.237307_n
$P_{1.0}[n+1.-n]$	1.554447	1.838289	1.709963	1.533826	1.330154	1.108304	0.873452
$P_{1.0}[n-1.-n]$	1.554447_n	—	2.242969	2.427254	2.438015	2.368205	2.250525
$P_{0.1}[n.-n+1]$	—	1.537258_n	1.650803	1.998006	2.055217	2.007568	1.90281
$P_{0.1}[n.-n-1]$	—	1.945468_n	2.768460_n	2.813940_n	2.765919_n	2.663225_n	2.524456_n
$P_{2.0}[n.-n]$	—	—	—	—			
$P_{2.0}[n-2.-n]$	—	—	—	2.571936_n			
$P_{1.1}[n-1.-n+1]$	—	—	—	—			
$P_{1.1}[n-1.-n-1]$	—	—	3.129205	—			
$P_{0.2}[n.-n]$	—	—	—	—			
$P_{0.2}[n.-n-2]$	—	2.628342_n	—	—			
$P_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	—	—	2.024257_n	—			
$P_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	—	—	—	—			

XXII. $ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (90) (91)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$Q_{0.0}[n.-n]$	1.166048	1.191187	1.612247	1.379174	1.121592	0.850569	0.571020	0.285573
$Q_{1.0}[n+1.-n]$	1.592318_n	1.610407_n	1.326358_n	1.038755_n	0.747802_n	0.454017_n	0.157871_n	9.85975_n
$Q_{1.0}[n-1.-n]$	1.592318_n	1.856350_n	2.267168_n	2.189180_n	2.047053_n	1.867655_n	1.663959_n	1.443187_n
$Q_{0.1}[n.-n+1]$	1.730538	1.610407	1.295527_n	1.567638_n	1.532728_n	1.406717_n	1.235076_n	1.035686_n
$Q_{0.1}[n.-n-1]$	1.730538	2.012409	2.488333	2.398566	2.249437	2.065447	1.858513	1.635339
$Q_{2.0}[n+2.-n]$	1.655639	1.660562	1.366001	1.070367	0.773173	0.474420	0.174240	9.87279
$Q_{2.0}[n.-n]$	1.956669	2.197441	1.693381	1.237797	0.56816	0.01502_n	0.32158_n	0.27460_n
$Q_{2.0}[n-2.-n]$	1.655639	2.154884	2.548670	2.639985	2.624447	2.544590	2.422498	2.270725
$Q_{1.1}[n+1.-n+1]$	2.227191_n	2.121600_n	1.667030_n	1.099833_n	9.82811_n	0.410087	0.44190	0.32795
$Q_{1.1}[n-1.-n+1]$	2.227191_n	2.330140_n	1.51240	2.320412	2.434747	2.411074	2.320044	2.187856
$Q_{1.1}[n+1.-n-1]$	2.227191_n	2.470437_n	2.334581_n	2.157714_n	1.955177_n	1.734965_n	1.501806_n	1.258750_n
$Q_{1.1}[n-1.-n-1]$	2.227191_n	2.700023_n	3.160604_n	3.216417_n	3.179257_n	3.085278_n	2.953329_n	2.794310_n
$Q_{0.2}[n.-n+2]$	2.283085	2.130610	1.647662	1.375302	1.428110	1.465260	1.430900	1.341947
$Q_{0.2}[n.-n]$	2.227191	2.349433	2.372603_n	2.666181_n	2.711258_n	2.659069_n	2.552342_n	2.410160_n
$Q_{0.2}[n.-n-2]$	2.283085	2.699046	3.205831	3.220977	3.158187	3 046865	2.902472	2.734109
$Q_{0.0}[n+1.-n+1]_{+\sigma}$	1.853855	2.227191	2.104900	1.938674	1.744235	1.530287	1.302089	1.063041
$Q_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	1.853855	2.227191	2.104900	1.938674	1.744235	1 530287	1.302089	1.063041
$Q_{0.0}[n+1.-n-1]_{+\delta}$	1.853855_n	2.227191_n	2.104900_n	1.938674_n	1.744235_n	1.530287_n	1.302089_n	1.063041_n
$Q_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	1.853855_n	2.227191_n	$2\ 104900_n$	1.938674_n	1.744235_n	1.530287_n	1.302089_n	1.063041_n

XXII a. $ar\frac{\partial \Omega}{\partial r}(\varepsilon, g')$; (90) (91) (117)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$Q_{0.0}[n.-n]$	1.554447_n	1.680259_n	1.982419_n	1.852089_n	1.679731_n	1.480744_n	1.263354_n
$Q_{1.0}[n+1.-n]$	2.051100	2.154049	1.942040	1.717031	1.481284	1.236784	0.98511
$Q_{1.0}[n-1.-n]$	2.051100	2.377233	2.673610	2.680281	2.615902	2.504828	2.361195
$Q_{0.1}[n.-n+1]$	2.171235_n	2.154049_n	0.93077	1.954961	2.053893	2.016009	1.91396
$Q_{0.1}[n.-n-1]$	2.171237_n	2.523932_n	2.880663_n	2.882800_n	2.814329_n	2.700073_n	2.554117_n
$Q_{2.0}[n.-n]$	2.540947_n	—	—	—			
$Q_{2.0}[n-2.-n]$	—	—	—	3.160430_n			
$Q_{1.1}[n-1.-n+1]$	—	2.921897	—	—			
$Q_{1.1}[n-1.-n-1]$	—	—	3.599312	—			
$Q_{0.2}[n.-n]$	2.757750_n	—	—	—			
$Q_{0.2}[n.-n-2]$	—	3.231938_n	—	—			
$Q_{0.0}[n-1.-n-1]_{-\sigma}$	—	—	2.689303_n	—			
$Q_{0.0}[n-1.-n+1]_{-\delta}$	—	2.757751	—	—			

XXIII. $a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}(\varepsilon, g')$; (90) (91)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$R_{0.0}[n.-n+1]_{+\pi'}$	1.254293$_n$	1.730539$_n$	1.495476$_n$	1.237046$_n$	0.965580$_n$	0.685772$_n$	0.400159$_n$	0.110271$_n$
$R_{0.0}[n.-n-1]_{-\pi'}$	1.254293	1.730539	1.495476	1.237046	0.965580	0.685772	0.400159	0.110271
$R_{1.0}[n+1.-n+1]_{+\pi'}$	1.728081	1.786680	1.524207	1.250176	0.968593	0.681678	0.390793	0.09684
$R_{1.0}[n-1.-n+1]_{+\pi'}$	1.728081	2.227192	2.200347	2.084040	1.92016	1.72679	1.51339	1.28549
$R_{1.0}[n+1.-n-1]_{-\pi'}$	1.728081$_n$	1.786680$_n$	1.524207$_n$	1.250176$_n$	0.968593$_n$	0.681678$_n$	0.390793$_n$	0.09684$_n$
$R_{1.0}[n-1.-n-1]_{-\pi'}$	1.728081$_n$	2.227192$_n$	2.200347$_n$	2.084040$_n$	1.92016$_n$	1.72679$_n$	1.51339$_n$	1.28549$_n$
$R_{0.1}[n.-n+2]_{+\pi'}$	2.097966$_n$	2.347330$_n$	1.982387$_n$	1.544690$_n$	0.96859$_n$	8.6580	0.40932	0.41785
$R_{0.1}[n.-n]_{+\pi'}$	1.72808$_n$	2.347330$_n$	2.344797$_n$	2.238377$_n$	2.079753$_n$	1.88965$_n$	1.67843$_n$	1.45209$_n$
$R_{0.1}[n.-n]_{-\pi'}$	1.72808	0.8704	1.46470$_n$	1.53136$_n$	1.44170$_n$	1.28885$_n$	1.10099$_n$	0.8906$_n$
$R_{0.1}[n.-n-2]_{-\pi'}$	2.097965	2.641056	2.539561	2.384125	2.196204	1.98660	1.76148	1.52473

XXIV. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\ \mu\varepsilon)$; (109)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$P_{0.0}(n.-n)$	—	0.664982	1.562407	1.343547	1.093767	0.827707	0.551605	0.268695
$P_{1.0}(n+1.-n)$	1.166048_n	1.306912_n	1.04220	1.16180	1.09485	0.95558	0.77690	0.57324
$P_{1.0}(n-1.-n)$	1.166048	0.187865_n	2.007742_n	2.057120_n	1.970668_n	1.822590_n	1.638981_n	1.432186_n
$P_{0.1}(n.-n+1)$	—	1.037703	1.441383_n	1.584976_n	1.530778_n	1.399386_n	1.226071_n	1.026288_n
$P_{0.1}(n.-n-1)$	—	1.468368	2.422338	2.354545	2.216463	2.039102	1.836584	1.616560
$P_{2.0}(n+2.-n)$	+ 24.4556	+ 21.4292	+ 14.9975	+ 11.9626	+ 10.0250	+ 8.0278	+ 6.0375	+ 4.2900
$P_{2.0}(n.-n)$	—	+ 42.9102	− 80.7237	− 128.5709	− 136.5571	− 119.2723	− 92.6719	− 66.5835
$P_{2.0}(n-2.-n)$	− 24.4556	− 35.6618	+ 59.7526	+ 226.3225	+ 301.9601	+ 294.9153	+ 245.0847	+ 184.2270
$P_{1.1}(n+1.-n+1)$	− 53.7698	− 59.7387	− 32.8555	− 31.6583	− 33.1811	− 30.8825	− 25.5807	− 19.3887
$P_{1.1}(n-1.-n+1)$	+ 53.7698	—	+ 56.5883	+ 176.456	+ 238.073	+ 235.820	+ 198.107	+ 150.131
$P_{1.1}(n+1.-n-1)$	− 53.7698	− 127.393	+ 134.247	+ 205.104	+ 209.428	+ 177.783	+ 135.278	+ 95.667
$P_{1.1}(n-1.-n-1)$	+ 53.7698	− 19.6010	− 836.740	− 1254.812	− 1300.987	− 1121.585	− 864.349	− 617.549
$P_{0.2}(n.-n+2)$	—	+ 33.6069	+ 16.7614	+ 16.1146	+ 24.5141	+ 28.2874	+ 26.4553	+ 21.6204
$P_{0.2}(n.-n)$	—	+ 53.3430	− 296.055	− 473.940	− 507.232	− 445.638	− 347.780	− 250.724
$P_{0.2}(n.-n-2)$	—	+ 137.3418	+ 1329.124	+ 1473.593	+ 1318.053	+ 1039.796	+ 755.032	+ 516.874
$P_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	+ 17.9595	+ 107.5397	+ 93.8852	+ 69.0408	+ 46.1902	+ 29.1020	+ 17.5896	+ 10.3124
$P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	− 17.9595	—	+ 31.2951	+ 34.5204	+ 27.7141	+ 19.4014	+ 12.5640	+ 7.7343
$P_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	− 17.9595	− 107.5397	− 93.8852	− 69.0408	− 46.1902	− 29.1020	− 17.5896	− 10.3124
$P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	+ 17.9595	—	− 31.2951	− 34.5204	− 27.7141	− 19.4014	− 12.5640	− 7.7343

XXIV a. $-a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}(\varepsilon,\ \mu\varepsilon)$; (109) (117)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$P_{0.0}(n.-n)$	—	1.128273_n	1.897291_n	1.796504_n	1.639047_n	1.448901_n	1.237307_n
$P_{1.0}(n+1.-n)$	1.554447	1.809104	0.12846_n	1.453405_n	1.564517_n	1.531760_n	1.432474_n
$P_{1.0}(n-1.-n)$	1.554447_n	0.65115	2.357168	2.518576	2.521455	2.447639	2.327530
$P_{0.1}(n.-n+1)$	—	1.537258_n	1.650803	1.998006	2.055217	2.007568	1.90281
$P_{0.1}(n.-n-1)$	—	1.945468_n	2.768460_n	2.813940_n	2.765919_n	2.663225_n	2.524456_n
$P_{2.0}(n.-n)$	—	—	—	—			
$P_{2.0}(n-2.-n)$	—	—	—	2.827335_n			
$P_{1.1}(n-1.-n+1)$	—	—	—	—			
$P_{1.1}(n-1.-n-1)$	—	—	3.286290	—			
$P_{0.2}(n.-n)$	—	—	—	—			
$P_{0.2}(n.-n-2)$	—	2.628342_n	—	—			
$P_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	—	—	2.024257_n	—			
$P_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	—	—	—	—			

XXV. $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, \mu\varepsilon)$; (109)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$Q_{0.0}(n.-n)$	1.166048	1.191187	1.612247	1.379174	1.121592	0.850569	0.571020	0.285573
$Q_{1.0}(n+1.-n)$	1.592318_n	1.551442_n	0.78522	1.11425	1.08085	0.95279	0.77886	0.57743
$Q_{1.0}(n-1.-n)$	1.592318_n	1.886572_n	2.326946_n	2.251717_n	2.110874_n	1.932202_n	1.728967_n	1.508511_n
$Q_{0.1}(n.-n+1)$	1.730538	1.610407	1.295527_n	1.567638_n	1.532728_n	1.406717_n	1.235076_n	1.035686_n
$Q_{0.1}(n.-n-1)$	1.730538	2.012409	2.488333	2.398566	2.249437	2.065447	1.858513	1.635339
$Q_{2.0}(n+2.-n)$	+ 45.2521	+ 33.0387	+ 18.1932	+ 12.7969	+ 10.2325	+ 8.0860	+ 6.0651	+ 4.3108
$Q_{2.0}(n.-n)$	+ 90.5041	+ 145.4790	− 78.0372	− 150.3088	− 160.9529	− 138.8717	− 106.3713	− 75.4394
$Q_{2.0}(n-2.-n)$	+ 45.2521	+ 167.6598	+ 486.1603	+ 603.062	+ 581.512	+ 483.152	+ 364.247	+ 256.513
$Q_{1.1}(n+1.-n+1)$	− 186.6528	− 132.3123	− 53.0375	− 37.2191	− 34.7710	− 31.4429	− 25.8706	− 19.5849
$Q_{1.1}(n-1.-n+1)$	− 150.8062	− 213.8650	+ 39.122	+ 233.763	+ 306.209	+ 291.690	+ 237.588	+ 175.832
$Q_{1.1}(n+1.-n-1)$	− 150.8062	− 226.819	+ 91.782	+ 190.030	+ 205.802	+ 178.208	+ 136.702	+ 97.017
$Q_{1.1}(n-1.-n-1)$	− 186.6527	− 569.813	− 1755.297	− 1979.765	− 1806.971	− 1449.494	− 1066.565	− 737.906
$Q_{0.2}(n.-n+2)$	+ 191.905	+ 135.0860	+ 44.4285	+ 23.7302	+ 26.7985	+ 29.1917	+ 26.9712	+ 21.9759
$Q_{0.2}(n.-n)$	+ 168.729	+ 223.580	− 235.832	− 463.640	− 514.349	− 456.109	− 356.732	− 257.134
$Q_{0.2}(n.-n-2)$	+ 191.904	+ 500.088	+ 1606.316	+ 1663.322	+ 1439.418	+ 1113.949	+ 798.862	+ 542.138
$Q_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	+ 71.4259	+ 168.7297	+ 127.3208	+ 86.8308	+ 55.4926	+ 33.9068	+ 20.0488	+ 11.5622
$Q_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	+ 71.4259	+ 168.7297	+ 127.3208	+ 86.8308	+ 55.4926	+ 33.9068	+ 20.0488	+ 11.5622
$Q_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	− 71.4259	− 168.7297	− 127.3208	− 86.8308	− 55.4926	− 33.9068	− 20.0488	− 11.5622
$Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	− 71.4259	− 168.7297	− 127.3208	− 86.8308	− 55.4926	− 33.9068	− 20 0488	− 11.5622

XXV a. $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}(\varepsilon, \mu\varepsilon)$; (109) (117)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$Q_{0.0}(n.-n)$	1.554447_n	1.680259_n	1.982419_n	1.852089_n	1.679731_n	1.480744_n	1.263354_n
$Q_{1.0}(n+1.-n)$	2.051100	2.102478	1.370780	1.279046_n	1.524901_n	1.520733_n	1.431576_n
$Q_{1.0}(n-1.-n)$	2.051100	2.405388	2.728890	2.740423	2.678275	2.568415	2.425524
$Q_{0.1}(n.-n+1)$	2.171235_n	2.154050_n	0.93077	1.954961	2.053893	2.016009	1.91396
$Q_{0.1}(n.-n-1)$	2.171238_n	2.523932_n	2.880663_n	2.882800_n	2.814330_n	2.700073_n	2.554117_n
$Q_{2.0}(n.-n)$	2.540947_n	—	—	—			
$Q_{2.0}(n-2.-n)$	—	—	—	3.292562_n			
$Q_{1.1}(n-1.-n+1)$	—	2.921897	—	—			
$Q_{1.1}(n-1.-n-1)$	—	—	3.675275	—			
$Q_{0.2}(n.-n)$	2.757750_n	—	—	—			
$Q_{0.2}(n.-n-2)$	—	3.231938_n	—	—			
$Q_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	—	—	2.689303_n	—			
$Q_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	—	2.757751	—	—			

XXVI. $a^2 \frac{\partial \Omega}{\partial Z}(\varepsilon, \mu\varepsilon)$; (109)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$R_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	1.254293_n	1.730539_n	1.495476_n	1.237046_n	0.965580_n	0.685772_n	0.400159_n	0.110271_n
$R_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	1.254293	1.730539	1.495476	1.237046	0.965580	0.685772	0.400159	0.110271
$R_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	+ 59.4529	+ 61.1900	+ 23.0038	+ 6.2832	+ 0.0644	− 1.6623	− 1.7288	− 1.3283
$R_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	+ 47.4799	+ 168.730	+ 169.048	+ 132.858	+ 92.444	+ 59.775	+ 36.801	+ 21.875
$R_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	− 47.4799	− 25.3434	− 2.1404	+ 5.2236	+ 6.0944	+ 4.8959	+ 3.4040	+ 2.1877
$R_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	− 59.4529	− 204.577	− 189.911	− 144.365	− 98.603	− 63.009	− 38.476	− 22.734
$R_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	− 125.304	− 222.500	− 96.0256	− 35.0502	− 9.3024	+ 0.0455	+ 2.5664	+ 2.6173
$R_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	− 53.466	− 222.500	− 221.206	− 173.132	− 120.158	− 77.562	− 47.690	− 28.320
$R_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	+ 53.466	+ 7.420	− 29.154	− 33.991	− 27.650	− 19.447	− 12.618	− 7.773
$R_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	+ 125.304	+ 437.579	+ 346.387	+ 242.173	+ 157.110	+ 96.961	+ 57.741	+ 33.476

XXVII. $F_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (112) (113) [1])

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$F_{0.0}(n.-n)$	—	1.142103	2.039528	1.820669	1.570888	1.304828	1.028726	0.745816
$F_{1.0}(n+1.-n)$	1.467078_n	1.736673_n	9.99625	1.368692	1.410512	1.316417	1.16286	0.97528
$F_{1.0}(n-1.-n)$	1.467078	1.468369_n	2.622592_n	2.613024_n	2.503052_n	2.342290_n	2.150740_n	1.938503_n
$F_{0.1}(n.-n+1)$	—	1.514824	1.918504_n	2.062097_n	2.007899_n	1.876507_n	1.703192_n	1.503409_n
$F_{0.1}(n.-n-1)$	—	1.945489	2.899459	2.831666	2.693584	2.516223	2.313705	2.093681
$F_{2.0}(n+2.-n)$	1.689409	1.765868	1.391119	1.254855	1.215331	1.165378	1.078960	0.95854
$F_{2.0}(n.-n)$	—	2.200537	1.777814_n	2.390631_n	2.497326_n	2.472914_n	2.382198_n	2.250477_n
$F_{2.0}(n-2.-n)$	1.689409_n	0.82831_n	2.827765	[3 053698]	3.096056	3.048067	2.946066	2.808088
$F_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.031568_n	2.204808_n	1.799716_n	1.740463_n	1.817902_n	1.832452_n	1.780066_n	1.679196_n
$F_{1.1}(n-1.-n+1)$	2.031568	$[1.796505_n]$	2.388764	2.808369	2.911800	2.893839	2.809668	2.683494
$F_{1.1}(n+1.-n-1)$	2.031568_n	2.529024_n	2.259341	2.616179	2.678206	2.634246	2.532433	2.393525
$F_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.031568	2.343417_n	$[3.524651_n]$	3.650040_n	3.644417_n	3.568185_n	3.447550_n	3.296347_n
$F_{0.2}(n.-n+2)$	—	2.003550	1.701431	1.684340	1.866537	1.928714	1.899634	1.811985
$F_{0.2}(n.-n)$	—	2.204198	2.948493_n	3.152844_n	3.182328_n	3.126103_n	3.018426_n	2.876317_n
$F_{0.2}(n.-n-2)$	—	[2.614924]	3.600687	3.645499	3.597053	3.494069	3.355086	3.190506
$F_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	1.731414	2.508690	2.449718	2.316227	2.141671	1.941044	1.722378	1.490482
$F_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	1.731414_n	—	[1.972597]	2.015197	1.919822	1.764953	1.576250	1.365543
$F_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	1.731414_n	2.508690_n	2.449718_n	2.316227_n	2.141671_n	1.941044_n	1.722378_n	1.490482_n
$F_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	1.731414	—	1.972597_n	2.015197_n	1.919822_n	1.764954_n	1.576250_n	1.365543_n

XXVII a. $F_{1.p.q}(n+r.-n+s)+f_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (117) (144) [1])

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$F_{0.0}(n.-n)+f$	—	1.67435_n	2.46476_n	2.34411_n	2.17400_n	1.97509_n	1.75705_n
$F_{1.0}(n+1.-n)+f$	1.855477	2.279028	2.050353	0.76923_n	1.789062_n	1.869078_n	1.81612_n
$F_{1.0}(n-1.-n)+f$	1.855480_n	1.817790	3.262499	3.212111	3.147691	3.039251	2.89779
$F_{0.1}(n-n+1)+f$	—	2.01439_n	2.17849	2.52060	2.57358	2.52196	2.41373
$F_{0.1}(n.-n-1)+f$	—	2.64445_n	3.40715_n	3.39752_n	3.32279_n	3.20421_n	3.05491_n
$F_{2.0}(n.-n)+f$	—	—	—	—			
$F_{2.0}(n-2.-n)+f$	—	—	—	[3.576337n]			
$F_{1.1}(n-1.-n+1)+f$	—	[2.325286]	—	—			
$F_{1.1}(n-1.-n-1)+f$	—	—	[3.930765]	—			
$F_{0.2}(n.-n)+f$	—	—	—	—			
$F_{0.2}(n.-n-2)+f$	—	$[3.105461_n]$	—	—			
$F_{0.0}(n\ \ 1.-n-1)_{-\sigma}+f$	—	—	[2.501377n]	—			
$F_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}+f$	—	—	—	—			

[1]) Diejenigen Coëfficienten, welche bei der Integration den Divisor Null bekommen, sind in diesen und den folgenden Tafeln in Klammern angeführt.

XXVIII. $G_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (112) (113)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$G_{0.0}(n.-n)$	1.166048	0.798190	1.506096$_n$	1.304736$_n$	1.064035$_n$	0.80358$_n$	0.53127$_n$	0.25113$_n$
$G_{1.0}(n+1.-n)$	1.388378$_n$	0.77531$_n$	1.309249$_n$	1.252976$_n$	1.135343$_n$	0.97538$_n$	0.78665$_n$	0.57755$_n$
$G_{1.0}(n-1.-n)$	[1.730538$_n$]	1.648657$_n$	2.151607	2.145179	2.034687	1.873013	1.680614	1.467658
$G_{0.1}(n.-n+1)$	1.730538	1.277893	1.550375	1.601649	1.528818	1.391930	1.216875	1.016682
$G_{0.1}(n.-n-1)$	1.730538	1.644396	2.344485$_n$	2.305554$_n$	2.180779$_n$	2.011054$_n$	1.813488$_n$	1.596931$_n$
$G_{2.0}(n+2.-n)$	1.317990	0.74091	0.83758$_n$	0.98332$_n$	0.97419$_n$	0.89828$_n$	0.78081$_n$	0.63402$_n$
$G_{2.0}(n.-n)$	1.956669	1.623598	1.981866	2.156563	2.173618	2.109355	1.995800	1.849145
$G_{2.0}(n-2.-n)$	1.843281	2.068323	2.485661$_n$	2.664910$_n$	2.684110$_n$	2.622470$_n$	2.511505$_n$	2.367199$_n$
$G_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.123470$_n$	1.630471$_n$	0.68048	1.390801	1.501662	1.487832	1.408976	1.288359
$G_{1.1}(n-1.-n+1)$	2.310855$_n$	2.147268$_n$	2.247220$_n$	2.433725$_n$	2.485537$_n$	2.448258$_n$	2.354677$_n$	2.223127$_n$
$G_{1.1}(n+1.-n-1)$	1.986935$_n$	1.65831$_n$	2.342642$_n$	2.387943$_n$	2.354183$_n$	2.265292$_n$	2.138016$_n$	1.98293$_n$
$G_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.380976$_n$	2.530850$_n$	3.008332	3.164027	3.166264	3.092792	2.973244	2.822463
$G_{0.2}(n.-n+2)$	2.283087	1.831692	1.037653	0.92937$_n$	1.346933$_n$	1.437483$_n$	1.413959$_n$	1.327663$_n$
$G_{0.2}(n.-n)$	2.227191	2.067792	2.551789	2.685061	2.699970	2.638656	2.529979	2.387948
$G_{0.2}(n.-n-2)$	2.283085	2.352962	3.021987$_n$	3.108519$_n$	3.077981$_n$	2.984817$_n$	2.851993$_n$	2.691621$_n$
$G_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	1.550313	1.666047$_n$	1.781393$_n$	1.709700$_n$	1.566883$_n$	1.385557$_n$	1.179851$_n$	0.95725$_n$
$G_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	2.030782	2.227191	1.811110	1.250176	8.807	0.68984$_n$	0.70580$_n$	0.59178$_n$
$G_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	1.550313$_n$	1.666047	1.781393	1.709700	1.566883	1.385557	1.179851	0.95725
$G_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	2.030782$_n$	2.227191$_n$	1.811110$_n$	1.250176$_n$	8.807$_n$	0.68984	0.70580	0.59178

XXVIII a. $G_{1.p.q}(n+r.-n+s) + g_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (117) (144)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$G_{0.0}(n.-n)+g$	1.55445$_n$	1.34784$_n$	1.85130	1.78368	1.63842	1.45364	1.24450
$G_{1.0}(n+1.-n)+g$	1.88445	1.53410	1.58185	1.64441	1.64198	1.57426	1.46046
$G_{1.0}(n-1.-n)+g$	[2.171238]	2.256929	2.521708$_n$	2.648844$_n$	2.628003$_n$	2.537563$_n$	2.405278$_n$
$G_{0.1}(n.-n+1)+g$	2.12998$_n$	1.86727$_n$	1.93153$_n$	2.06791$_n$	2.08761$_n$	2.02859$_n$	1.91916$_n$
$G_{0.1}(n.-n-1)+g$	2.24357$_n$	2.25478$_n$	2.71956	2.80662	2.77112	2.67303	2.53585
$G_{2.0}(n.-n)+g$	2.540948$_n$	—	—	—			
$G_{2.0}(n-2.-n)+g$	—	—	—	3.236126			
$G_{1.1}(n-1.-n+1)+g$	—	2.770456	—	—			
$G_{1.1}(n-1.-n-1)+g$	—	—	3.444345$_n$	—			
$G_{0.2}(n.-n)+g$	2.757750$_n$	—	—	—			
$G_{0.2}(n.-n-2)+g$	—	3.033963$_n$	—	—			
$G_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}+g$	—	—	2.534332$_n$	—			
$G_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}+g$	—	2.757751	—	—			

XXIX. $H_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (112) (113)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$H_{0.0}(n.-n)$	1.166048$_n$	1.394063$_n$	2.056786$_n$	1.832872$_n$	1.580363$_n$	1.312583$_n$	1.035294$_n$	0.75152$_n$
$H_{1.0}(n+1.-n)$	[1.730538]	1.872069	1.606812	9.2797	1.111582$_n$	1.144213$_n$	1.042012$_n$	0.88233$_n$
$H_{1.0}(n-1.-n)$	1.388378	2.001088	2.693159	[2.655759]	2.533598	2.366030	2.170144	1.954906
$H_{0.1}(n.-n+1)$	1.730538$_n$	[1.796505$_n$]	1.875110	2.056395	2.008550	1.878965	1.706215	1.506565
$H_{0.1}(n.-n-1)$	1.730538$_n$	2.208714$_n$	[2.922590$_n$]	2.846841$_n$	2.704856$_n$	2.525183$_n$	2.321139$_n$	2.100031$_n$
$H_{2.0}(n+2.+n)$	1.843281$_n$	1.899284$_n$	1.091522$_n$	0.38326$_n$	0.52683$_n$	0.72441$_n$	0.76907$_n$	0.72374$_n$
$H_{2.0}(n.-n)$	1.956669$_n$	2.437090$_n$	2.138148$_n$	1.959563	2.314520	2.356098	2.296269	2.182486
$H_{2.0}(n-2.-n)$	1.317990$_n$	2.242769$_n$	2.963676$_n$	3.129786$_n$	3.148599$_n$	3.088134$_n$	2.978428$_n$	2.835225$_n$
$H_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.380976	2.386917	1.745125	1.344715	1.523691	1.638171	1.640736	1.572252
$H_{1.1}(n-1.-n+1)$	1.986935	2.424143	2.300330$_n$	2.820913$_n$	2.929622$_n$	2.910584$_n$	2.824655$_n$	2.696858$_n$
$H_{1.1}(n+1.-n-1)$	2.310855	2.669233	2.097663	2.235319$_n$	2.489140$_n$	2.507551$_n$	2.437007$_n$	2.316940$_n$
$H_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.123469	2.870003	3.602176	3.696005	3.676799	3.593103	3.467771	3.313350
$H_{0.2}(n.-n+2)$	2.283087$_n$	2.305996$_n$	1.891824$_n$	1.747873$_n$	1.879822$_n$	1.933314$_n$	1.902448$_n$	1.814359$_n$
$H_{0.2}(n.-n)$	2.227191$_n$	2.518864$_n$	2.918000	3.149687	3.184355	3.129492	3.022137	2.880002
$H_{0.2}(n.-n-2)$	2.283085$_n$	2.889174$_n$	3.629874$_n$	3.663749$_n$	3.610184$_n$	3.504273$_n$	3.363410$_n$	3.197525$_n$
$H_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	2.030782$_n$	2.584115$_n$	2.498437$_n$	2.352014$_n$	2.169889$_n$	1.964310$_n$	1.742159$_n$	1.507681$_n$
$H_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	1.550313$_n$	2.227191$_n$	2.278550$_n$	2.192767$_n$	2.045013$_n$	1.861592$_n$	1.654915$_n$	1.431859$_n$
$H_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	2.030782	2.584115	2.498437	2.352014	2.169889	1.964310	1.742159	1.507681
$H_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	1.550313	2.227191	2.278550	2.192767	2.045013	1.861592	1.654915	1.431859

XXIX a. $H_{1.p.q}(n+r.-n+s) + h_{0\,p.q}(n+r.-n+s)$; (117) (144)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$H_{0.0}(n.-n)+h$	1.55445	1.69885	2.68291	2.42222	2.21850	2.00496	1.77895
$H_{1.0}(n+1.-n)+h$	[2.171238$_n$]	2.415572$_n$	2.61251$_n$	2.037271$_n$	8.7404	1.59579	1.6624
$H_{1.0}(n-1.-n)+h$	1.884454$_n$	2.438967$_n$	2.954440$_n$	[3.149823$_n$]	3.289228$_n$	3.112052$_n$	2.94565$_n$
$H_{0.1}(n.-n+1)+h$	2.24357	[2.32528]	2.13204$_n$	2.53928$_n$	2.59253$_n$	2.53795$_n$	2.42707$_n$
$H_{0.1}(n.-n-1)+h$	2.12998	2.54263	[3.28629]	3.54060	3.38957	3.24486	3.08300
$H_{2.0}(n.-n)+h$	2.540947	—	—	—			
$H_{2.0}(n-2.-n)+h$	—	—	—	3.452884			
$H_{1.1}(n-1.-n+1)+h$	—	3.005368$_n$	—	—			
$H_{1.1}(n-1.-n-1)+h$	—	—	3.774258$_n$	—			
$H_{0.2}(n.-n)+h$	2.757750	—	—	—			
$H_{0.2}(n.-n-2)+h$	—	3.250657	—	—			
$H_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}+h$	—	—	2.708055	—			
$H_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}+h$	—	2.757751$_n$	—	—			

XXX. $G_{0.p,q}(n+r.-n+s)$; (112)

Neigungsstörungen.

	$n=0$	1	2	3	4	5
$G_{0\,0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	0.95326	1.429510	1.194445	0.93602	0.66455	0.38473
$G_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	0.95326_n	1.429510_n	1.194445_n	0.93602_n	0.66455_n	0.38473_n
$G_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	1.587779_n	1.759517_n	1.433760_n	1.070839_n	0.66756_n	0.20249_n
$G_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	1.704829_n	2.217404_n	2.118814_n	1.965292_n	1.77872_n	1.57009_n
$G_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	1.514809	1.597220	1.223176	0.77947	0.19640	8.3579_n
$G_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	1.753320	2.262197	2.151976	1.991548	1.80043	1.58860
$G_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	1.796936	2.046299	1.681357	1.243661	0.66756	8.35706_n
$G_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	1.427051	2.046299	2.043767	1.937347	1.77873	1.58861
$G_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	1.427051_n	0.569378_n	1.163679	1.230329	1.14066	0.98782
$G_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	1.796935_n	2.340027_n	2.238531_n	$2\,083095_n$	1.89518_n	1.68557_n

XXXI. $H_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (112)

Neigungsstörungen.

	$n=0$	1	2	3	4	5
$H_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	0.95326_n	$[1.429509_n]$	1.194446_n	0.936016_n	0.66455_n	0.38474_n
$H_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	0.95326	1.429509	[1.194446]	0.936016	0.66455	0.38474
$H_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	1.753320	2.046105	1.766744	1.462875	1.14268	0.80918
$H_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	1.514809	2.046105	2.000742	1.875404	1.70622	1.50937
$H_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	1.704830_n	1.969773_n	1.681357_n	1.366955_n	1.03382_n	0.68372_n
$H_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	1.587779_n	2.111004_n	2.043766_n	1.907478_n	1.73176_n	1.53058_n
$H_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	1.796936_n	2.046299_n	1.681357_n	1.243661_n	0.66756_n	8.35706
$H_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	1.427051_n	2.046299_n	2.043767_n	1.937347_n	1.77873_n	1.58861_n
$H_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	1.427051	0.569378	1.163679_n	1.230329_n	1.14066_n	0.98782_n
$H_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	1.796935	2.340027	2.238531	2.083095	1.89518	1.68557

XXXII. $A_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (199) (201)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$A_{0.0}(n.-n)$	[1.467078$_n$]	1.995238$_n$	2.436963	1.62009	1.08025	0.6251	0.2106	9.8196
$A_{1.0}(n+1.-n)$	1.850378	1.345146	2.474426$_n$	1.65422$_n$	1.05204$_n$	0.4838$_n$	9.8811$_n$	9.0997$_n$
$A_{1.0}(n-1.-n)$	1.850378	2.183808	3.209056	2.475213	2.572950$_n$	2.027652$_n$	1.60662$_n$	1.23249$_n$
$A_{0.1}(n.-n+1)$	2.082720$_n$	1.625333$_n$	1.881355$_n$	1.68073$_n$	1.40649$_n$	1.11859$_n$	0.8255$_n$	0.5294$_n$
$A_{0.1}(n.-n-1)$	2.082721$_n$	2.732584$_n$	2.834304$_n$	2.859017	2.330335	1.92313	1.56039	1.21880
$A_{2.0}(n+2.-n)$	0.50815$_n$	2.004225	1.38267	0.2159	0.2291$_n$	0.1592$_n$	9.9165$_n$	9.6042$_n$
$A_{2.0}(n.-n)$	[2.421756$_n$]	3.025717$_n$	3.161649$_n$	2.547735$_n$	2.497864	1.80160	1.09559	8.6890
$A_{2.0}(n-2.-n)$	0.50813$_n$	2.337114	2.713373$_n$	[3.088629$_n$]	3.735864$_n$	3.494048	2.817547	2.39697
$A_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.665283$_n$	2.030076$_n$	1.81338	1.69279	1.38835	1.01820	0.5856	0.0421
$A_{1.1}(n-1.-n+1)$	2.979659	[2.651392]	2.894361$_n$	3.222225	2.755683	2.453889	2.180618	1.91407
$A_{1.1}(n+1.-n-1)$	2.979659	2.768946$_n$	2.732492	2.850018$_n$	2.237081$_n$	1.67552$_n$	1.02159$_n$	9.0257
$A_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.665283$_n$	3.223442	[3.564017]	4.301042	4.071460$_n$	3.409076$_n$	3.001510$_n$	2.66099$_n$
$A_{0.2}(n.-n+2)$	2.839389$_n$	2.700874	1.69142	1.24956	1.19214	1.10889	0.9711	0.7956
$A_{0.2}(n.-n)$	[2.528221$_n$]	3.286053$_n$	3.294552$_n$	2.935520$_n$	2.683990$_n$	2.442168$_n$	2.197817$_n$	1.94851$_n$
$A_{0.2}(n.-n-2)$	2.839387$_n$	[3.000076$_n$]	4.258723$_n$	4.043998	3.397479	3.004198	2.675902	2.37284
$A_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	2.425549	2.376485	1.999654	1.66353	1.34293	1.02940	0.7193	0.4109
$A_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	2.425549	2.783493$_n$	[2.405930$_n$]	2.801835$_n$	2.431972	1.65552	1.15706	0.7419
$A_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	2.627527	2.968169$_n$	2.288726$_n$	1.852810$_n$	1.48167$_n$	1.13787$_n$	0.8079$_n$	0.4854$_n$
$A_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	2.627526	[2.528221]	2.874712	2.582426$_n$	1.84090$_n$	1.36426$_n$	0.9651$_n$	0.6011$_n$

XXXII a. $A_{1.p.q}(n+r.-n+s) - a_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (199) (201) (216)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$A_{0.0}(n.-n)-a$	[1.85548]	2.45278	3.14427$_n$	2.29004$_n$	1.7862$_n$	1.3745$_n$	1.0032$_n$
$A_{1.0}(n+1.-n)+a$	2.259372$_n$	1.39811	3.201449	2.370402	1.82327	1.32137	0.8035
$A_{1.0}(n-1.-n)-a$	2.259374$_n$	2.558012$_n$	3.933040$_n$	3.185117$_n$	3.413322	2.84683	2.44331
$A_{0.1}(n.-n+1)-a$	2.38563	2.14672	2.20426	2.22086	2.04088	1.82197	1.5856
$A_{0.1}(n.-n-1)-a$	2.38563	3.48595	3.47338	3.65593$_n$	3.10309$_n$	2.71504$_n$	2.38243$_n$
$A_{2.0}(n.-n)-a$	[2.961428]	—	—	—			
$A_{2.0}(n-2.-n)-a$	—	—	—	[3.401713]			
$A_{1.1}(n-1.-n+1)-a$	—	[3.241071$_n$]	—	—			
$A_{1.1}(n-1.-n-1)-a$	—	—	[3.736874$_n$]	—			
$A_{0.2}(n.-n)-a$	[3.058779]	—	—	—			
$A_{0.2}(n.-n-2)-a$	—	[3.456717]	—	—			
$A_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}-a$	—	—	[2.930853]	—			
$A_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}-a$	—	[3.058781$_n$]	—	—			

XXXIII. $B_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (233)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$B_{0.0}(n.-n)$	—	1.848577	2.516088_n	1.78769_n	1.29380_n	0.8654_n	0.4677_n	0.0879_n
$B_{1.0}(n+1.-n)$	1.087348	2.056762	1.56163	0.6601	0.2838_n	0.3820_n	0.2391_n	0.0282_n
$B_{1.0}(n-1.-n)$	1.087348_n	0.9239_n	2.92756_n	1.84415_n	2.673829	2.181338	1.79237	1.43952
$B_{0.1}(n.-n+1)$	1.60560	0.9769_n	1.99649	1.86576	1.62886	1.36353	1.08504	0.7989
$B_{0.1}(n.-n-1)$	1.60560_n	2.321143	2.043455	2.990533_n	2.524563_n	2.152010_n	1.81028_n	1.48228_n
$B_{2.0}(n+2.-n)$	1.88445_n	1.69093_n	0.5686_n	0.0488	9.8725	8.4116	9.4954_n	9.5711_n
$B_{2.0}(n.-n)$	—	2.900657	2.656536_n	1.63657	1.91965	1.83006	1.66400	1.46310
$B_{2.0}(n-2.-n)$	1.88445	2.629475	3.167238	[3.257819]	3.654549	3.543485_n	2.925984_n	2.54038_n
$B_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.891101	2.411567	1.50592	0.5802	0.6797	0.8081	0.7812	0.6716
$B_{1.1}(n-1.-n+1)$	2.744689	[2.097535]	2.848219	3.271819_n	2.874158_n	2.614683_n	2.369188_n	2.12197_n
$B_{1.1}(n+1.-n-1)$	2.744690_n	3.152363	2.297951	1.56253_n	1.90318_n	1.84768_n	1.70200_n	1.51448_n
$B_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.891101_n	2.758711	$[3.700742_n]$	4.197922_n	4.134336	3.544764	3.177602	2.86241
$B_{0.2}(n.-n+2)$	2.663298	2.803449_n	1.91143_n	1.49496_n	1.43723_n	1.36384_n	1.23574_n	1.06790_n
$B_{0.2}(n.-n)$	—	2.461550	3.367567	3.096947	2.892592	2.678544	2.451784	2.21424
$B_{0.2}(n.-n-2)$	2.663296	[2.739863]	4.127909	4.123240_n	3.565450_n	3.218212_n	2.916673_n	2.63040_n
$B_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	2.527955_n	2.566271_n	2.236962_n	1.92719_n	1.62235_n	1.31876_n	1.01519_n	0.7112_n
$B_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	2.527955	2.607401_n	[2.097536]	2.659858	2.522170_n	1.85173_n	1.41029_n	1.02895_n
$B_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	2.478178_n	3.053679	2.469736	2.082678	1.73927	1.41236	1.09314	0.7779
$B_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	2.478178	—	2.725008_n	2.676912	2.045096	1.62624	1.25975	0.9153

XXXIII a. $B_{1.p.q}(n+r.-n+s) - b_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (233) (252)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$B_{0.0}(n.-n)-b$	—	2.23519_n	3.19844	2.43899	1.98769	1.60701	1.25511
$B_{1.0}(n+1.-n)-b$	1.58343_n	2.629569_n	2.517423_n	1.82626_n	0.9384_n	0.7572	0.8676
$B_{1.0}(n-1.-n)-b$	1.58343	1.86538_n	3.517548	2.46627	3.496631_n	2.98935_n	2.62216_n
$B_{0.1}(n.-n+1)-b$	2.08393_n	1.56620	2.28128_n	2.39007_n	2.25346_n	2.06043_n	1.84083_n
$B_{0.1}(n.-n-1)-b$	2.08393	2.90707_n	2.57131_n	3.75972	3.27900	2.93209	2.62479
$B_{2.0}(n.-n)-b$	—	—	—	—			
$B_{2.0}(n-2.-n)-b$	—	—	—	[3.658920$_n$]			
$B_{1.1}(n-1.-n+1)-b$	—	[2.626315]	—	—			
$B_{1.1}(n-1.-n-1)-b$	—	—	[3.940934]	—			
$B_{0.2}(n.-n)-b$	—	—	—	—			
$B_{0.2}(n.-n-2)-b$	—	[2.844869_n]	—	—			
$B_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}-b$	—	—	[2.226159_n]	—			
$B_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}-b$	—	—	—	—			

XXXIV. $C_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (280)

	$n=0$	1	2	3	4	5
$C_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	0.8283_n	1.12848	1.46745	0.9572	0.5396	0.1551
$C_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	0.8283_n	1.30457	0.8934_n	1.20902_n	0.6857_n	0.2598_n
$C_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	2.270877_n	2.115144_n	1.62809_n	1.18066_n	0.7451_n	0.3094_n
$C_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	2.121906_n	$[1.730537_n]$	2.345635	2.422824_n	1.85045_n	1.47015_n
$C_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	2.121907_n	2.472439	1.72905	1.19336	0.6986	0.2054
$C_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	2.270877_n	2.673210	[1.495477]	2.263857_n	2.276072	1.67076
$C_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	2.177147_n	2.581412	1 806295	1.18454	0.4867	8.0841_n
$C_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	—	2.523420	2.578880	2.062286	1.71960	1.40770
$C_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	—	1.04650_n	1.69879	1.35526	1.08154	0.8069
$C_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	2.177146_n	—	2.618742	2.618208_n	2.020116_n	1.62645_n

Mittlere Anomalie.

XXXV. $R_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (213)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$R_{0.0}(n.-n)$	—	2.171329_n	2.312024	1.319055	0.65428	0.10222	9.6086	9.1506
$R_{1.0}(n+1.-n)$	1.850378	1.123297	2.106449_n	1.177099_n	0.48777_n	9.8470_n	9.1821_n	8.3463_n
$R_{1.0}(n-1.-n)$	1.850378_n	2.660929_n	3.686177	2.475213	2.35110_n	1.65967_n	1.12950_n	0.6682_n
$R_{0.1}(n.-n+1)$	2.559841_n	1.625333_n	1.659506_n	1.312752_n	0.92937_n	0.55431_n	0.18864_n	9.8304_n
$R_{0.1}(n.-n-1)$	2.559842	3.209705_n	2.834304_n	2.637168	1.962358	1.446003	0.99612	0.5820
$R_{2.0}(n+2.-n)$	0.20712_n	1.578256	0.85979	9.6138	9.5601_n	9.4322_n	9.1383_n	8.7803_n
$R_{2.0}(n.-n)$	—	3.201808_n	3.036710_n	2.246705_n	2.071895	1.27872	0.4935	8.0200
$R_{2.0}(n-2.-n)$	0.20710	2.212175_n	2.889464	—	3.911955_n	3.369109	2.51652	1.97101
$R_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.540344_n	1.729046_n	1.387410	1.169911	0.78629	0.34919	9.8585	9.2639
$R_{1.1}(n-1.-n+1)$	3.155750_n	—	3.070452_n	3.097286	2.454653	2.027920	1.65774	1.31201
$R_{1.1}(n+1.-n-1)$	3.155750	2.644007_n	2.431462	2.424049_n	1.714202_n	1.07346_n	0.3526_n	8.2987
$R_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.540344	3.399533_n	—	4.477133	3.946521_n	3.108046_n	2.57554_n	2.13811_n
$R_{0.2}(n.-n+2)$	3.015480_n	2.575935	1.39039	0.8236	0.6693	0.5068	0.3021	0.0686
$R_{0.2}(n.-n)$	—	3.462144_n	3.169613_n	2.634490_n	2.258021_n	1.91929_n	1.59576_n	1.27950_n
$R_{0.2}(n.-n-2)$	3.015478	—	4.434814_n	3.919059	3.096449	2.578229	2.153023	1.77078
$R_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	2.300610	2.075455	1.57369	1.14065	0.7409	0.3604	9.9923	9.6327
$R_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	2.300610_n	2.959583	—	2.977926_n	2.307033	1.35449	0.7311	0.2190
$R_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	2.803618	2.843230_n	1.987696_n	1.42684_n	0.9588_n	0.5358_n	0.1388_n	9.7584_n
$R_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	2.803617_n	—	3.050803	2.457487_n	1.53987_n	0.9383_n	0.4423_n	9.9990_n

XXXV a. $R_{1.p.q}(n+r.-n+s)$; (215)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$R_{0.0}(n.-n)$	—	2.62887	3.01933_n	1.98901_n	1.3602_n	0.8516_n	0.4010_n
$R_{1.0}(n+1.-n)$	2.259372_n	1.1763	2.83347	1.89328	1.25900	0.68455	0.1045
$R_{1.0}(n-1.-n)$	2.259374	3.035133	4.410161_n	3.185117_n	3.19147	2.47885	1.96619
$R_{0.1}(n-n+1)$	2.86275	2.14672	1.98241	1.85288	1.56376	1.2577	0.9488
$R_{0.1}(n.-n-1)$	2.86275_n	3.96307	3.47338	3.43408_n	2.73511_n	2.23792_n	1.81816_n

Radius vector.

XXXVI. $S_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (248)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6	7
$S_{0.0}(n.-n)$	—	2.024670	2.391150_n	1.486664_n	0.86783_n	0.3425_n	9.8656_n	9.4189_n
$S_{1.0}(n+1.-n)$	1.087348	1.834913	1.193657	0.18294	9.7195_n	9.7452_n	9.5401_n	9.2749_n
$S_{1.0}(n-1.-n)$	1.087348	1.401002	3.404678_n	1.84415_n	2.45198	1.81336	1.31525	0.8752
$S_{0.1}(n.-n+1)$	2.082719	0.97686_n	1.774643	1.49778	1.15174	0.7992	0.4482	0.1000
$S_{0.1}(n.-n-1)$	2.082720	2.798264	2.043455	2.768684_n	2.156586_n	1.67489_n	1.24601_n	0.8455_n
$S_{2.0}(n+2.-n)$	1.583424_n	1.264962_n	0.04572_n	9.4467	9.2035	7.6846	8.7172_n	8.7472_n
$S_{2.0}(n.-n)$	—	3.076748	2.531597_n	1.335538	1.49368	1.30718	1.06194	0.7941
$S_{2.0}(n-2.-n)$	1.583425_n	2.504536_n	3.343329_n	—	3.830640	3.418546_n	2.624954_n	2.11441_n
$S_{1.1}(n+1.-n+1)$	2.766162	2.110537	1.07995	0.0573	0.0777	0.1391	0.0542	9.8934
$S_{1.1}(n-1.-n+1)$	2.920780_n	—	3.024310	3.146880_n	2.573128_n	2.188714_n	1.84631_n	1.5199_n
$S_{1.1}(n+1.-n-1)$	2.920781_n	3.027424	1.99692	1.13656_n	1.38030_n	1.24562_n	1.03300_n	0.7875_n
$S_{1.1}(n-1.-n-1)$	2.766162	2.934802_n	—	4.374013_n	4.009397	3.243734	2.75163	2.33953
$S_{0.2}(n.-n+2)$	2.839389	2.678510_n	1.61040_n	1.06899_n	0.9144_n	0.7618_n	0.5667_n	0.3409_n
$S_{0.2}(n.-n)$	—	2.637641	3.242628	2.795917	2.466623	2.155663	1.84972	1.54523
$S_{0.2}(n.-n-2)$	2.839387	—	4.304000	3.998301_n	3.264420_n	2.792243_n	2.39379_n	2.02834_n
$S_{0.0}(n+1.-n+1)_{+\sigma}$	2.403016_n	2.265241_n	1.810993_n	1.40431_n	1.02029_n	0.6498_n	0.2882_n	9.9330_n
$S_{0.0}(n-1.-n-1)_{-\sigma}$	2.403016_n	2.783492	—	2.835949	2.397231_n	1.55070_n	0.9843_n	0.5061_n
$S_{0.0}(n+1.-n-1)_{+\delta}$	2.654269_n	2.928740	2.168706	1.65671	1.21639	0.8103	0.4241	0.0509
$S_{0.0}(n-1.-n+1)_{-\delta}$	2.654269_n	—	2.901099_n	2.551973	1.74404	1.20027	0.7369	0.3133

XXXVI a. $S_{1.p.q}(n+r.-n+s)$; (250)

	$n=0$	1	2	3	4	5	6
$S_{0.0}(n.-n)$	—	2.41128_n	3.07350	2.13796	1.56172	1.08413	0.6530
$S_{1.0}(n+1.-n)$	1.58343_n	2.40772_n	2.14944_n	1.34914_n	0.3741_n	0.1204	0.1686
$S_{1.0}(n-1.-n)$	1.58343_n	2.34250	3.994669	2.46627	3.27478_n	2.62137_n	2.14504_n
$S_{0.1}(n.-n+1)$	2.56105_n	1.56620	2.05943_n	2.02209_n	1.77634_n	1.49616_n	1.20401_n
$S_{0.1}(n.-n-1)$	2.56105_n	3.38419_n	2.57131_n	3.53787	2.91102	2.45497	2.06052

Dritte Coordinate.

XXXVII. $D_{0.p.q}(n+r.-n+s)$; (291)

	$n=0$	1	2	3	4	5
$D_{0.0}(n.-n+1)_{+\pi'}$	1.30544$_n$	1.12848	1.24560	0.5892	0.0625	9.5908
$D_{0.0}(n.-n-1)_{-\pi'}$	1.30544	1.78169	0.89342$_n$	0.9872$_n$	0.3178$_n$	9.7827$_n$
$D_{1.0}(n+1.-n+1)_{+\pi'}$	2.145938$_n$	1.81411$_n$	1.20212$_n$	0.6578$_n$	0.1430$_n$	9.6403$_n$
$D_{1.0}(n-1.-n+1)_{+\pi'}$	2.297997	—	2.521726	2.297885$_n$	1.54942$_n$	1.04418$_n$
$D_{1.0}(n+1.-n-1)_{-\pi'}$	2.297998$_n$	2.347500	1.42802	0.7674	0.1757	9.6033
$D_{1.0}(n-1.-n-1)_{-\pi'}$	2.145938	2.849301$_n$	—	2.439948$_n$	2.151133	1.36973
$D_{0.1}(n.-n+2)_{+\pi'}$	2.353238$_n$	2.456473	1.50527	0.7586	9.9638	7.4820$_n$
$D_{0.1}(n.-n)_{+\pi'}$	—	2.699511	2.453941	1.76126	1.29364	0.8848
$D_{0.1}(n.-n)_{-\pi'}$	—	1.22259$_n$	1.57385	1.05423	0.6556	0.2840
$D_{0.1}(n.-n-2)_{-\pi'}$	2.353238	—	2.794833	2.493269$_n$	1.71909$_n$	1.20048$_n$

XXXVIII. $-\frac{\cdot 3}{3i+j}$ [1])

	$i=-3$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	
$j=+3$	9.698970	0.000000	∞	0.000000_n	9.698970_n	9.522878_n	9.397940_n	$j=+3$
$+2$	9.632023	9.875061	0.477121	0.176091_n	9.778151_n	9.574031_n	9.435728_n	$+2$
$+1$	9.574031	9.778151	0.176091	0.477121_n	9.875061_n	9.632023_n	9.477121_n	$+1$
0	9.522878	9.698970	0.000000	∞	0.000000_n	9.698970_n	9.522878_n	0
-1	9.477121	9.632023	9.875061	0.477121	0.176091_n	9.778151_n	9.574031_n	-1
-2	9.435728	9.574031	9.778151	0.176091	0.477121_n	9.875061_n	9.632023_n	-2
-3	9.397940	9.522878	9.698970	0.000000	∞	0.000000_n	9.698970_n	-3
-4	9.363178	9.477121	9.632023	9.875061	0.477121	0.176091_n	9.778151_n	-4
-5	9.330993	9.435728	9.574031	9.778151	0.176091	0.477121_n	9.875061_n	-5
-6	9.301030	9.397940	9.522878	9.698970	0.000000	∞	0.000000_n	-6
-7	9.273001	9.363178	9.477121	9.632023	9.875061	0.477121	0.176091_n	-7
-8	9.246672	9.330993	9.435728	9.574031	9.778151	0.176091	0.477121_n	-8
-9	9.221848	9.301030	9.397940	9.522878	9.698970	0.000000	∞	-9
-10	9.198367	9.273001	9.363178	9.477121	9.632023	9.875061	0.477121	-10

	$+4$	$+5$	$+6$	$+7$	$+8$	$+9$	$+10$	
$j=+3$	9.301030_n	9.221848_n	9.154902_n	9.096910_n	9.045757_n	9.000000_n	8.958607_n	$j=+3$
$+2$	9.330993_n	9.246672_n	9.176091_n	9.115393_n	9.062148_n	9.014723_n	8.971971_n	$+2$
$+1$	9.363178_n	9.273001_n	9.198367_n	9.134698_n	9.079181_n	9.029963_n	8.985759_n	$+1$
0	9.397940_n	9.301030_n	9.221848_n	9.154902_n	9.096910_n	9.045757_n	9.000000_n	0
-1	9.435728_n	9.330993_n	9.246672_n	9.176091_n	9.115393_n	9.062148_n	9.014723_n	-1
-2	9.477121_n	9.363178_n	9.273001_n	9.198367_n	9.134698_n	9.079181_n	9.029963_n	-2
-3	9.522878_n	9.397940_n	9.301030_n	9.221848_n	9.154902_n	9.096910_n	9.045757_n	-3
-4	9.574031_n	9.435728_n	9.330993_n	9.246672_n	9.176091_n	9.115393_n	9.062148_n	-4
-5	9.632023_n	9.477121_n	9.363178_n	9.273001_n	9.198367_n	9.134698_n	9.079181_n	-5
-6	9.698970_n	9.522878_n	9.397940_n	9.301030_n	9.221848_n	9.154902_n	9.096910_n	-6
-7	9.778151_n	9.574031_n	9.435728_n	9.330993_n	9.246672_n	9.176091_n	9.115393_n	-7
-8	9.875061_n	9.632023_n	9.477121_n	9.363178_n	9.273001_n	9.198367_n	9.134698_n	-8
-9	0.000000_n	9.698970_n	9.522878_n	9.397940_n	9.301030_n	9.221848_n	9.154902_n	-9
-10	0.176091_n	9.778151_n	9.574031_n	9.435728_n	9.330993_n	9.246672_n	9.176091_n	-10

[1]) Diese Tafel enthält (mit umgekehrten Zeichen) die Complement-logaritmen der Integrationsdivisoren $n+r-(n-s)\mu$ für $\mu=\frac{1}{3}$, welche den Übergang von den F, G, H zu den $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ und von den A, B, C zu den R, S, D vermitteln.

Diejenigen, in den vorangehenden Tafeln eingeklammerten Glieder, welche den Divisor Null bekommen würden, sind in der folgenden Zusammenstellung[1]) enthalten. Vergl. die Formeln (145) (202) (240).

$$D = e^{\sqrt{-1}\Delta} = e^{\sqrt{-1}(\Pi-\Pi')}\ ; \quad S = e^{\sqrt{-1}\Sigma} = e^{\sqrt{-1}(\Pi+\Pi')}\ ; \quad \vartheta_1 = e^{\sqrt{-1}\delta_1}$$

(145) $F = [\ 1.796505_n \quad 2.325286 \quad w\ ]\ \eta\eta'\ D$

$[\ 2.614924 \quad 3.105461_n\ w\ ]\ \eta'^2\ \vartheta_1^3\ D$
$[\ 3.524651_n \quad 3.930765 \quad w\ ]\ \eta\eta'\ \vartheta_1^3\ D^2$
$[\ 3.053698 \quad 3.576337_n\ w\ ]\ \eta^2\ \vartheta_1^3\ D^3$
$[\ 1.972597 \quad 2.501377_n\ w\ ]\ j^2\ \vartheta_1^3\ D^2S^{-1}$
$[\ 2.736968_n \quad — \quad]\ j^4\ \vartheta_1^3\ D^2S^{-1}$

(145) $G' = G = [\ 1.730538_n \quad 2.17124 \quad w\ ]\ \eta$

(145) $H = [\ 1.730538 \quad 2.17124_n \quad w\ ]\ \eta$
$[\ 1.796505_n \quad 2.32528 \quad w\ ]\ \eta'\ D$

$[\ 2.922590_n \quad 3.28629 \quad w\ ]\ \eta'\ \vartheta_1^3\ D^2$
$[\ 2.655759 \quad 3.149823_n\ w\ ]\ \eta\ \vartheta_1^3\ D^3$

(202) $A = [\ 1.467078_n \quad 1.85548 \quad w\ ]$

$[\ 2.528221_n \quad 3.058779 \quad w\ ]\ \eta'^2$
$[\ 2.651392 \quad 3.241071_n\ w\ ]\ \eta\eta'\ D$
$[\ 2.421756_n \quad 2.961428 \quad w\ ]\ \eta^2$
$[\ 2.528221 \quad 3.058781_n\ w\ ]\ j^2$
$[\ 3.305852_n \quad]\ j^4$

$[\ 3.000076_n \quad 3.456717 \quad w\ ]\ \eta'^2\ \vartheta_1^3\ D$
$[\ 3.564017 \quad 3.736874_n\ w\ ]\ \eta\eta'\ \vartheta_1^3\ D^2$
$[\ 3.088629_n \quad 3.401713 \quad w\ ]\ \eta^2\ \vartheta_1^3\ D^3$
$[\ 2.405930_n \quad 2.930853 \quad w\ ]\ j^2\ \vartheta_1^3\ D^2S^{-1}$
$[\ 3.344216 \quad]\ j^4\ \vartheta_1^3\ D^2S^{-1}$

[1]) Die hier vorkommenden Zahlen sind Logaritmen. Die Einheit ist die Bogensecunde. Einige mit j^4 zu multiplicirenden Glieder, welche in den Tafeln nicht aufgeführt sind, die aber onehin berechnet wurden, sind mit aufgenommen worden.

(240) $B = [\,2.097535_n \quad 2.626315\ w\,]\ \eta\eta'\ D$

$[\,2.739863 \quad 2.844869_n\ w\,]\ \eta'^2\ \vartheta_1^3\ D$
$[\,3.700742_n \quad 3.940934\ w\,]\ \eta\eta'\ \vartheta_1^3\ D^2$
$[\,3.257819 \quad 3.658920_n\ w\,]\ \eta^2\ \vartheta_1^3\ D^3$
$[\,2.097536 \quad 2.226159_n\ w\,]\ j^2\ \vartheta_1^3\ D^2S^{-1}$
$[\,2.861906_n \quad\quad\quad\

Neigungsstörungen.

$$P' = e^{\sqrt{-1}\,\Pi'}$$

(262)
$$G = 0$$
$$H = 1.429509_n\, \iota\, DP'$$
$$\quad 1.194446\ \iota\, \vartheta_1^3\, D^2P'^{-1}$$

(287)
$$C = 1.730537_n\, \iota\eta\, DP'$$
$$\quad 1.495477\ \iota\eta\, \vartheta_1^3\, D^2P'^{-1}$$

(278)
$$m = 1.429509_n\, \iota\, \mathrm{Cos}\,(\Delta + \Pi')$$
$$n = 1.429509\ \iota\, \mathrm{Sin}\,(\Delta + \Pi')$$

(271)
$$H + G' = 1.194446\ \iota\, \vartheta_1^3\, D^2P'^{-1}$$

(287)
$$C_1 = 1.730537_n\, \iota\eta\, DP'$$
$$\quad 1.671568\ \iota\eta\, \vartheta_1^3\, D^2P'^{-1}$$

Zum Schluss mögen die Formeln für die numerische Rechnung in abgekürzter Form und mit den Vernachlässigungen, die man sich bei der Ableitung genäherter Störungen gestatten kann, zusammengestellt werden.

$$\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}J\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\Psi + \Phi) = \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\Omega - \Omega')\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(i + i')$$

$$\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}J\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\Psi + \Phi) = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\Omega - \Omega')\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(i - i')$$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}J\,\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\Psi - \Phi) = \mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}(\Omega - \Omega')\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(i + i')$$

$$\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}J\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\Psi - \Phi) = \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(\Omega - \Omega')\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(i - i')$$

Controlle:
$$\frac{\mathrm{Sin}\,\Psi}{\mathrm{Sin}\,i} = \frac{\mathrm{Sin}\,\Phi}{\mathrm{Sin}\,i'} = \frac{\mathrm{Sin}\,(\Omega - \Omega')}{\mathrm{Sin}\,J}$$

$$\Pi = \pi - \Omega - \Phi\ ;\quad \Pi' = \pi' - \Omega' - \Psi$$

$$\Delta = \Pi - \Pi' \qquad \Sigma = \Pi + \Pi'$$

$$e = \operatorname{Sin}\varphi \qquad e' = \operatorname{Sin}\varphi'$$

$$\eta = \frac{e}{2} \qquad \eta' = \frac{e'}{2}$$

$$j^2 = \operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}J\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi' \; ; \; \iota = \operatorname{Sin}J\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}\varphi'$$

(187) $$-(H-G') = \mathrm{v}\,e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{V}}\,\vartheta_1^3$$

(159) $$\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\Big[F-\eta(H-G')\Big] = f\operatorname{Sin}(3\theta_1+F)$$

(208) $$\mathrm{RT}\,A_1 = a_0 + a\operatorname{Cos}(3\theta_1+A)$$

(244) $$\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,B_1 = b_0 + b\operatorname{Sin}(3\theta_1+B)$$

---

(226) $$k^2 = \frac{4f}{w^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2(1-w)$$

$$w = 1-3\mu \; ; \quad \frac{\pi}{2K} = 1 \text{ in erster Annäherung.}$$

(225) $$\varkappa = w \; ; \qquad 180^0 + G - F = 3(\mu c - c')$$

---

(228) $$r\operatorname{Cos}R = \frac{4q}{1-w} + \frac{a}{\varkappa}\operatorname{Cos}(180^0+A-F) + \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\operatorname{Cos}(180^0+\mathrm{V}-F)$$

$$r\operatorname{Sin}R = \frac{a}{\varkappa}\operatorname{Sin}(180^0+A-F) + \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\operatorname{Sin}(180^0+\mathrm{V}-F)$$

(230) $$n\,\delta z = a_0 g + \frac{l-m\eta}{2}\varepsilon^2$$

$$+ (m-2l\eta)\,\varepsilon\operatorname{Sin}\varepsilon - n\,\varepsilon\operatorname{Cos}\varepsilon$$

$$-\frac{m\eta}{2}\,\varepsilon\operatorname{Sin}2\varepsilon + \frac{n\eta}{2}\,\varepsilon\operatorname{Cos}2\varepsilon$$

$$+ (m - 2\,l\eta)\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + n\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon$$

$$- \frac{m\eta}{4}\,\mathrm{Cos}\,2\,\varepsilon - \frac{n\eta}{4}\,\mathrm{Sin}\,2\,\varepsilon$$

$$+ r\,\mathrm{Sin}\,(3\,\Theta + 180^0 + R + F)$$

$$+ \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon + 3\,\Theta + \mathrm{V})\,.$$

$$- \frac{\eta}{2}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(2\,\varepsilon + 3\,\Theta + \mathrm{V})$$

$$+ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\Sigma\,R_{0.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

$$+ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}\,\Sigma\,R_{1.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w$$

(257)
$$s\,\mathrm{Cos}\,S = \frac{b}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + B - F) - \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + \mathrm{V} - F)$$

$$s\,\mathrm{Sin}\,S = \frac{b}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + B - F) - \eta\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + \mathrm{V} - F)$$

(259)
$$2\,\nu = -\,b_0 g - m\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon$$

$$- n\ \ \mathrm{Cos}\,\varepsilon + m\ \ \mathrm{Sin}\,\varepsilon$$

$$+ s\,\mathrm{Cos}\,(3\,\Theta + 180^0 + S + F)$$

$$- \frac{1}{1+\varkappa}\frac{\mathrm{V}}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(\varepsilon + 3\,\Theta + \mathrm{V})$$

$$+ \mathrm{RT}\,\Sigma\,S_{0.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}$$

$$+ \mathrm{RT}\,\Sigma\,S_{1.p.q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w$$

Neigungsstörungen.

(274) $$H + G' = \nu e^{\sqrt{-1}\,V}\,\vartheta_1^3 + \ldots$$

(287) $$RT\,C_1 = c_0 + c\,\mathrm{Cos}\,(3\theta_1 + C)$$

---

(294)
$$t\,\mathrm{Cos}\,T = \frac{c}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + C - F) - \eta\,\frac{V}{\varkappa}\,\mathrm{Cos}\,(180^0 + V - F)$$
$$t\,\mathrm{Sin}\,T = \frac{c}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + C - F) - \eta\,\frac{V}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(180^0 + V - F)$$

(293)
$$\begin{aligned}\frac{u}{\mathrm{Cos}\,i} = {} & c_0 g - m\,\varepsilon\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon - n\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \\ & - n\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon + m\,\mathrm{Sin}\,\varepsilon \\ & + t\,\mathrm{Sin}\,(3\Theta + 180^0 + T + F) \\ & - \frac{1}{1+\varkappa}\,\frac{V}{\varkappa}\,\mathrm{Sin}\,(\varepsilon + 3\Theta + V) \\ & + \frac{IT}{\sqrt{-1}}\,\Sigma D_{0,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s} \\ & + \frac{IT}{\sqrt{-1}}\,\Sigma D_{1,p,q}(n+r.-n+s)\,y^{n+r-(n-s)\mu}\,\vartheta_1^{n-s}\,.\,w\end{aligned}$$

Hülfstafeln

zur Berechnung der grössten Glieder.

$$\text{Log } q\,; \quad k = \text{Sin } \alpha\,; \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}\,.$$

α	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0°	$-\infty$	3.280	3.882	4.234	4.484	4.678	4.836	4.970	5.086	5.188
1	5.2797	3624	4380	5076	5719	6319	6879	7406	7903	8372
2	8818	9242	9646	*0032	*0402	*0757	*1097	*1425	*1741	*2046
3	6 2341	2626	2902	3169	3428	3680	3925	4163	4395	4621
4	4841	5056	5265	5470	5670	5865	6056	6243	6426	6606
5	6.6781	6953	7122	7288	7451	7610	7767	7921	8072	8221
6	8367	8511	8653	8792	8929	9064	9197	9328	9457	9584
7	9709	9833	9954	*0075	*0193	*0310	*0425	*0539	*0652	*0763
8	7.0872	0981	1087	1193	1298	1401	1503	1603	1703	1802
9	1899	1996	2091	2185	2278	2371	2462	2553	2642	2731
10	7.2818	2905	2991	3077	3161	3245	3327	3409	3491	3571
11	3651	3730	3809	3886	3963	4040	4115	4190	4265	4339
12	4412	4485	4557	4628	4699	4769	4839	4908	4977	5045
13	5113	5180	5247	5313	5378	5444	5508	5573	5636	5700
14	5763	5825	5887	5949	6010	6071	6131	6191	6250	6310
15	7.6368	6427	6485	6542	6600	6657	6713	6769	6825	6881
16	6936	6991	7045	7099	7153	7207	7260	7313	7366	7418
17	7470	7522	7573	7624	7675	7726	7776	7826	7876	7925
18	7974	8023	8072	8120	8169	8216	8264	8312	8359	8406
19	8452	8499	8545	8591	8637	8682	8728	8773	8818	8862
20	7.8907	8951	8995	9039	9083	9126	9169	9212	9255	9298
21	9340	9382	9424	9466	9508	9549	9591	9632	9673	9713
22	9754	9794	9835	9875	9915	9954	9994	*0033	*0073	*0112
23	8.0151	0189	0228	0266	0305	0343	0381	0419	0456	0494
24	0531	0568	0605	0642	0679	0716	0752	0789	0825	0861
25	8.0897	0933	0969	1004	1040	1075	1110	1145	1180	1215
26	1250	1284	1319	1353	1387	1421	1455	1489	1523	1557
27	1590	1623	1657	1690	1723	1756	1789	1821	1854	1887
28	1919	1951	1984	2016	2048	2079	2111	2143	2175	2206
29	2237	2269	2300	2331	2362	2393	2424	2454	2485	2516
30	8.2546	2576	2607	2637	2667	2697	2727	2757	2786	2816

$$\text{Log } K \; ; \quad k = \text{Sin } \alpha \; ; \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \text{Sin}^2 \varphi}} \; .$$

α	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
0°	0.19612	9612	9612	9612	9613	9613	9613	9614	9614	9615
1	9615	9616	9617	9618	9618	9619	9620	9622	9623	9624
2	9625	9627	9628	9629	9631	9633	9634	9636	9638	9640
3	9642	9644	9646	9648	9650	9653	9655	9657	9660	9662
4	9665	9668	9670	9673	9676	9679	9682	9685	9688	9691
5	0.19695	9698	9701	9705	9709	9712	9716	9720	9723	9727
6	9731	9735	9739	9743	9748	9752	9756	9761	9765	9770
7	9774	9779	9784	9789	9793	9798	9803	9808	9814	9819
8	9824	9829	9835	9840	9846	9851	9857	9863	9869	9875
9	9881	9887	9893	9899	9905	9911	9918	9924	9931	9937
10	0.19944	9950	9957	9964	9971	9978	9985	9992	9999	*0006
11	0.20014	0021	0029	0036	0044	0051	0059	0067	0075	0082
12	0090	0098	0107	0115	0123	0131	0140	0148	0157	0165
13	0174	0183	0191	0200	0209	0218	0227	0236	0246	0255
14	0264	0274	0283	0293	0302	0312	0322	0332	0342	0352
15	0.20362	0372	0382	0392	0402	0413	0423	0434	0444	0455
16	0466	0476	0487	0498	0509	0520	0531	0543	0554	0565
17	0577	0588	0600	0611	0623	0635	0647	0659	0671	0683
18	0695	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	0794	0807
19	0820	0833	0846	0859	0872	0885	0898	0912	0925	0939
20	0.20952	0966	0979	0993	1007	1021	1035	1049	1063	1077
21	1092	1106	1120	1135	1149	1164	1179	1193	1208	1223
22	1238	1253	1268	1284	1299	1314	1330	1345	1361	1376
23	1392	1408	1424	1440	1456	1472	1488	1504	1520	1537
24	1553	1570	1586	1603	1620	1637	1654	1671	1688	1705
25	0.21722	1739	1757	1774	1791	1809	1827	1844	1862	1880
26	1898	1916	1934	1952	1971	1989	2007	2026	2044	2063
27	2082	2101	2119	2138	2157	2177	2196	2215	2234	2254
28	2273	2293	2312	2332	2352	2372	2392	2412	2432	2452
29	2472	2493	2513	2534	2554	2575	2596	2616	2637	2658
30	0.22679	2700	2722	2743	2764	2786	2807	2829	2851	2872

Weil die gesammten Entwicklungen dieser Abhandlung mit Hülfe von Exponentialfunctionen und den Zeichen RT und $\frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}}$ mit Vermeidung der Sinus und Cosinus ausgeführt worden sind, dürfte es angemessen sein, die bezüglichen Rechenoperationen zusammenzustellen. Es seien E und ε zwei Winkelargumente und man bezeichne

$$Y = e^{\sqrt{-1}\,E} \; ; \quad y = e^{\sqrt{-1}\,\varepsilon} \; ;$$

es sei ferner F eine Function von Y, deren einzelne Glieder beliebige Potenzen dieser Grösse enthalten. Man findet dann leicht folgende Rechnungsvorschriften:

$$\left\{ \mathrm{RT}\, F \right\} . 2 \operatorname{Cos} \varepsilon = \quad \mathrm{RT} \left\{ F(y + y^{-1}) \right\}$$

$$\left\{ \mathrm{RT}\, F \right\} . 2 \operatorname{Sin} \varepsilon = \quad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ F(y - y^{-1}) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} F \right\} . 2 \operatorname{Cos} \varepsilon = \quad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ F(y + y^{-1}) \right\}$$

$$\left\{ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} F \right\} . 2 \operatorname{Sin} \varepsilon = - \mathrm{RT} \left\{ F(y - y^{-1}) \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left\{ \mathrm{RT}\, F \right\} = - \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \left\{ Y . \frac{\partial F}{\partial Y} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial E} \left\{ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} F \right\} = \quad \mathrm{RT} \left\{ Y . \frac{\partial F}{\partial Y} \right\}$$

$$\int \left\{ \mathrm{RT}\, F \right\} \partial E = \quad \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} \int F . \frac{d\,Y}{Y}$$

$$\int \left\{ \frac{\mathrm{IT}}{\sqrt{-1}} F \right\} \partial E = - \mathrm{RT} \int F . \frac{d\,Y}{Y} \; .$$

ERRATA.

Pag. 25	letzte Zeile	statt:	$\frac{e'}{\varkappa}$	liess:	$\frac{e'}{\varkappa'}$
» 36	10:te Zeile v. u.	»	$\overline{K}_{1.1}(n-1.+n+1)$	»	$\overline{K}_{1.1}(n-1.-n+1)$
» 41	6:te Zeile v. u.	»	$\overline{K}^{s.i}_{1.0}$	»	$\overline{K}^{1.i}_{1.0}$
» 48	12:te Zeile v. o.	»	Grösse	»	Grössen
» 50	Die Nummer (82) auszulassen.				
» 51	4:te Zeile v. o.	statt:	$\frac{(n-3)(n-s+3)^2}{6}$	liess:	$\frac{(n-s)(n-s+3)^2}{6}$
» 89	5:te Zeile v. o.	»	$\begin{matrix}-8\\+12\\+14\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$	»	$\begin{matrix}-8\\+12\\+4\end{matrix} P_{0.1}(n.-n-1)$
» 126	In der Formel für ΔT				
		statt:	$+\eta^2 y$	»	$-\eta^2(y+y^{-1})$
		»	$+\eta^2 y^{-1}$	»	$-\eta^2(y+y^{-1})$

» 149 Das Formelsystem oberst auf der Seite sollte die Nummer (252) haben. Bei dem zweiten Formelsysteme v. u. statt (255) zu lesen (257).

SUR

LA FONCTION

ELLIPTIQUE FONDAMENTALE

$$s = p(u ; g_2 , g_3)$$

PAR

AXEL SÖDERBLOM.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 4 Octobre 1895).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1896.

Table des matières.

Introduction . . . . . p. 1.

§ 1. Développement analytique de la valeur u de l'intégrale elliptique fondamentale en fonction de la fonction elliptique fondamentale $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$ . . . . . » 3.

§ 2. Extension de l'usage de la formule

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

$$= [1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] : \sqrt{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad » \quad 8.$$

§ 3. Le partage par moitié d'une intégrale elliptique fondamentale . . . . » 19.

§ 4. Propriétés de l'équation

$$\frac{\sqrt{R_3(s)}\,\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2} R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{R_3(s)}\,\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2} R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad » \quad 23.$$

§ 5 Solution de la même équation . . . . . » 26.

§ 6. Sur les équations rationelles de $s = p(u)$, de g_2 et de g_3 . . . . . » 34.

Le but de ce mémoire sera de présenter une méthode directe de calculer la valeur u de l'intégrale elliptique fondamentale, au moyen d'un développement analytique de la valeur de u en fonction de la valeur de la limite supérieure s de l'intégrale, la valeur $s = p(u; g_2, g_3)$ étant donnée, ainsi que la valeur de $p'(u; g_2, g_3)$.

Nous ferons aussi voir, comment, à l'aide du théorème d'addition de la fonction elliptique fondamentale $s = p(u; g_2, g_3)$, le calcul de la valeur de u peut se faire, quand la valeur de la limite supérieure s de l'intégrale est en dehors de l'espace de convergence du dit développement.

Puis nous déduirons une formule de généralisation du théorème de duplication de la fonction elliptique fondamentale, et nous ferons aussi voir, comment on peut faire l'inversion de cette formule, c'est à dire nous donnerons la solution du problème de partager par moitié la fonction elliptique fondamentale.

En dernier lieu nous déduirons quelques unes des équations rationelles de $s = p(u)$, de g_2 et de g_3 dont les racines correspondent aux parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique fondamentale, et nous ferons voir la connexion simple de ces équations. —

L'intégrale elliptique

$$(1) \qquad u = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}}$$

est immédiatement transformée dans la forme de *l'intégrale elliptique fondamentale*

$$(2) \qquad u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

d'où

$$(3)\ ^{1}) \qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 \ , \quad s = p\,(u\,;\,g_2\,,\,g_3)\ .$$

La transformation de l'intégrale (1) dans la forme (2) se fait en employant les trois formules suivantes, données par M. WEIERSTRASS dans le cours de sa théorie de la fonction elliptique fondamentale:

$$(4) \qquad s = -\frac{\sqrt{R_4(x_0)}\,\sqrt{R_4(x_1)} + R_4(x_0) + \frac{1}{2}R'_4(x_0)(x_1 - x_0)}{2(x_1 - x_0)^2} + \frac{R''_4(x_0)}{24}$$

$$(5) \qquad g_2 = AE + 3C^2 - 4BD$$

$$(6) \qquad g_3 = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3\ .$$

La formule (4) donne la valeur de la limite supérieure de l'intégrale (2). Les formules (5) et (6) donnent les valeurs des constantes g_2 et g_3. —

Dans le mémoire »*De la convergence du développement analytique de la Fonction Elliptique* p(u), *et du calcul de la valeur de l'argument* u, *la valeur de la fonction* p(u) *étant donnée*» (Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III; 1889) nous avons présenté une méthode *indirecte* de calculer la valeur de l'intégrale elliptique fondamentale (2).

Ce calcul exige l'emploi du développement analytique de la fonction elliptique fondamentale $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$

$$(7)\ ^{2}) \qquad p(u\,;\,g_2\,,\,g_3) = \frac{1}{u^2} + k_2 g_2 u^2 + k_3 g_3 u^4 + k_4 g_2^2 u^6 + k_5 g_2 g_3 u^8$$

$$+ (k_{6,1} g_2^3 + k_{6,2} g_3^2)\,u^{10} + k_7\, g_2^2 g_3 u^{12} + (k_{8,1} g_2^4 + k_{8,2} g_2 g_3^2)\,u^{14} + \ldots$$

où

---

[1]) *Voir: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn* K. WEIERSTRASS *bearbeitet und herausgegeben von* H. A. SCHWARZ. Zweite Ausgabe. Berlin 1893. Page 12.

Le mot *fondamentale* rend les mots »Elliptisches Integral *erster* Art». Ibidem p. 86, . . .

La fonction elliptique *fondamentale* $s = p(u;\,g_2,\,g_3)$ est l'inversion de l'intégrale elliptique fondamentale.

[2]) »*De la convergence . . .*» p. 37.

$$(8)\ ^{1}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \log k_2 = 0.6989\ 700 - 2 & \log k_3 = 0.5528\ 420 - 2 \\ \log k_4 = 0.9208\ 188 - 4 & \log k_5 = 0.6875\ 406 - 4 \\ \log k_{6,1} = 0.8068\ 754 - 6 & \log k_{6,2} = 0.9917\ 405 - 5 \\ \multicolumn{2}{c}{\log k_7 = 0.7332\ 981 - 6} \\ \log k_{8,1} = 0.6733\ 364 - 8 & \log k_{8,2} = 0.1970\ 202 - 6 \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \end{array} \right.$$

La méthode indirecte de calculer la valeur u de l'intégrale elliptique (2) consiste en l'inversion du développement analytique (7), à l'aide des valeurs des coëfficients k, données par les logarithmes de la liste (8).

Tant que la valeur de l'argument u est située en dedans de l'espace de convergence du développement (7), le calcul direct de la valeur de la fonction $p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$ est très commode.

Dans cette espace, la valeur de $\frac{ds}{du} = p'(u)$ se donne par le développement analytique

$$(9)\ ^{2}) \qquad \frac{ds}{du} = p'(u\,;\,g_2\,,\,g_3) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2.5}u + \frac{g_3}{7}u^3 \ldots$$

§ 1.

Développement analytique de la valeur u *de l'intégrale elliptique fondamentale en fonction de la fonction elliptique fondamentale* $\mathrm{s} = \mathrm{p}(\mathrm{u};\,\mathrm{g}_2,\,\mathrm{g}_3)$.

En développant l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

en série et sous la forme

$$as^{-3/2} + bs^{-5/2} + cs^{-7/2} + \ldots$$

[1]) »*De la convergence . . .*» p. 37.

[2]) *Voir: Formeln u. Lehrs . . .* p. 11.

en calculant l'expression de l'intégrale

$$-\int[as^{-3/2}+bs^{-5/2}+cs^{-7/2}+\ldots]ds$$

et en y substituant les limites s et $+\infty$, on obtient la formule

$$u=-\int_{\infty}^{s}\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

$$=\Big[1+\frac{g_2}{2^3\cdot 5}\cdot s^{-2}+\frac{g_3}{2^3\cdot 7}\cdot s^{-3}+\frac{g_2^2}{2^7\cdot 3}\cdot s^{-4}+\frac{3g_2g_3}{2^6\cdot 11}\cdot s^{-5}+$$

$$+\Big(\frac{5g_2^3}{2^{10}\cdot 13}+\frac{3g_3^2}{2^7\cdot 13}\Big)\cdot s^{-6}+\frac{g_2^2g_3}{2^{10}}\cdot s^{-7}+\Big(\frac{35g_2^4}{2^{15}\cdot 17}+\frac{15g_2g_3^2}{2^{10}\cdot 17}\Big)\cdot s^{-8}+$$

$$+\Big(\frac{35g_2^3g_3}{2^{13}\cdot 19}+\frac{5g_3^3}{2^{10}\cdot 19}\Big)\cdot s^{-9}+\ldots\Big]:\sqrt{s}$$

Du développement analytique de M. WEIERSTRASS

$$s=p(u;g_2,g_3)=\frac{1}{u^2}+*+\frac{g_2}{2^2\cdot 5}u^2+\frac{g_3}{2^2\cdot 7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}u^6+$$

$$+\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^8+\ldots$$

l'équation

$$u=\Big[1+*+\frac{g_2}{2^3\cdot 5}\cdot s^{-2}+\frac{g_3}{2^3\cdot 7}\cdot s^{-3}+\frac{g_2^2}{2^7\cdot 3}\cdot s^{-4}+\frac{3g_2g_3}{2^6\cdot 11}\cdot s^{-5}+\ldots\Big]:\sqrt{s}$$

est l'inversion. L'une et l'autre sont valables dans l'environ du point $u=0$.

Plus la valeur de s est grande, plus la valeur de u est commodement calculée.

Pour l'emploi pratique il vaut mieux écrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$(10)\qquad u=-\int_{\infty}^{s}\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}=[1+c_2g_2\cdot s^{-2}+c_3g_3\cdot s^{-3}+c_4g_2^2\cdot s^{-4}+$$

$$+c_5g_2g_3\cdot s^{-5}+(c_{6,1}g_2^3+c_{6,2}g_3^2)\cdot s^{-6}+c_7g_2^2g_3\cdot s^{-7}+(c_{8,1}g_2^4+c_{8,2}g_2g_3^2)\cdot s^{-8}+$$

$$+(c_{9,1}g_2^3g_3+c_{9,2}g_3^3)\cdot s^{-9}+\ldots]:\sqrt{s}$$

Liste des valeurs des coëfficients c

	Valeurs de c	log c
c_2	0.025	0.3979 400 — 2
c_3	0.0178 5714	0.2518 120 — 2
c_4	0.0026 0417	0.4156 688 — 3
c_5	0.0042 6136	0.6295 486 — 3
$c_{6,1}$	0.0003 7560	0.5747 267 — 4
$c_{6,2}$	0.0018 0288	0.2559 680 — 3
c_7	0.0009 7656	0.9897 000 — 4
$c_{8,1}$	0.0000 6283	0.7981 692 — 5
$c_{8,2}$	0.0008 6167	0.9353 424 — 4
$c_{9,1}$	0.0002 2487	0.3519 245 — 4
$c_{9,2}$	0.0002 5699	0.4099 164 — 4

Applications numériques:

Calculer la valeur de l'intégrale [1])

$$u = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4}} = -\int_\infty^{\sqrt{30}+\frac{83}{12}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - \frac{229}{12}s + \frac{3437}{216}}}\,.$$

On a

$$\log g_2 = 1.2806\ 543 \qquad \log |g_3| = 1.2017\ 257$$

$$s = \sqrt{30} + \frac{83}{12} = 12.3938\ 92 \qquad \log s = 1.0932\ 0771$$

$$\log s^{-1} = 0.9067\ 9229 - 2$$

$$\begin{aligned} \log c_2 &= 0.3979\ 400 - 2 \\ \log g_2 &= 1.2806\ 543 \\ \log s^{-2} &= 0.8135\ 846 - 3 \\ &\overline{0.4921\ 789 - 3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c_3 &= 0.2518\ 120 - 2 \\ \log |g_3| &= 1.2017\ 257 \\ \log s^{-3} &= 0.7203\ 769 - 4 \\ &\overline{0.1739\ 146 - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c_4 &= 0.4156\ 688 - 3 \\ \log g_2^2 &= 2.5613\ 086 \\ \log s^{-4} &= 0.6271\ 692 - 5 \\ &\overline{0.6041\ 466 - 5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c_5 &= 0.6295\ 486 - 3 \\ \log g_2 &= 1.2806\ 543 \\ \log |g_3| &= 1.2017\ 257 \\ \log s^{-5} &= 0.5349\ 615 - 6 \\ &\overline{0.6468\ 901 - 6} \end{aligned}$$

[1]) *Voir: De la convergence . .* p. 41.

$$\log c_{6,1} = 0.5747\,267 - 4 \qquad \log c_{6,2} = 0.2559\,680 - 3$$
$$\log g_2^3 = 3.8419\,629 \qquad \log g_3^2 = 2.4034\,514$$
$$0.4166\,896 \qquad 0.6594\,194 - 1$$

$$c_{6,1} g_2^3 = 2.6102\,952 \qquad \log c_6 = 0.4866\,816$$
$$c_{6,2} g_3^2 = 0.4564\,775 \qquad \log s^{-6} = 0.4407\,537 - 7$$
$$c_6 = 3.0667\,727 \qquad 0.9274\,353 - 7$$

$$\log c_7 = 0.9897\,000 - 4$$
$$\log g_2^2 = 2.5613\,086$$
$$\log |g_3| = 1.2017\,257$$
$$\log s^{-7} = 0.3475\,460 - 8$$
$$0.1002\,803 - 7$$

$$1 = 1$$
$$c_2 g_2 s^{-2} = 0.0031\,0584 \qquad c_3 g_3 s^{-3} = -0.0001\,4925$$
$$c_4 g_2^2 s^{-4} = 0.0000\,4019 \qquad c_5 g_2 g_3 s^{-5} = -0.0000\,0444$$
$$c_6 g^{-6} = 0.0000\,0085 \qquad c_7 g_2^2 g_3 s^{-7} = -0.0000\,0013$$
$$1.0031\,4688 \qquad -0.0001\,5382$$
$$-0.0001\,5382$$
$$1.0029\,9306 = [1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots]$$

$$\log [1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] = 0.0012\,9793$$
$$\log \sqrt{s} = 0.5466\,0386$$
$$\log u = 0.4546\,9407 - 1$$

$$\because u = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4}} = 0.2849\,0111$$

valeur de u dont le calcul a été plus commode et plus simple encore que celui fait par la méthode indirecte.

Calculer la valeur principale de l'intégrale [1])

$$u = -\int_{\infty}^{13-11\sqrt{-1}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 53s - 47}} .$$

On a

$$s = 13 - 11\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = \sqrt{290}\,(\cos 40^\circ 14' 10'',88 - \\ - i\sin 40^\circ 14' 10'',88)$$

d'où

$$c_2 g_2 \,.\, s^{-2} = \frac{c_2 g_2}{\varrho^2}\,(\cos 2\vartheta + i\sin 2\vartheta) = \quad 0.0007\,5624 + i\,0.0045\,0595$$

$$c_3 g_3 \,.\, s^{-3} = \frac{c_3 g_3}{\varrho^3}\,(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta) = -\,0.0000\,8679 + i\,0.0001\,4612$$

$$c_4 g_2^2 \,.\, s^{-4} = \frac{c_4 g_2^2}{\varrho^4}\,(\cos 4\vartheta + i\sin 4\vartheta) = -\,0.0000\,8222 + i\,0.0000\,2840$$

$$c_5 g_2 g_3 \,.\, s^{-5} = \frac{c_5 g_2 g_3}{\varrho^5}\,(\cos 5\vartheta + i\sin 5\vartheta) = -\,0.0000\,0691 - i\,0.0000\,0268$$

$$\therefore\ [1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] = \quad 1.0005\,8032 + i\,0.0046\,7778\,.$$

Donc, la valeur principale de l'intégrale proposée est

$$u = \frac{1.0005\,8032 + i\,0.0046\,7778}{\sqrt{13 - i\,11}}$$

$$= 0.2272\,8293 + i\,0.0844\,6207\,.$$

La solution de ces deux problèmes suffit pour faire voir comment la méthode directe de calculer la valeur d'une intégrale elliptique fondamentale est simple et commode, tant que la valeur de la limite supérieure s de l'intégrale est située en dedans de l'espace de convergence du développement

$$u = [1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] : \sqrt{s}\,.$$

---

[1]) *Voir: De la convergence . . .* p. 44.

§ 2.

Extension de l'usage de la formule

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

$$= [1 + c_2 g_2 \cdot s^{-2} + c_3 g_3 \cdot s^{-3} + \ldots] : \sqrt{s} \ .$$

L'emploi de la série $1 + c_2 g_2 \cdot s^{-2} + c_3 g_3 \cdot s^{-3} + \ldots$ pour le calcul de la valeur de l'intégrale u exige que la valeur absolue de la variable s diminue continuellement sans atteindre la limite extérieure de l'espace de convergence du développement, en général sans devenir plus petite que l'unité.

Le but de ce paragraphe sera de faire voir comment on peut opérer, quand la valeur absolue de s décroît jusqu'à une valeur ou située en dehors de l'espace de convergence du développement $1 + c_2 g_2 \cdot s^{-2} + c_3 g_3 \cdot s^{-3} + \ldots$, ou en dedans de l'espace de convergence du développement, mais trop près de la limite extérieure de l'espace de convergence du développement pour que l'emploi en soit commode.

Soit

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = u_1$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = u_2 + u_3 \ ,$$

où $x_0 < x_2 < x_1$, et qu'aucune racine de l'équation $Ax^4 + \ldots + 4Dx + E = 0$ ne soit située entre x_0 et x_1.

En appliquant aux intégrales $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$, $\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$ et $\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$ les formules de substitution (4), (5) et (6) on obtient

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = -\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u_1$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = -\int_{\infty}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u_2$$

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = -\int_{\infty}^{s_3} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u_3 \ .$$

Pour simplifier le raisonnement, nous supposerons les valeurs des limites x_0 et x_1 telles que la valeur de la limite s_1, ainsi que les valeurs de s_2 et s_3, ne soit plus petite que la plus grande des racines e_1, e_2, e_3 de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, conséquence immédiate des suppositions déjà faites sur les valeurs des limites x_0 et x_1.

Puisque $u_1 = u_2 + u_3$, on a

$$(11) \quad -\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} - \int_{\infty}^{s_3} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} .$$

Les coëfficients $A, B, \ldots E$ étant les mêmes dans les trois intégrales

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} \qquad \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} \qquad \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$$

les coëfficients g_2 et g_3 sont aussi les mêmes dans les trois intégrales de la formule (11).

La formule (11) indique la possibilité de remplacer une intégrale elliptique fondamentale par la somme d'autres intégrales elliptiques fondamentales, ne différant de celle-là que par les valeurs des limites supérieures.

Alors, si la valeur de s_1 est ou en dehors de l'espace de convergence du développement $1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots$ ou en dedans de la même espace de convergence mais trop près de sa limite extérieure, la valeur de l'intégrale u_1 ne peut être calculée en employant la formule (10). Si les valeurs de s_2 et s_3 sont aussi trop petites pour rendre commode, ou même possible, l'emploi de la formule (10) pour le calcul des valeurs des intégrales u_2 et u_3, on pourrait partager l'intervalle depuis x_0 jusqu'à x_1 [c'est à dire depuis ∞ jusqu'à s_1] en un nombre de parties $x_2, x_3, x_4, \ldots$ assez grand pour que les valeurs des limites supérieures des intégrales elliptiques fondamentales correspondantes soient assez grandes pour que le calcul des valeurs des intégrales, au moyen du développement $1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots$, soit possible et commode.

La conséquence la plus importante de l'équation (11) est qu'on peut l'écrire sous la forme

$$(12) \quad -\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{s_3} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \quad (s_3 > s_1) .$$

Cette équation indique le problème suivant à résoudre:

Étant donnée une intégrale elliptique $-\int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$, *où* $s_1 > s_0 >$ *la plus grande des racines réelles de l'équation* $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, *calculer la valeur de la limite supérieure* s, *de sorte que*

$$-\int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} .$$

Solution du problème:

La valeur de la limite supérieure s se calcule au moyen de la formule

$$(13) \qquad s = \frac{\sqrt{R_3(s_0)}\sqrt{R_3(s_1)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2} R'_3(s_0)(s_1 - s_0)}{2(s_1 - s_0)^2} + s_0 .$$

En effet, en donnant aux coëfficients A, B, C, D et E les valeurs

$$A = 0 \quad B = 1 \quad C = 0 \quad D = -\frac{g_2}{4} \quad E = -g_3$$

et en substituant s, s_0 et s_1 aux quantités x, x_0 et x_1 on obtient

$$R_4(x) = 4s^3 - g_2 s - g_3 = R_3(s) .$$

Les formules de transformation (5) et (6) donnent les *identités*

$$g_2 = g_2 \quad g_3 = g_3$$

et la formule (4) se transforme en la formule (13).

Remarque: La formule (13) n'étant, au fond, autre chose que la formule (4), la portée du théorème y contenu n'est pas plus restreinte que celle du théorème que contient la formule (4).

Conséquence de la formule (13):

Si v et u désignent les valeurs des arguments correspondant aux valeurs s_0 et s_1, de sorte que $v - u$ est la valeur de l'argument qui correspond à la valeur cherchée de s, c'est à dire que

$$s_0 = p(v) \quad s_1 = p(u) \quad s = p(v - u) = p(u - v)$$

on a, à cause des formules (2) et (3),

$$-\sqrt{R_3(s_1)} = -\sqrt{4\overline{p(u)}^3 - g_2 p(u) - g_3} = p'(u) \quad -\sqrt{R_3(s_0)} = p'(v)$$

$$\frac{1}{2}\,R'_3(s_0) = 6\overline{p(v)}^2 - \frac{1}{2}\,g_2\ .$$

Ainsi, la formule (13) peut s'écrire

$$p(u-v) = \frac{\left\{6\overline{p(v)}^2 - \frac{1}{2}\,g_2\right\}\{p(u)-p(v)\} + 4\overline{p(v)}^3 - g_2 p(v) - g_3 + p'(u)p'(v)}{2\{\overline{p(u)}^2 - \overline{p(v)}^2\}^2} + p(v)$$

forme spéciale du théorème d'addition de la fonction elliptique fondamentale [1]).

Si la valeur de s, en variant de s_1 jusqu'à s_0, passe par la plus grande racine réelle de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, il ne faut que changer le signe du produit $\sqrt{R_3(s_0)}\,\sqrt{R_3(s_1)}$, afin que la formule (13) soit applicable.

C'est la formule (13) qui rend l'emploi de la formule (10) possible, même quand les valeurs de s_0 et de s_1 sont en dehors de l'espace de convergence du développement $1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots$

Applications.

1. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x^2+1)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x - x^4 - x^2}}\ .$$

Dans cette intégrale, on a

$$A = -1 \quad B = \frac{1}{4} \quad C = -\frac{1}{6} \quad D = \frac{1}{4} \quad E = 0\ .$$

Les formules de substitution (4), (5) et (6) donnent

$$s = \frac{1}{6}$$

$$g_2 = -\frac{1}{6}$$

$$g_3 = \frac{5}{108}$$

[1]) *Voir: Formeln u. Lehrs*, p. (13).

de sorte que

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x^2+1)}} = -\int_\infty^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}} .$$

Les racines de l'équation $4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108} = 0$ sont

$$e_2 = \frac{1}{6} \quad e_1 = \frac{-1+3i}{12} \quad e_3 = \frac{-1-3i}{12} .$$

La valeur de s diminuant de $+\infty$ jusqu'à e_2, la valeur de l'intégrale

$$u = -\int_\infty^{\frac{1}{6}=e_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}}$$

est

$$u = \omega_2$$

demi-période réelle de la fonction elliptique correspondante. C'est à cause de cette valeur que nous avons élu l'intégrale ci-dessus, pour faire ressortir comment le calcul de la valeur de l'intégrale se fait commodement au moyen de la formule (10) — quoique la valeur de la limite supérieure $\frac{1}{6}$ soit en dehors de l'espace de convergence du développement — en y combinant la formule (13).

En effet, on a

$$\omega_2 = -\int_\infty^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}}$$

$$= -\int_\infty^1 \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}} - \int_1^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}} .$$

La valeur de l'intégrale

$$I_1 = -\int_\infty^1 \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}}$$

se trouve immédiatement à l'aide de la formule (10).

Quant à l'intégrale $-\int_1^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}}$ on a

$$-\int_1^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}} = -\int_1^{\sigma} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}} - \int_{\sigma}^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}}.$$

La formule (12) donne

$$-\int_{\sigma}^{\frac{1}{6}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}} = I_2$$

et la formule (13) donne, pour la limite supérieure s,

$$s = \frac{1}{8\left(\sigma-\frac{1}{6}\right)} + \frac{1}{6}\,.$$

Maintenant, si l'on fait

$$\sigma = \frac{19}{60}$$

on obtient, pour la limite supérieure s,

$$s = 1$$

de sorte que

$$I_2 = I_1\,.$$

Quant à la troisième intégrale

$$I_3 = -\int_1^{\sigma=\frac{19}{60}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}}$$

la formule (12) donne

$$I_3 = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+\frac{1}{6}s-\frac{5}{108}}}$$

et la valeur de la limite supérieure s se calcule à l'aide de la formule (13), en y substituant

$$s_0 = \frac{19}{60} \quad s_1 = 1$$

ce qui donne

$$R_3(s_0) = 0.1335\ 0000 \quad R'_3(s_0) = 1.3700\ 0000 \quad R_3(s_1) = 4.1203\ 7037$$

$$\therefore\ s = \frac{\sqrt{0.1335}\sqrt{4.1203\ 7037} + 0.1335 + 0.685 \cdot \frac{41}{60}}{2\left(\frac{41}{60}\right)^2} + \frac{19}{60}$$

$$= 1.7550\ 0730$$

de sorte que

$$I_3 = -\int_{\infty}^{1.7550\ 0730} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + \frac{1}{6}s - \frac{5}{108}}} \cdot$$

Calculer la valeur de l'intégrale $I_1 = I_2$:
On a

$$g_2 = -\frac{1}{6} \qquad g_3 = \frac{5}{108} \qquad s = 1$$

$$\log |g_2| = 0.2218\ 487 - 1 \qquad \log g_3 = 0.6655\ 462 - 2$$
$$\log c_2 |g_2| = 0.6197\ 887 - 3 \qquad \log c_3 g_3 = 0.9173\ 582 - 4$$
$$\log c_4 g_2^2 = 0.8593\ 662 - 5 \qquad \log c_5 |g_2| g_3 = 0.5169\ 435 - 5$$
$$\log c_{6,1} |g_2^3| = 0.2402\ 728 - 6 \qquad \log c_{6,2} g_3^2 = 0.5870\ 604 - 6$$
$$\log c_7 g_2^2 g_3 = 0.0989\ 436 - 6 \qquad \log c_{8,1} g_2^4 = 0.6855\ 640 - 8$$
$$\log c_{8,2} |g_2| g_3^2 = 0.4882\ 835 - 7 \qquad \log c_{9,1} |g_2^3| g_3 = 0.6830\ 168 - 8$$
$$\log c_{9,2} g_3^3 = 0.4065\ 550 - 8$$

Ainsi, on a, à l'aide de la formule (10),

$$1 = 1 \qquad c_2 g_2 = -0.0041\ 6666\ 6$$
$$c_3 g_3 = 0.0008\ 2672 \qquad c_5 g_2 g_3 = -0.0000\ 3288\ 1$$
$$c_4 g_2^2 = 0.0000\ 7233\ 8 \qquad c_{6,1} g_2^3 = -0.0000\ 0173\ 89$$
$$c_{6,2} g_3^2 = 0.0000\ 0386\ 42 \qquad c_{8,2} g_2 g_3^2 = -0.0000\ 0030\ 781$$
$$c_7 g_2^2 g_3 = 0.0000\ 0125\ 58 \qquad c_{9,1} g_2^3 g_3 = -0.0000\ 0004\ 82$$
$$c_{8,1} g_2^4 = 0.0000\ 0004\ 848 \qquad -0.0042\ 0164\ 19$$
$$c_{9,2} g_3^3 = 0.0000\ 0002\ 550$$
$$1.0009\ 0425\ 2$$
$$-0.0042\ 0164\ 2$$

$$\therefore\ I_1 = I_2 = 0.9967\ 0261$$

Calculer la valeur de l'intégrale I_3:
On a

$$\begin{aligned}
s &= 1.7550\ 7030 \\
\log c_2 \,|\, g_2 \,|\, s^{-2} &= 0.1312\ 3088 - 3 \\
\log c_4 g_2^2 s^{-4} &= 0.8822\ 5056 - 6 \\
\log (c_{6,1} g_2^3 + c_{6,2} g_3^2) s^{-6} &= 0.8617\ 4674 - 8 \\
\therefore\ 1 &= 1 \\
c_3 g_3 s^{-3} &= 0.0001\ 5294\ 0 \\
c_4 g_2^2 s^{-4} &= 0.0000\ 0762\ 5 \\
(c_{6,1} g_2^3 + c_{6,2} g_3^2) s^{-6} &= 0.0000\ 0007\ 3 \\
c_7 g_2^2 g_3 s^{-7} &= 0.0000\ 0002\ 4 \\
&\quad 1.0001\ 6066\ 2 \\
&\quad -\ 0.0013\ 5476\ 6 \\
[1 + c_2 g_2 . s^{-2} + c_3 g_3 . s^{-3} + \ldots] &= 0.9988\ 0589\ 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log s^{-1} &= 0.7557\ 2109 - 1 \\
\log c_3 g_3 s^{-3} &= 0.1845\ 2147 - 4 \\
\log c_5 \,|g_2|\, g_3 s^{-5} &= 0.2955\ 4895 - 6 \\
\log c_7 g_2^2 g_3 s^{-7} &= 0.3889\ 9123 - 8 \\
\therefore\ c_2 g_2 s^{-2} &= -\ 0.0013\ 5279\ 1 \\
c_5 g_2 g_3 s^{-5} &= -\ 0.0000\ 0197\ 5 \\
&\quad -\ 0.0013\ 5476\ 6 \\
\log [1 + c_2 g_2 . s^{-2} + \ldots] &= 0.9994\ 8107 - 1 \\
\log \frac{1}{\sqrt{s}} &= 0.8778\ 6055 - 1 \\
\log I_3 &= 0.8773\ 4162 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ I_1 + I_2 &= 1.9934\ 0522 \\
I_3 &= 0.7539\ 4844 \\
\therefore\ u = \omega_2 &= 2.7473\ 5366
\end{aligned}$$

Les formules de M. WEIERSTRASS [1]) pour calculer la valeur de ω_2 donnent la valeur

$$\omega_2 = 2.7473\ 540\ .$$

2. *Calculer la valeur de l'intégrale*

$$u = -\int_{\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}}\ .$$

Dans cette intégrale, on a

$$g_2 = -1 \qquad g_3 = -2\ .$$

1:o. Déterminer la valeur de la limite supérieure s qui rend commode l'emploi du développement $1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + c_3 g_3 \,.\, s^{-3} + \ldots$ (10).

[1]) *Voir: Formeln und Lehrs.* p. 63 ...

On a

$$\log c_{9,1} = 0.3519\,245 - 4 \qquad \log c_{9,2} = 0.4099\,164 - 4$$
$$\log g_2^3 g_3 = 0.3010\,300 \qquad \log |g_3^3| = 0.9030\,900$$
$$\log c_{9,1} g_2^3 g_3 = 0.6529\,545 - 4 \qquad \log c_{9,2} |g_3^3| = 0.3130\,064 - 3$$
$$c_{9,1} g_2^3 g_3 = 0.0004\,4973\,27$$
$$c_{9,2} g_3^3 = -0.0020\,5592\,09$$
$$C_9 = -0.0016\,0618\,82 \qquad \log |C_9| = 0.2057\,963 - 3$$

Afin que la valeur absolue du terme $C_9 \cdot s^{-9}$ du développement $1 + c_2 g_2 \cdot s^{-2} + \ldots$ soit plus petite que $\frac{1}{10^7}$, il faut que

$$\log |C_9| - 9 \log s < -7$$
$$\therefore \log s > 0.4673\,107$$
$$\therefore s \geq 2.9330 .$$

2:o. Partager l'espace d'intégration de l'intégrale

$$u = -\int_{\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} .$$

On a

$$-\int_{\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} = -\int_{\infty}^{\sigma_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} - \ldots$$
$$- \int_{\sigma_n}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}}$$

où il faut déterminer $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ de telle manière, que le nombre des intégrales devienne le plus petit possible, et que le calcul de leurs valeurs devienne si commode que possible.

D'abord, il faut que

$$\sigma_1 \geq 2.9330 .$$

Quant à l'intégrale $-\int_{\sigma_n}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}}$, on a

$$-\int_{\sigma_n}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}}$$

où il faut déterminer σ_n de manière que la valeur de la limite supérieure $s \geq 2.9330$.

La formule (13) donne, pour $s_0 = 0$ et $s_1 = \sigma_n$,

$$R_3(s_0) = 2 \quad R'_3(s_0) = 1$$

$$\therefore \quad s = \frac{\sqrt{2}\sqrt{4\sigma_n^3 + \sigma_n + 2} + 2 + \frac{1}{2}\cdot\sigma_n}{2\sigma_n^2}\,.$$

Si, dans cette équation, on fait

$$\sigma_n = 1$$

on obtient

$$s = 3.1208\,285$$

de sorte que

$$-\int_{\sigma_n=1}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}} = -\int_{\infty}^{3.1208\,285} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}$$

dont la valeur se calcule commodement à l'aide de la formule (10).

Maintenant, si l'on fait aussi

$$\sigma_1 = 3.1208\,285$$

on obtient

$$-\int_{\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}} = 2\left[-\int_{\infty}^{3.1208\,285} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\right] - \int_{3.1208\,285}^{1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\,.$$

Quant à la dernière intégrale, on a

$$-\int_{3.1208\,285}^{1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}} = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}$$

où la valeur de la limite supérieure s se trouve à l'aide de la formule (13), en y faisant

$$s_0 = 1 \quad s_1 = 3.1208\,285$$

de sorte que

$$R_3(s_0) = 7 \quad R'_3(s_0) = 13 \quad R_3(s_1) = 126.7029\,31$$

et

$$s = \frac{\sqrt{R_3(s_0)}\,\sqrt{R_3(s_1)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)\cdot(s_1 - s_0)}{2(s_1 - s_0)^2} + s_0$$

$$= 6.6211\,166$$

ce qui donne

$$-\int_{\infty}^{0}\frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}=2\left[-\int_{\infty}^{3.1208\,285}\frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\right]-\int_{\infty}^{6.6211\,166}\frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\,.$$

Calculer les valeurs des intégrales

$$I_1=-\int_{\infty}^{3.1208\,285}\frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\qquad I_2=-\int_{\infty}^{6.6211\,166}\frac{ds}{\sqrt{4s^3+s+2}}\,.$$

Les valeurs

$$g_2=-1\qquad g_3=-2\qquad s=3.1208\,285$$

substituées dans la formule (10), donnent

$$\begin{aligned}
1&=1\\
c_4g_2^2\,.\,s^{-4}&=0.0000\,2745\,3\\
c_5g_2g_3\,.\,s^{-5}&=0.0000\,2878\,9\\
(c_{6,1}g_2^3+c_{6,2}g_3^2)\,.\,s^{-6}&=0.0000\,0739\,9\\
&\underline{1.0000\,6364\,1}\\
&-0.0037\,4294\,4\\
&\overline{[1+c_2g_2\,.\,s^{-2}+\ldots]=0.9963\,2069\,7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2g_2\,.\,s^{-2}&=-0.0025\,6684\,9\\
c_3g_3\,.\,s^{-3}&=-0.0011\,7498\,5\\
c_7g_2^2g_3s^{-7}&=-0.0000\,0067\,7\\
(c_{8,1}g_2^4+c_{8,2}g_2g_3^2)\,.\,s^{-8}&=-0.0000\,0037\,6\\
(c_{9,1}g_2^3g_3+c_{9,2}g_3^3)\,.\,s^{-9}&=-0.0000\,0005\,7\\
&\underline{-0.0037\,4294\,4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log[1+c_2g_2\,.\,s^{-2}+\ldots]&=0.9983\,9911-1\\
\log[1:\sqrt{3.1208\,285}]&=0.7528\,6506-1\\
\log I_1&=0.7512\,6417-1\\
\therefore\ I_1&=0.5639\,8061\,.
\end{aligned}$$

Les valeurs

$$g_2=-1\qquad g_3=-2\qquad s=6.6211\,166$$

substituées dans la formule (10), donnent

$$\begin{aligned}
1&=1\\
c_4g_2^2\,.\,s^{-4}&=0.0000\,0135\,5\\
c_5g_2g_3\,.\,s^{-5}&=0.0000\,0066\,9\\
(c_{6,1}g_2^3+c_{6,2}g_3^2)\,.\,s^{-6}&=0.0000\,0008\,1\\
&\underline{1.0000\,0210\,5}\\
&-0.0006\,9330\,7\\
&\overline{[1+c_2g_2\,.\,s^{-2}+\ldots]=0.9993\,0879\,8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2g_2\,.\,s^{-2}&=-0.0005\,7026\,6\\
c_3g_3\,.\,s^{-3}&=-0.0001\,2304\,1\\
&\underline{-0.0006\,9330\,7}
\end{aligned}$$

$$\log\,[1 + c_2 g_2 \,.\, s^{-2} + \ldots] = 0.9996\ 9968 - 1$$
$$\log\,[1 : \sqrt{6.6211166}] \qquad = 0.5895\ 3440 - 1$$
$$\log I_2 = 0.5892\ 3408 - 1$$

$$\because\quad I_2 = 0.3883\ 5948$$
$$2\,I_1 = 1.1279\ 6121$$
$$\because\quad u = -\int_{\infty}^{0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 + s + 2}} = 1.5163\ 2069\ .$$

§ 3.

Le partage par moitié d'une intégrale elliptique fondamentale.

Soit

$$I = -\int_{s_2}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

où, sans connaître les valeurs de u_2 et de u_0, on connaît les valeurs des fonctions

$$s_2 = p(u_2\,;\, g_2\,,\, g_3) \quad \text{et} \quad s_0 = p(u_0\,;\, g_2\,,\, g_3)$$

et les valeurs des dérivées

$$\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_2} \quad \text{et} \quad \left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_0}.$$

Posons

$$I = -\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} - \int_{s}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$
$$= I_2 + I_0\ .$$

Il s'agit de déterminer s de telle manière que

$$I_2 = I_0$$

sans calculer les valeurs des arguments u_2, u et u_0, déterminées par les relations

$$u_2 = -\int_{\infty}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} \qquad u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

$$u_0 = -\int_{\infty}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} .$$

La conséquence de la condition $I_2 = I_0$ est que

$$u = \frac{u_2 + u_0}{2} . \tag{14}$$

La formule (13) donne

$$I_2 = -\int_{s_2}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{\sigma_2} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

et

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2} R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s$$

de même que

$$I_0 = -\int_{s}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = -\int_{\infty}^{\sigma_0} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

et

$$\sigma_0 = \frac{\sqrt{R_3(s_0)}\sqrt{R_3(s)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2} R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0 .$$

Afin que $I_2 = I_0$, il faut que

$$\sigma_2 = \sigma_0$$

de sorte que

$$\frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2} R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s = \tag{15}$$

$$= \frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2} R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0 .$$

Remarque: Si une racine de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ est située entre s_2 et s_0, il faut changer le signe de $\sqrt{R_3(s_0)}$.

Application:

Soit

$$R_3(s) = 4s^3 - s - 1$$

$$\because \quad g_2 = 1 \qquad g_3 = 1 \ .$$

Soit

$$u_2 = 0.1 \qquad u = 0.4 \qquad u_0 = 0.7$$

de sorte que

$$u = \frac{u_2 + u_0}{2} \ .$$

Alors, il faut que les valeurs correspondantes des fonctions

$$s_2 = p(u_2\,;\,1\,,\,1) \qquad s = p(u\,;\,1\,,\,1) \qquad s_0 = p(u\,;\,1\,,\,1)$$

satisfassent à l'équation (15).

Calculer les valeurs des fonctions s_2, s et s_0:

Les formules (8) donnent

$$\begin{aligned} k_{6,1} &= 0.0000\ 0641\ 03 \\ k_{6,2} &= 0.0000\ 9811\ 61 \\ \hline k_6 &= 0.0001\ 0452\ 64 \\ \log k_6 &= 0.0192\ 260 - 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k_{8,1} &= 0.0000\ 0004\ 7134 \\ k_{8,2} &= 0.0000\ 0157\ 4056 \\ \hline k_8 &= 0.0000\ 0162\ 119 \\ \log k_8 &= 0.2098\ 339 - 6 \end{aligned}$$

La formule (7) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_2^2} &= 100.0000\ 0000 \\ k_2 u_2^2 &= \quad 0.0005\ 0000 \\ k_3 u_2^4 &= \quad 0.0000\ 0357 \\ k_4 u_2^6 &= \quad 0.0000\ 0000\,.. \\ \hline \because \quad s_2 &= 100.0005\ 0357 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{u^2} &= 6.2500\ 0000 \\ k_2 u^2 &= 0.0080\ 0000 \\ k_3 u^4 &= 0.0009\ 1429 \\ k_4 u^6 &= 0.0000\ 0341 \\ k_5 u^8 &= 0.0000\ 0032 \\ k_6 u^{10} &= 0.0000\ 0001 \\ \hline s &= 6.2589\ 1803 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{u_0^2} = 2.0408\ 1633$$

$$k_2u_0^2 = 0.0245\ 0000 \qquad \log s_0 = 0.3168\ 1308$$
$$k_3u_0^4 = 0.0085\ 7500 \qquad \log s = 0.7964\ 9920$$
$$k_4u_0^6 = 0.0000\ 9804 \qquad \log s_2 = 2.0000\ 0218\ 5$$
$$k_5u_0^8 = 0.0000\ 2808 \qquad R_3(s) = 4s^3 - s - 1$$
$$k_6u_0^{10} = 0.0000\ 0295 \qquad R'_3(s) = 12s^2 - 1$$
$$k_7u_0^{12} = 0.0000\ 0007$$
$$k_8u_0^{16} = 0.0000\ 0001$$
$$s_0 = 2.0740\ 2048$$

$$R_3(s_0) = 32.6120\ 869 \qquad R_3(s) = 973.4894\ 91$$
$$R_3(s_2) = 3999959.3971 \qquad R'_3(s_0) = 50.6187\ 34$$
$$R'(s) = 469.0885 \qquad \log R_3(s_0) = 1.5133\ 7856$$
$$\log R_3(s) = 2.9883\ 312 \qquad \log R_3(s_2) = 6.6020\ 5555$$
$$\log R'_3(s_0) = 1.7043\ 112 \qquad \log R'_3(s) = 2.6712\ 547$$
$$s - s_0 = 4.1848\ 975 \qquad s_2 - s = 93.741\ 586$$
$$\log (s - s_0) = 0.6216\ 848 \qquad \log (s_2 - s) = 1.9719\ 322$$

$$\sqrt{R_3(s_2)}\sqrt{R_3(s)} = 62401.2702 \qquad \sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_0)} = 178.1783\ 2$$
$$R_3(s) = 973.4895 \qquad R_3(s_0) = 32.6120\ 9$$
$$\frac{1}{2}R'_3(s)(s_2 - s) = 21986.5420 \qquad \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s - s_0) = 105.9170\ 7$$
$$\therefore\ n_1 = 85361.3017 \qquad \therefore\ n_2 = 316.7074\ 8$$

$$\log n_1 = 4.9312\ 6103 \qquad \log n_2 = 2.5006\ 5816$$
$$\log 2(s_2 - s)^2 = 4.2448\ 9440 \qquad \log 2(s - s_0)^2 = 1.5443\ 9959$$
$$0.6863\ 6663 \qquad 0.9562\ 5857$$

$$\therefore\ \frac{n_1}{2(s_2 - s)^2} = 4.8569\ 835 \qquad \therefore\ \frac{n^2}{2(s - s_0)^2} = 9.0418\ 765$$
$$s = 6.2589\ 180 \qquad s_0 = 2.0740\ 205$$
$$\therefore\ \sigma_0 = 11.1159\ 015 \qquad \therefore\ \sigma_2 = 11.1158\ 970$$

L'accord parfait des valeurs de σ_0 et de σ_2 est une confirmation numérique de la formule (15).

Quant à la solution de l'équation (15), nous y reviendrons dans le paragraphe 5.

§ 4.

Propriétés de l'équation.

$$(15)\qquad \frac{\sqrt{R_3(s)}\,\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2}R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{R_3(s)}\,\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0\ .$$

1:o. M. Weierstrass, dans sa théorie de la fonction elliptique fondamentale $s = p(u)$, a déduit l'équation

$$(16)\qquad p(2u) = \frac{\left\{\overline{p(u)}^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}^2 + 2g_3 p(u)}{4\overline{p(u)}^3 - g_2 p(u) - g_3}\ .$$

Cette équation contient le *théorème de duplication* de l'argument de la fonction $s = p(u)$.

La solution de l'équation (16) par rapport à $p(u)$, la valeur de $p(2u)$ étant donnée, est le *problème de division* (de partage par moitié) de l'argument de la fonction $s = p(2u)$.

Dans les paragraphes 8 et 9 du mémoire »De la convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u)\,..$», p. 45—55, nous avons présenté deux méthodes de solution de l'équation (16).

Maintenant, si, dans l'équation (15), on fait $s_2 = \infty$, de sorte que $u_2 = 0$, on obtient

$$(17)\qquad s = \frac{\sqrt{R_3(s)}\,\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0\ .$$

Alors, l'équation (14) donne

$$(18)\qquad 2u = u_0\ .$$

Les équations (16), (17) et (18) font voir, que l'équation (17) doit être la même chose que l'équation (16), c'est à dire que l'équation (15) est une généralisation de l'équation (16) de M. Weierstrass.

En effet, de l'équation (16), on obtient, en y remplaçant $p(2u)$ par s_0 et $p(u)$ par s, l'équation

$$s^4 - 4s_0 s^3 + \frac{g_2}{2} s^2 + (2g_3 + g_2 s_0)s + \frac{g_2^2}{16} + g_3 s_0 = 0 \ . \tag{19}$$

De l'équation (17), on obtient

$$2(s - s_0)^3 - 4s_0^3 + g_2 s_0 + g_3 - \left(6s_0^2 - \frac{g_2}{2}\right)(s - s_0)$$

$$= \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}\ \sqrt{4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3}$$

d'où

$$4s^6 - 24s_0 s^5 + (36s_0^2 + 2g_2)s^4 + (-16s_0^3 + 8g_3)s^3 + \left(\frac{g_2^2}{4} - 6g_2 s_0^2 - 12g_3 s_0\right)s^2 +$$

$$+ \left(4g_2 s_0^3 + \frac{g_2^2}{2} s_0\right)s + \frac{g_2^2}{4} s_0^2 + 4g_3 s_0^3 = 0$$

ou

$$\left\{s^4 - 4s_0 s^3 + \frac{g_2}{2} s^2 + (2g_3 + g_2 s_0)s + \frac{g_2^2}{16} + g_3 s_0\right\} 4(s - s_0)^2 = 0 \ .$$

Le premier facteur de cette équation étant identique à l'équation (19), c'est bien prouvé, que l'équation

$$\frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2}R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s \tag{15}$$

$$= \frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0$$

est une généralisation de l'équation

$$p(2u) = \frac{\left\{\sqrt{p(u)^2} + \frac{g_2}{4}\right\}^2 + 2g_3 p(u)}{4\sqrt{p(u)^3} - g_2 p(u) - g_3} \tag{16}$$

ou

$$s_0 = \frac{\left(s^2 + \frac{g_2}{4}\right)^2 + 2g_3 s}{4s^3 - g_2 s - g_3} \ .$$

Dans l'équation (16), u_2 a la valeur spéciale de 0; dans l'équation (15), u_2 a la valeur correspondant à la valeur arbitrairement choisie de s_2.

2:o. Si l'on fait, dans l'équation (15),

$$s_2 = \infty$$

$$s_0 = e_\lambda$$

e_λ étant une racine quelconque de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, de sorte que $R_3(e_\lambda) = 0$, on en obtient

$$s = \frac{\frac{1}{2} R'_3(e_\lambda)}{2(s - e_\lambda)} + e_\lambda$$

d'où

$$(s - e_\lambda)^2 = 3e_\lambda^2 - \frac{g_2}{4} \tag{20}$$

ou

$$\left\{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_\lambda\right\}^2 = 3e_\lambda^2 - \frac{g_2}{4} \tag{21}$$

ω étant la demi-période correspondant à e_λ, c'est à dire

$$p(\omega) = e_\lambda\ .$$

L'équation (15) étant une généralisation de l'équation (16), la relation remarquablement simple (20) doit satisfaire à l'équation (16), quand on y fait $p(2u) = e_\lambda$.

En effet, en faisant $p(2u) = e_\lambda$ dans l'équation (16), on obtient

$$s^4 - 4e_\lambda s^3 + \frac{g_2}{2} s^2 + (2g_3 + g_2 e_\lambda)s + \frac{g_2^2}{16} + g_3 e_\lambda = 0$$

ou

$$\left\{(s - e_\lambda)^2 - \left(3e_\lambda^2 - \frac{g_2}{4}\right)\right\}^2 - 2(4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3)s - (4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3)e_\lambda = 0$$

c'est à dire

$$\left\{(s - e_\lambda)^2 - \left(3e_\lambda^2 - \frac{g_2}{4}\right)\right\}^2 = 0$$

conformement à l'équation (20).

L'équation (21) pourrait se déduire aussi de l'équation[1])

$$p(u \pm \omega) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{p(u) - e_\lambda}$$

en y faisant $u = \frac{\omega}{2}$.

§ 5.

Solution de l'équation

$$(15) \qquad \frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_2)} + R_3(s) + \frac{1}{2}R'_3(s)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{R_3(s)}\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0 \ .$$

Le but de ce paragraphe sera de proposer une méthode de calculer approximativement $\left(\text{à } \frac{1}{10^7} \text{ près}\right)$ la valeur de la fonction s qui satisfait à l'équation

$$(15) \frac{\sqrt{4s_2^3 - g_2 s_2 - g_3}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} + 4s^3 - g_2 s - g_3 + \frac{1}{2}(12s^2 - g_2)(s_2 - s)}{2(s_2 - s)^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} + 4s_0^3 - g_2 s_0 - g_3 + \frac{1}{2}(12s_0^2 - g_2)(s - s_0)}{2(s - s_0)^2} + s_0$$

pourvu que l'on connaisse les valeurs de s_2, de s_0, de $\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_2}$ et de $\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_0}$.

L'équation (15) peut s'écrire sous la forme

$$As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E - (as^2 + bs + c)\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = 0$$

[1]) *Voir: Formeln u. Lehrs* ... pp. 12 et 23.

ou

$$\varphi(s) - (as^2 + bs + c)\,.\,f(s) = 0\ . \tag{22}$$

Supposé que

$$s = s_a + h$$

soit la valeur exacte de la racine cherchée s de l'équation (22), la valeur approchée de la correction h est, par la méthode de NEWTON,

$$h = \frac{\varphi(s_a) - (as_a^2 + bs_a + c)\,.\,f(s_a)}{(as_a^2 + bs_a + c)\,.\,f'(s_a) + (2as_a + b)f(s_a) - \varphi'(s_a)}\ . \tag{23}$$

La formule (23) est à employer pour le calcul de la valeur de la deuxième, troisième, ... correction h.

Ordinairement, il est bon de prendre pour valeur primaire s_3 de s_a l'une (ou l'autre) des racines de l'équation

$$as^2 + bs + c = 0.$$

Un examen de l'équation (22) fait voir immédiatemeut laquelle des racines de l'équation $as^2 + bs + c = 0$ doit être prise pour s_3.

Alors, la formule

$$h = \frac{\varphi(s_3)}{(2as_3 + b)\,.\,f(s_3) - \varphi'(s_3)} \tag{24}$$

donne la valeur de la première correction h.

Quant à la convenance de l'emploi pratique de la méthode, on en jugera au mieux, en examinant les applications suivantes.

Applications.

1:o. Soit

$$R_3(s) = 4s^3 - s - 1$$

$$\therefore\ g_2 = g_3 = 1\ .$$

Soit

$$s_2 = 15 \qquad s_0 = 5$$

et

$$\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_2} < 0 \qquad \left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_0} < 0\ .$$

Calculer la valeur de s correspondant à la valeur inconnue de

$$u = \frac{u_2 + u_0}{2}$$

sans calculer les valeurs de u_2 et de u_0.

On trouve

$$R_3(s_0) = 494 \quad R'_3(s_0) = 299 \quad R_3(s_2) = 13\,484 \ .$$

La formule (15) donne l'équation

$$\frac{\sqrt{13\,484}\sqrt{4s^3 - s - 1} + 4s^3 - s - 1 + \frac{1}{2}(12s^2 - 1)(15 - s)}{2(15 - s)^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{494}\sqrt{4s^3 - s - 1} + 494 + \frac{1}{2} \cdot 299(s - 5)}{2(s - 5)^2} + 5$$

ou

$$20s^4 + 400s^3 - 4\,515s^2 + 80s + 575$$

$$- \{\sqrt{494}(15 - s)^2 - \sqrt{13\,484}(s - 5)^2\}\sqrt{4s^3 - s - 1} = 0$$

d'où l'on déduit

$$4s^4 + 80s^3 - 903s^2 + 16s + 115$$

$$- \{-s^2 18.778\,904 + s\,98.884\,590 + 419.571\,178\}\sqrt{4s^3 - s - 1} = 0$$

de sorte que

$$\varphi(s) = 4s^4 + 80s^3 - 903s^2 + 16s + 115$$

$$f(s) = \sqrt{4s^3 - s - 1}$$

$$as^2 + bs + c = -s^2 18.778\,904 + s\,98.884\,590 + 419.571\,178 \ .$$

L'expression $as^2 + bs + c$ disparaît pour les valeurs de s

$$s = 8.0435\ldots \qquad s = -2.7777\ldots$$

et $as^2 + bs + c > 0$ pour des valeurs de s situées entre ces deux limites de s. — La quantité $f(s) = \sqrt{4s^3 - s - 1}$ fait voir, qu'il faut prendre pour valeur de départ s_3 de s

$$s_3 = 8.0435\ .$$

Alors, on trouve, à l'aide de la formule (24),

$$h = -\,0.0104\ 571$$

ce qui donne pour première valeur corrigée de s

$$s_4 = 8.0330\ 429\ .$$

La substitution de $s_4 = 8.0330\ 429$ dans la formule (23) donne la seconde valeur de la correction h

$$h = -\,0.0000\ 165$$

de sorte que la valeur définitive de s devient

$$s = 8.0330\ 264\ .$$

Épreuve:

La substitution des valeurs

$$s_0 = 5 \qquad g_2 = 1 \qquad g_3 = 1$$

dans la formule (10) donne

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
c_2 \,.\, s_0^{-2} &= 0.001\\
c_3 \,.\, s_0^{-3} &= 0.0001\ 4285\ 8\\
c_4 \,.\, s_0^{-4} &= 0.0000\ 0416\ 66\\
c_5 \,.\, s_0^{-5} &= 0.0000\ 0136\ 364\\
c_6 \,.\, s_0^{-6} &= 0.0000\ 0013\ 942\\
c_7 \,.\, s_0^{-7} &= 0.0000\ 0001\ 250\\
\hline
[1 + c_2 \,.\, s_0^{-2} + c_3 \,.\, s_0^{-3} + \,..] &= 1.0011\ 4854\\
\log [1 + c_2 \,.\, s_0^{-2} + c_3 \,.\, s_0^{-3} + \,..] &= 0.0004\ 9851\ 6\\
\log \frac{1}{\sqrt{s_0}} &= 0.6505\ 1500 - 1\\
\hline
\therefore\ \log u_0 &= 0.6510\ 1352 - 1\\
u_0 &= 0.4477\ 272\ .
\end{aligned}$$

La substitution des valeurs

$$s = 8.0330\ 264 \qquad g_2 = 1 \qquad g_3 = 1$$

dans la formule (10) donne

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ c_2 \,.\, s^{-2} &= 0.0003\ 8742\ 3 \\ c_3 \,.\, s^{-3} &= 0.0000\ 3445\ 0 \\ c_4 \,.\, s^{-4} &= 0.0000\ 0062\ 5 \\ c_5 \,.\, s^{-5} &= 0.0000\ 0012\ 7 \\ \hline [1 + c_2 \,.\, s^{-2} + c_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] &= 1.0004\ 2262\ 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \log [1 + c_2 \,.\, s^{-2} + c_3 \,.\, s^{-3} + \ldots] &= 0.0001\ 8349\ 8 \\ \log \frac{1}{\sqrt{s}} &= 0.5475\ 6045 - 1 \\ \hline \because \log u &= 0.5477\ 4393 - 1 \\ u &= 0.3529\ 751\ . \end{aligned}$$

La substitution des valeurs

$$s_2 = 15 \qquad g_2 = 1 \qquad g_3 = 1$$

dans la formule (10) donne

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ c_2 \,.\, s_2^{-2} &= 0.0001\ 1111\ 1 \\ c_3 \,.\, s_2^{-3} &= 0.0000\ 0529\ 1 \\ c_4 \,.\, s_2^{-4} &= 0.0000\ 0005\ 1 \\ \hline [1 + c_2 \,.\, s_2^{-2} + c_3 \,.\, s_2^{-3} + \ldots] &= 1.0001\ 1645\ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \log [1 + c_2 \,.\, s_2^{-2} + c_3 \,.\, s_2^{-3} + \ldots] &= 0.0000\ 5056\ 9 \\ \log \frac{1}{\sqrt{s_2}} &= 0.4119\ 5435\ 0 - 1 \\ \hline \because \log u_2 &= 0.4120\ 0492 \quad - 1 \\ u_2 &= 0.2582\ 228\ . \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve

$$u_2 + u_0 = 0.7059\,500$$

$$2u = 0.7059\,502$$

ce qui prouve, que la valeur de s

$$s = 8.0330\,264$$

est correcte.

2. Soit

$$R_3(s) = 4s^3 + 107s + 1507$$

$$\because \quad g_2 = -107 \qquad g_3 = -1507\ .$$

Soit

$$s_2 = 0 \qquad\qquad s_0 = -6$$

et soit

$$\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_2} < 0 \qquad\qquad \left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_0} < 0\ .$$

Calculer la valeur de s correspondant à la valeur inconnue de

$$u = \frac{u_2 + u_0}{2}$$

sans calculer les valeurs de u_2 et de u_0.

On trouve

$$R_3(s_0) = 1 \qquad R'_3(s_0) = 539 \qquad R_3(s_2) = 1507\ .$$

La formule (15) donne l'équation

$$\frac{\sqrt{1507}\,\sqrt{4s^3 + 107s + 1507} + 4s^3 + 107s + 1507 + \frac{1}{2}(12s^2 + 107)(-s)}{2s^2} + s$$

$$= \frac{\sqrt{4s^3 + 107s + 1507} + 1 + \frac{1}{2}.539(s+6)}{2(s+6)^2} - 6$$

ou

$$12s^4 - 72s^3 + 963s^2 + 20\,010\,s + 54\,252$$

$$- \sqrt{4s^3 + 107s + 1507}\,\{s^2 - (s+6)^2\sqrt{1507}\} = 0$$

d'où

$$4s^4 - 24s^3 + 321s^2 + 6\,670s + 18\,084$$

$$- \sqrt{4s^3 + 107s + 1507}\,\{-s^2 12.606\,70 - s\,155.280\,36 - 465.841\,00\} = 0$$

en sorte que

$$\varphi(s) = 4s^4 - 24s^3 + 321s^2 + 6\,670s + 18\,084$$

$$f(s) = \sqrt{4s^3 + 107s + 1507}$$

$$as^2 + bs + c = -s^2 12.606\,70 - s\,155.280\,36 - 465.841\,.$$

L'expression $as^2 + bs + c$ disparaît pour

$$s = -5.170\,10 \qquad s = -7.146\,93$$

dont l'une peut être choisie pour valeur primaire s_3 de s.

La valeur de $f(s)$, étant complexe pour $s = -7.146\,93$, est réelle pour $s = -5.170\,10$. Cette valeur de s, substituée dans la formule (24), conduit à la correction

$$h_3 = 1.0391$$

en sorte que

$$s_4 = -4.1310\,.$$

La valeur $s_4 = -4.1310$, substituée dans la formule (23), donne la correction

$$h_4 = 0.008\,78$$

en sorte que

$$s_5 = -4.122\,22$$

ce qui donne la correction

$$h_5 = 0.000\,024\,.$$

Cette correction donne la valeur définitive

$$s = -\,4.122\,196\ .$$

De même, si on laisse varier s de $s_2 = 0$ jusqu'à $s_0 = -\,6$, et que l'on suppose que cette valeur $s_0 = -\,6$ soit située *de l'autre côté* de $s = e_2 = -\,6.001\,799$, en sorte que

$$\left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_2} < 0 \qquad \left[\frac{ds}{du}\right]_{s=s_0} > 0$$

on obtient, pour le calcul de la valeur de s correspondant à la valeur inconnue de

$$u = \frac{u_2 + u_0}{2}$$

l'équation

$$\frac{\sqrt{1507}\,\sqrt{4s^3 + 107s + 1507} + 4s^3 + 107s + 1507 + \frac{1}{2}(12s^2 + 107)(-s)}{2s^2} + s$$

$$= \frac{-\sqrt{4s^3 + 107s + 1507} + 1 + \frac{539}{2}(s+6)}{2(s+6)^2} - 6$$

ou

$$4s^4 - 24s^3 + 321s^2 + 6\,670s + 18\,084$$

$$-\sqrt{4s^3 + 107s + 1507}\,\{-s^2 13.273\,367 - s\,155.280\,36 - 465.841\,00\} = 0\ .$$

Un calcul tout-à-fait analogue au calcul ci-dessus conduit à la valeur définitive de s

$$s = -\,4.225\,054\ .$$

Dans la deuxième application, nous avons choisi, à dessein, les valeurs les plus défavorables des limites s_2 et s_0 pour faire voir comment l'emploi pratique de la méthode de calculer la valeur de s est commode.

§ 6.

Sur les équations rationelles de s = p(u), *de* g_2 *et de* g_3.

L'équation principale rationelle de $s = p(u)$ de g_2 et de g_3 est celle de M. WEIERSTRASS

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0 \tag{25}$$

ou

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ . \tag{25}$$

Les racines e_1, e_2 et e_3 de cette équation déterminent les *moitiés* des périodes primitives 2ω et $2\omega'$, par les relations

$$p(\omega) = e_1 \qquad p(\omega'') = p(\omega + \omega') = e_2 \qquad p(\omega') = e_3\ .$$

Nous ferons voir, dans ce paragraphe, qu'il y a, hors de l'équation (25), d'autres équations rationelles de $s = p(u)$ de g_2 et de g_3 dont les racines correspondent à des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u)$. Nous ferons voir aussi qu'il y a une connexion remarquable entre ces équations et l'équation principale (25).

En effet, la formule (13), écrite dans la forme

$$2(s_1 - s_0)^2 = \frac{\sqrt{R_3(s_1)}\,\sqrt{R_3(s_0)} + R_3(s_0) + \frac{1}{2}R'_3(s_0)(s_1 - s_0)}{s - s_0} \tag{26}$$

indique une méthode d'obtenir des équations rationelles de $s = p(u)$ de g_2 et de g_3, et nous ferons voir, comment on peut déduire les équations dont les racines correspondent à des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u)$.

En effet, si l'on donne des valeurs spéciales à s_1 et à s_0 et que l'on chasse les radicaux de la formule (26), on obtiendra une équation de la forme

$$4(s - s_0)s_1^4 + \ldots = 0\ . \tag{27}$$

Afin que, quand $s_1 = p(2\omega) = \infty$, une valeur de s satisfasse à l'équation (27), il faut que $s = p(u)$ soit égale à $s_0 = p(u_0)$, u et u_0 étant différentes.

On satisfait à cette condition en faisant

$$u = 2\omega - u_0 \quad . \tag{28}$$

1:o. En donnant à u_0 la valeur spéciale

$$u_0 = \frac{2}{3}\omega$$

on obtient

$$u = \frac{4}{3}\omega$$

c'est à dire

$$u = 2u_0$$

et, à cause de la relation (28),

$$p(u) = p(u_0) \quad .$$

Ainsi, en faisant, dans l'équation

$$p(2v) = \frac{\left\{\overline{p(v)}^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}^2 + 2g_3 p(v)}{4\overline{p(v)}^3 - g_2 p(v) - g_3} \tag{16}$$

$$p(2v) = p(v)$$

et

$$v = \frac{2}{3}\omega$$

et en écrivant

$$s = p(v)$$

on obtient l'équation

$$s^4 - \frac{g_2}{2}s^2 - g_3 s - \frac{g_2^2}{48} = 0 \tag{29}$$

ou

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \quad . \tag{29}$$

L'équation (29) jouit de propriétés remarquables:

1. Hors de l'équation

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \tag{25}$$

de M. WEIERSTRASS, l'équation (29) est la plus simple équation rationelle de $s = p(u)$ de g_2 et de g_3.

2. Les racines de l'équation (29), comme les racines de l'équation (25), correspondent à des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u)$.

En effet, les racines de l'équation (29) déterminent les *tiers* des périodes primitives, savoir

$$s = p\left(\frac{2\omega}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega}{3}\right) \qquad s = p\left(\frac{2}{3}\omega'\right) = p\left(\frac{4\omega'}{3}\right)$$

$$s = p\left(\frac{2\omega + 2\omega'}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega + 4\omega'}{3}\right)$$

$$s = p\left(\frac{2\omega + 4\omega'}{3}\right) = p\left(\frac{4\omega + 2\omega'}{3}\right) .$$

3. L'équation (25) est la *dérivée* de l'équation (29) par rapport à s

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = \frac{d\,R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds} .$$

Application.

Soit

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 172s - 168}} , \qquad s = p(u\,;\,172\,,\,168)$$

en sorte que

$$g_2 = 172 \qquad g_3 = 168$$

et

$$e_1 = 7 \qquad e_2 = -1 \qquad e_3 = -6 .$$

Les formules de M. WEIERSTRASS [1]) pour calculer les périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,e_1\,,\,e_2\,,\,e_3)$

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} \qquad h = \frac{1}{2}l + 2\left(\frac{1}{2}l\right)^5 + 15\left(\frac{1}{2}l\right)^9 + 150\left(\frac{1}{2}l\right)^{13} + \ldots$$

$$\sqrt{\frac{2\omega_1}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}}(1 + 2h^4 + 2h^{16} + \ldots) \qquad \omega_3 = \frac{\omega_1 i}{\pi}\log\text{nat}\left(\frac{1}{h}\right)$$

donnent

$$\log h = 0.4815\,434 - 2 \qquad \log 2\omega_1 = 0.9912\,944 - 1$$

$$\because \quad \log u^2 = \log\left(\frac{\omega_1}{3}\right)^2 = 0.4262\,8622 - 2\ .$$

A l'aide de la formule

$$(7)\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + k_2 g_2 u^2 + k_3 g_3 u^4 + k_4 g_2^2 u^6 + k_5 g_2 g_3 u^8 + (k_{6,1} g_2^3 + k_{6,2} g_3^2) u^{10} + \ldots$$

et de la formule (8), voir p. 3, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u^2} &= 37.4725\,931\ldots \\
k_2 g_2 u^2 &= \ \ 0.2295\,0102\,. \\
k_3 g_3 u^4 &= \ \ 0.0042\,7291\,. \\
k_4 g_2^2 u^6 &= \ \ 0.0004\,6853\,. \\
k_5 g_2 g_3 u^8 &= \ \ 0.0000\,0714 \\
\hline
\because \quad p\left(\frac{\omega_1}{3}\right) &= 37.7068\,427 = s_1
\end{aligned}$$

en sorte que la formule

$$(16)\qquad p\left(\frac{2\omega_1}{3}\right) = \frac{\left(s_1^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3 s_1}{4s_1^3 - g_2 s_1 - g_3}$$

[1]) *Formeln und Lehrs.* p. 61.

donne

$$p\left(\frac{2\omega_1}{3}\right) = 10.3868\,712 = s$$

valeur de s qui doit satisfaire à l'équation (29).

La substitution de cette valeur de s dans l'équation (29) donne

$$s^4 = 11\,639.622 \qquad \frac{g_2}{2}s^2 = 9\,278.292$$
$$g_3 s = 1\,744.995\ldots$$
$$\frac{g_2^2}{48} = 616.333\ldots$$
$$11\,639.620\ldots$$

De même, on obtient, à l'aide des formules citées,

$$\log\left(\frac{\omega_3}{3i}\right)^2 = 0.5192\,208 - 2 = \log(-u^2)$$

$$\because \frac{1}{u^2} = -30.2537\,600 \qquad k_3 g_3 u^4 = 0.0065\,554$$
$$k_2 g_2 u^2 = -0.2842\,647 \qquad k_5 g_2 g_3 u^8 = 0.0000\,168$$
$$k_4 g_2^2 u^6 = -0.0008\,903 \qquad k_7 g_2^2 g_3 u^{12} = 0.0000\,000$$
$$(k_{6,1} g_2^3 + k_{6,2} g_3^2) u^{10} = -0.0000\,013 \qquad +0.0065\,722$$
$$-30.5389\,163$$
$$+0.0065\,722$$
$$\because p\left(\frac{\omega_3}{3}\right) = -30.5323\,441 = s_3\ .$$

Parce que

$$p\left(\frac{2\omega_3}{3}\right) = \frac{s_3^4 + \frac{g_2}{2}s_3^2 + 2g_3 s_3 + \frac{g_2^2}{16}}{4s_3^3 - g_2 s_3 - g_3}$$

$$= \frac{s_3 + \frac{g_2}{2s_3} + \frac{2g_3}{s_3^2} + \frac{g_2^2}{16 s_3^3}}{4 - \frac{g_2}{s_3^2} - \frac{g_3}{s_3^3}}$$

on obtient

$$p\left(\frac{2\,\omega_3}{3}\right) = -\,8.6495\;76 = s$$

valeur de s qui doit satisfaire aussi à l'équation (29).

Cette valeur de s, substituée dans l'équation (29), donne

$$\begin{array}{rr} s^4 = 5\;597.308 & -\frac{g_2}{2}s^2 = -\;6\;434.104 \\ -\,g_3 s = 1\;453.129 & -\frac{g_2^2}{48} = -\;\;616.333 \\ \hline 7\;050.437 & \hline -\,7\;050.437 \end{array}$$

2:o. En donnant à u_0, dans l'équation (28), la valeur spéciale

$$u_0 = \frac{\omega}{2}$$

on obtient

$$u = \frac{3\,\omega}{2}$$

c'est à dire

$$u = 3u_0$$

d'où

$$p(3u_0) = p(u_0)\ .$$

L'évaluation de la fonction $p(3u_0)$ en fonction de $p(u_0)$ et la substitution du résultat dans la dernière équation donne, en écrivant $p(u_0) = s$, après des calculs trop longs à référer,

$$(30) \qquad 2s^6 - \frac{5}{2}g_2 s^4 - 10\,g_3 s^3 - \frac{5}{8}g_2^2 s^2 - \frac{1}{2}\,g_2 g_3 s + \frac{g_2^3}{32} - g_3^2 = 0$$

ou

$$(30) \qquad R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ .$$

Cette équation jouit de propriétés remarquables:

1. Hors des équations $R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0$ et $R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0$, l'équation

$$R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0 \tag{30}$$

est la plus simple équation rationelle de $s=p(u)$ de g_2 et de g_3.

2. L'équation $R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0$ est la troisième équation rationelle de $s=p(u)$ de g_2 et de g_3 dont les racines correspondent à des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s=p(u)$.

Les racines de l'équation (30) déterminent les *quarts* des périodes et leurs valeurs conjuguées, savoir

$$s=p\left(\frac{2k\omega+2l\omega'}{4}\right)\quad\begin{cases}k=1\,,\,3\\ l=0\,,\,2\end{cases}\quad\begin{cases}k=0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\\ l=1\,,\,3\end{cases}.$$

3. L'équation

$$s^4-\frac{g_2}{2}s^2-g_3s-\frac{g_2^2}{48}=0 \tag{29}$$

ou

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0 \tag{29}$$

dont les racines correspondent aux *tiers* des périodes primitives de la fonction elliptique $s=p(u)$, est l'équation *dérivée*, par rapport à s, du *deuxième* ordre, de l'équation (30), c'est à dire que

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=\frac{2}{\underline{5}}\cdot\frac{d^2R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds^2}$$

et l'équation

$$4s^3-g_2s-g_3=0 \tag{25}$$

ou

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3)=0 \tag{25}$$

dont les racines correspondent aux *moitiés* des périodes primitives de la fonction elliptique $s=p(u)$ est l'équation dérivée, par rapport à s, du *troisième* ordre de l'équation (30), en sorte qu'on a

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = \frac{d\,R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds} = \frac{2}{\underline{5}} \cdot \frac{d^3 R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds^3} \ .$$

Application.

Soit

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 172s - 168}} \ ; \quad s = p(u\,;\,172\,,\,168)$$

en sorte que

$$g_2 = 172 \qquad g_3 = 168$$

$$e_1 = 7 \qquad e_2 = -1 \qquad e_3 = -6 \ .$$

En faisant, dans la formule

$$\left\{ p\left(\frac{\omega_\lambda}{2}\right) - e_\lambda \right\}^2 = 3e_\lambda^2 - \frac{g_2}{4} \tag{21}$$

$$\lambda = 1 \qquad e_\lambda = 7 \qquad g_2 = 172$$

on obtient

$$p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 7 + \sqrt{104} = 17.1980\ \underline{39} = s$$

valeur de s qui doit satisfaire à l'équation (30).

La substitution de cette valeur de s dans l'équation (30) donne

$$2s^6 = 5174\ 9155.4\ldots$$
$$\frac{g_2^3}{32} = \underline{\quad 15\ 9013.96}$$
$$5190\ 8169.36$$

$$\frac{5}{2} g_2 s^4 = 3761\ 6969.9\ldots$$
$$10 g_3 s^3 = \quad 854\ 5666.8\ldots$$
$$\frac{5}{8} g_2^2 s^2 = \quad 546\ 8832.0\ldots$$
$$\frac{1}{2} g_2 g_3 s = \quad 24\ 8477.2\ldots$$
$$g_3^2 = \quad 2\ 8224.0\ldots$$
$$5190\ 8169.9\ldots$$

En faisant, dans la formule (21),

$$\lambda = 3 \qquad e_\lambda = -6 \qquad g_2 = 172$$

on obtient

$$p\left(\frac{\omega_3}{2}\right) = -6 - \sqrt{65} = -14.0622\,574\ldots = s$$

valeur de s qui doit satisfaire aussi à l'équation (30).

La substitution de cette valeur de s dans l'équation (30) donne

$$\begin{aligned} 2s^6 &= 1546\,5365.0\ldots \\ -10g_3s^3 &= 467\,1694.5\ldots \\ -\frac{1}{2}g_2g_3s &= 20\,3171.5\ldots \\ \frac{g_2^3}{32} &= 15\,9013.96\ldots \\ &\overline{2049\,9244.96\ldots} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{5}{2}g_2s^4 &= 1681\,4677.7\ldots \\ \frac{5}{8}g_2^2s^2 &= 365\,6342.7\ldots \\ g_3^2 &= 2\,8224.0\ldots \\ &\overline{2049\,9244.4\ldots} \end{aligned}$$

L'équation (29) étant l'équation dérivée du deuxième ordre de l'équation (30), et l'équation (25) étant l'équation dérivée du troisième ordre de l'équation (30), il est à-propos de discuter l'équation dérivée du premier ordre de l'équation (30), c'est à dire l'équation

$$12s^5 - 10g_2s^3 - 30g_3s^2 - \frac{5}{4}g_2^2s - \frac{1}{2}g_2g_3 = 0\ . \tag{31}$$

Quelles parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$ les racines de l'équation (31) déterminent-elles?

Il n'est pas difficile de prouver que les racines de l'équation (31) ne déterminent pas de parties aliquotes des périodes primitives d'une fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$.

En effet, prenons pour exemple la fonction elliptique

$$s = p(u\,;\,g_2\,,\,0) \qquad g_2 > 0$$

en sorte que l'équation (25) devienne

$$4s^3 - g_2s = 0\ . \tag{32}$$

Alors, l'équation (31) devient

$$12s^5 - 10g_2s^3 - \frac{5}{4}g_2^2s = 0\ . \tag{33}$$

Le parallelogramme des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2\,,\, 0)$, $g_2 > 0$, est un carré, dont les côtés se calculent à l'aide des relations

$$e_1 = \frac{\sqrt{g_2}}{2} = p(\omega_1) \qquad e_2 = 0 = p(\omega_1 + \omega_3) \qquad e_3 = -\frac{\sqrt{g_2}}{2} = p(\omega_3)\ .$$

La valeur $s = 0 = e_2$ satisfaisant à l'équation (33), de même qu'à l'équation (32), il faut aussi que les autres racines de l'équation (32), qui déterminent les autres parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2\,,\, 0)$ de la même espèce que $\omega_1 + \omega_3$, savoir ω_1 et ω_3, c'est à dire e_1 et e_3, satisfassent à l'équation (33). Ainsi, il faut que

$$\frac{12}{16} g_2^2 - \frac{10}{4} g_2^2 - \frac{5}{4} g_2^2 = 0$$

ou

$$g_2 = 0\ .$$

Mais

$$s = p(u\,;\, 0\,,\, 0)$$

n'étant pas une fonction elliptique, il est prouvé que les racines de l'équation (31) ne déterminent pas de parties aliquotes des périodes primitives d'une fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$.

3:o. En donnant à u_0, dans l'équation (28), la valeur spéciale

$$u_0 = \frac{4\omega}{5}$$

on obtient

$$u = \frac{6\omega}{5}$$

et

$$p(u) = p(u_0)\ .$$

L'évaluation de $p(u)$ et de $p(u_0)$ en fonctions de $s = p\left(\frac{u_0}{2}\right)$ conduit, après des calculs trop longs à référer, à l'équation

$$(34)\quad 5s^{12} - \frac{31}{2} g_2 s^{10} - 95 g_3 s^9 - \frac{105}{16} g_2^2 s^8 + 15 g_2 g_3 s^7 + \left(\frac{75}{16} g_2^3 - 15 g_3^2\right) s^6$$

$$+ \frac{87}{8} g_2^2 g_3 s^5 + \left(-\frac{125}{256} g_2^4 + 30 g_2 g_3^2\right) s^4 + \left(-\frac{5}{16} g_2^3 g_3 + 25 g_3^3\right) s^3$$

$$+ \left(\frac{25}{512} g_2^5 - \frac{15}{16} g_2^2 g_3^2\right) s^2 + \left(\frac{25}{256} g_2^4 g_3 - \frac{5}{2} g_2 g_3^3\right) s + \frac{1}{4096} g_2^6 + \frac{1}{32} g_2^3 g_3^2 - g_3^4 = 0$$

ou

$$r_{12}(s\,;\, g_2\,,\, g_3) = 0\ .$$

L'équation

$$(34)\qquad r_{12}(s\,;\, g_2\,,\, g_3) = 0$$

est la quatrième des équations rationelles de $s = p(u)$, de g_2 et de g_3, dont les racines correspondent à des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$.

Les racines de l'équation $r_{12}(s\,;\, g_2\,,\, g_3) = 0$ déterminent les *cinquièmes* parties des périodes et leurs valeurs conjuguées, savoir

$$s = p\left(\frac{2k\omega + 2l\omega'}{5}\right) \qquad k\,,\, l = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, 4\ ,$$

excepté $k = l = 0$.

Application:

Soit

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 172s - 168}}\ , \quad s = p(u\,;\, 172\,,\, 168)$$

en sorte que

$$g_2 = 172 \qquad g_3 = 168$$

$$e_1 = 7 \qquad e_2 = -1 \qquad e_3 = -6$$

et (voir p. 37)

$$\log 2\omega_1 = 0.9912\ 944 - 1$$

$$\therefore\ \log \frac{\omega_1}{5} = 0.9912\ 944 - 2 = \log u\ .$$

Pour cette valeur de u, les formules (7) et (8) donnent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u^2} &= 104.0905\ 3 \\
k_2 g_2 u^2 &= \quad 0.0826\ 204 \\
k_3 g_3 u^4 &= \quad 0.0005\ 5377 \\
k_4 g_2^2 u^6 &= \quad 0.0000\ 2186 \\
k_5 g_2 g_3 u^8 &= \quad 0.0000\ 0012 \\
\therefore\ p\left(\frac{\omega_1}{5}\right) &= 104.1737\ 26 = s_1
\end{aligned}$$

en sorte que

$$p\left(\frac{2\omega_1}{5}\right) = \frac{s_1 + \frac{g_2}{2s_1} + \frac{2g_3}{s_1^2} + \frac{g_2^2}{16 s_1^3}}{4 - \frac{g_2}{s_1^2} - \frac{g_3}{s_1^3}}$$

$$= \frac{105.0318\ 67}{3.9840\ 02}$$

$$= 26.3634\ 10 = s$$

$$\therefore\ \log s = 1.4210\ 0155$$

valeur de s qui doit satisfaire à l'équation

$$r_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ . \tag{34}$$

A cause de la grandeur de la valeur de s, il vaut mieux écrire l'équation (34) sous la forme

$$5s^4 - \frac{31}{2} g_2 s^2 - 95 g_3 s - \frac{105}{16} g_2^2 s^0 + 15 g_2 g_3 s^{-1} + \cdots + \left(\frac{1}{4096} g_2^6 + \frac{1}{32} g_2^3 g_3^2 - g_3^4\right) s^{-8} = 0\ . \tag{35}$$

La substitution de $s = 26.3634\,10$ dans l'équation (35) donne

$$\begin{aligned}
5s^4 &= 2\,415\,328.30 \\
..s^{-1} &= 16\,440.97 \\
..s^{-2} &= 33\,709.00 \\
..s^{-3} &= 2\,949.79 \\
..s^{-6} &= 19.561.. \\
..s^{-7} &= 1.3919 \\
..s^{-8} &= 0.0429\,07 \\
\hline
&2\,468\,449.05
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{31}{2}g_2s^2 &= -1\,852\,947.90 \\
..s &= -420\,760.00 \\
..s^0 &= -194\,145.00 \\
..s^{-4} &= -583.18.. \\
..s^{-5} &= -11.668.. \\
\hline
&-2\,468\,447.75
\end{aligned}$$

Aussi, les formules de la p. 37, donnent-elles

$$\log\left|\frac{\omega_3}{5i}\right| = 0.0377\,6250 - 1$$

$$\because\ \log\left|-\left(\frac{\omega_3}{5}\right)^2\right| = 0.0755\,2500 - 2 = \log(-u^2)$$

en sorte que l'on a, à l'aide des formules (7) et (8),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u^2} &= -84.0378\,7... \\
k_2g_2u^2 &= -0.1023\,35.. \\
k_4g_2^2u^6 &= -0.0000\,415 \\
\hline
&-84.1402\,5.... \\
&+0.0008\,5 \\
\hline
\because\ p\left(\frac{\omega_3}{5}\right) &= -84.1394\,0 = e_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3g_3u^4 &= 0.0008\,4958 \\
k_5g_2g_3u^8 &= 0.0000\,0028 \\
\hline
&0.0008\,4986
\end{aligned}$$

en sorte que

$$p\left(\frac{2\omega_3}{5}\right) = \frac{e_2 + \frac{g_2}{2e_2} + \frac{2g_3}{e_2^2} + \frac{g_2^2}{16e_2^3}}{4 - \frac{g_2}{e_2^2} - \frac{g_3}{e_2^3}}$$

$$= -\frac{85.1719\,00}{3.9759\,86}$$

$$= -\,21.4078\,0 = s$$

$$\therefore\ \log(-s) = 1.3305\,721$$

valeur de s qui doit satisfaire à l'équation (34), ou à l'équation (35).

La substitution de $s = -\,21.4078\,0$ dans l'équation (35) donne

$5s^4 =$	1 050 167.10	$-\frac{31}{2}g_2s^2 =$	$-$ 1 221 811.79
$\ldots s =$	341 666.86		
$\ldots s^{-2} =$	51 121.63	$\ldots s^0 =$	$-$ 194 145.00
$\ldots s^{-5} =$	33.0503..	$\ldots s^{-1} =$	$-$ 20 246.68
$\ldots s^{-6} =$	68.2312	$\ldots s^{-3} =$	$-$ 5 509.08
$\ldots s^{-8} =$	0.227	$\ldots s^{-4} =$	$-$ 1 341.23
		$\ldots s^{-7} =$	$-$ 5.9790
	1 443 057.098		$-$ 1 443 059.76..

L'équation principale de M. WEIERSTRASS

$$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 4s^3 - g_2s - g_3 = 0 \tag{25}$$

dont les racines correspondent aux demi-périodes de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$, n'est pas une équation dérivée par rapport à s de l'équation

$$r_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \tag{34}$$

(du douzième degré relativement à s) comme elle l'est des équations

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \tag{29}$$

et

$$R_6(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \tag{30}$$

dont les racines correspondent aux tiers et aux quatrièmes parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$.

Nous ferons voir plus tard qu'il existe une autre équation rationelle de $s = p(u)$, de g_2 et de g_3, aussi du *douzième* degré relativement à s, aux racines de laquelle correspondent des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$, et de laquelle l'équation (25) est l'équation dérivée par rapport à s, du neuvième ordre.

4:o. En donnant à u_0, dans l'équation

(28) $$u = 2\omega - u_0$$

la valeur spéciale

$$u_0 = \frac{2\omega}{6}$$

on obtient

$$u = 5 \cdot \frac{2\omega}{6}$$

et

$$p(u) = p(u_0)$$

ou

$$p\left(5 \cdot \frac{\omega}{3}\right) = p\left(\frac{\omega}{3}\right) .$$

Le calcul de $p\left(5 \cdot \frac{\omega}{3}\right)$ en fonction de $s = p\left(\frac{\omega}{3}\right)$ conduit à une équation rationelle de s, de g_2 et de g_3, dont les racines correspondent aux *sixièmes* parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2\,,\, g_3)$.

Le calcul de $p(5u)$ en fonction de $p(u)$ est un peu pénible.

On peut se figurer différentes méthodes de déduire l'équation désirée. Ces méthodes conduisent à des résultats de formes très-différentes, qui exigent des réductions nombreuses afin d'obtenir l'équation définitive.

En effet, en substituant la valeur de

$$(36)\quad p(3u) = \Big\{s^9 + 3g_2 s^7 + 24 g_3 s^6 + \frac{15}{8} g_2^2 s^5 - \frac{3}{2} g_2 g_3 s^4 + \Big(-\frac{9}{16} g_2^3 + 3g_3^2\Big) s^3$$

$$- \frac{3}{4} g_2^2 g_3 s^2 + \Big(\frac{9}{256} g_2^4 - \frac{3}{2} g_2 g_3^2\Big) s + \frac{g_2^3 g_3}{32} - g_3^3\Big\} : \Big(3s^4 - \frac{3}{2} g_2 s^2 - 3 g_3 s - \frac{g_2^2}{16}\Big)^2$$

où

$$s = p(u)$$

dans l'équation

$$4\overline{p(3u)}^3 - g_2 p(3u) - g_3 = 0$$

et en chassant le dénominateur, on obtient l'équation

$$4s^{27} - 360 g_2 s^{25} - 441 g_3 s^{24} + \ldots - 4g_3^9 = 0\ . \tag{37}$$

Les valeurs

$$s = p\left(\frac{2k\omega + 2l\omega'}{6}\right)$$

où

$$k\,,\,l = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,5$$

excepté les combinaisons

$$\begin{array}{cccccccccc} k=0 & k=0 & & k=2 & k=4 & & k=2 & k=4 & & k=2 \quad k=4 \\ l=2 & l=4 & & l=0 & l=0 & & l=2 & l=4 & & l=4 \quad l=2 \end{array} \tag{38}$$

satisfont à l'équation (37).

Plus tard, nous reviendrons à l'équation (37), qui peut s'écrire sous une forme faisant voir immédiatement pourquoi les dites combinaisons (38) doivent être exceptées.

La combinaison de l'équation (36) et des formules de M. WEIERSTRASS

$$p(2w) = \frac{\left\{\overline{p(w)}^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}^2 + 2g_3 p(w)}{4\overline{p(w)}^3 - g_2 p(w) - g_3}$$

$$p(u+v) + p(u-v) = \frac{2\left\{p(u)p(v) - \frac{1}{4}g_2\right\}\left\{p(u) + p(v)\right\} - g_3}{\{p(u) - p(v)\}^2}$$

dans laquelle on aurait à remplacer u par $3w$ et v par $2w$, conduirait aussi à une équation rationelle de $s[= p(w)]$ de g_2 et de g_3, dont les racines seraient des valeurs de $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$ correspondant aux sixièmes parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$.

L'équation résultante exigerait encore plus de réductions que l'équation (37).

La méthode la plus simple d'obtenir l'équation désirée est d'employer l'équation

$$\sigma^4 - \frac{g_2}{2}\sigma^2 - g_3\sigma - \frac{g_2^2}{48} = 0 \ . \tag{29}$$

Les racines de l'équation (29) sont

$$\sigma = p\left(\frac{2\omega}{3}\right) , \qquad \sigma = p\left(\frac{2\omega'}{3}\right) , \ \ldots$$

En substituant, dans l'équation (29), à σ

$$\sigma = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3 s}{4s^3 - g_2 s - g_3} \tag{16}$$

on obtient une équation rationelle de s, de g_2 et de g_3.

L'équation (16) fait voir que la valeur de l'argument u de la fonction $s = p(u)$ est la moitié de l'argument de la fonction σ.

Donc, les racines de l'équation cherchée, équation en s, sont les valeurs de

$$s = p\left(\frac{2k\omega + 2l\omega'}{6}\right) \qquad k\ ,\ l = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ 5\ .$$

excepté quelques combinaisons facilement trouvées.

En substituant, dans l'équation (29), à σ l'expression

$$\sigma = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3 s}{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

et en chassant le dénominateur, on obtient l'équation

$$\begin{aligned} (39)\quad & s^{16} - 6g_2 s^{14} - 56g_3 s^{13} - \frac{91}{12}g_2^2 s^{12} + \left(\frac{161}{24}g_2^3 - 56g_3^2\right)s^{10} + \frac{143}{6}g_2^2 g_3 s^9 \\ & + \left(-\frac{157}{128}g_2^4 + \frac{207}{2}g_2 g_3^2\right)s^8 + \left(g_2^3 g_3 + 116g_3^3\right)s^7 + \left(\frac{161}{384}g_2^5 - \frac{7}{2}g_2^2 g_3^2\right)s^6 \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{35}{32}g_2^4g_3 - 21g_2g_3^3\right)s^5 + \left(-\frac{91}{3072}g_2^6 + \frac{21}{16}g_2^3g_3^2 - 7g_3^4\right)s^4$$

$$+\left(-\frac{7}{48}g_2^5g_3 + \frac{49}{12}g_2^2g_3^3\right)s^3 + \left(-\frac{3}{2048}g_2^7 - \frac{1}{8}g_2^4g_3^2 + \frac{9}{2}g_2g_3^4\right)s^2$$

$$+\left(-\frac{1}{512}g_2^6g_3 - \frac{1}{48}g_2^3g_3^3 + 2g_3^5\right)s + \frac{g_2^8}{65\,536} - \frac{1}{512}g_2^5g_3^2 + \frac{1}{24}g_2^2g_3^4 = 0$$

ou

$$r_{16}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ . \tag{39}$$

L'équation fondamentale de M. WEIERSTRASS

$$4s^3 - g_2s - g_3 = 0 \tag{25}$$

n'est pas une équation dérivée, par rapport à s, de l'équation (39).

L'équation (39) est résoluble en deux autres équations rationelles de s, de g_2 et de g_3, savoir

$$s^4 - \frac{g_2}{2}s^2 - g_3s - \frac{g_2^2}{48} = 0 \tag{29}$$

ou

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0 \tag{29}$$

et

$$s^{12} - \frac{11}{2}g_2s^{10} - 55g_3s^9 - \frac{165}{16}g_2^2s^8 - 33g_2g_3s^7 + \left(\frac{23}{16}g_2^3 - 111g_3^2\right)s^6 \tag{40}$$

$$-\frac{33}{8}g_2^2g_3s^5 + \left(-\frac{185}{256}g_2^4 + 15g_2g_3^2\right)s^4 + \left(-\frac{5}{16}g_2^3g_3 + 5g_3^3\right)s^3$$

$$+\left(\frac{45}{512}g_2^5 - \frac{39}{16}g_2^2g_3^2\right)s^2 + \left(\frac{33}{256}g_2^4g_3 - \frac{7}{2}g_2g_3^3\right)s - \frac{3}{4096}g_2^6 + \frac{3}{32}g_2^3g_3^2 - 2g_3^4 = 0\,.$$

ou

$$R_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ . \tag{40}$$

Aux racines de l'équation (29) correspondent les valeurs de l'argument

$$\frac{2\omega}{3} \qquad \frac{2\omega'}{3} \qquad \frac{2\omega+2\omega'}{3} \qquad \frac{2\omega+4\omega'}{3}$$

et les valeurs y conjuguées.

Donc, aux racines de l'équation (40) doivent correspondre les sixièmes parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\, g_2, g_3)$, savoir

$$\frac{2\omega}{6}, \quad \frac{2\omega'}{6}, \quad \frac{2\omega+2\omega'}{6}, \ldots$$

et les valeurs de l'argument y conjuguées.

Application:

Soit

$$u = -\int_{\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - 172s - 168}}, \qquad s = p(u\,;\, 172,\ 168)$$

en sorte que

$$g_2 = 172 \qquad g_3 = 168$$

$$e_1 = 7 \qquad e_2 = -1 \qquad e_3 = -6\ .$$

Puisque (voir p. 37) pour cette fonction elliptique $s = p(u\,;\, 172,\ 168)$

$$s = p\left(\frac{2\omega_1}{6}\,;\ 172,\ 168\right) = 37.7068\,427 \tag{41}$$

il vaut mieux écrire, au lieu de l'équation (40), l'équation

$$s^4 - \frac{11}{2} g_2 s^2 - 55 g_3 s - \frac{165}{16} g_2^2 s^0 - 33 g_2 g_3 s^{-1} + \frac{23}{16} g_2^3 s^{-2} - 111 g_3^2 s^{-2}$$

$$- \frac{33}{8} g_2^2 g_3 s^{-3} - \frac{185}{256} g_2^4 s^{-4} + 15 g_2 g_3^2 s^{-4} - \frac{5}{16} g_2^3 g_3 s^{-5} + 5 g_3^3 s^{-5} + \frac{45}{512} g_2^5 s^{-6}$$

$$- \frac{39}{16} g_2^2 g_3^2 s^{-6} + \frac{33}{256} g_2^4 g_3 s^{-7} - \frac{7}{2} g_2 g_3^3 s^{-7} - \frac{3}{4096} g_2^6 s^{-8} + \frac{3}{32} g_2^3 g_3^2 s^{-8} - 2 g_3^4 s^{-8} = 0 \tag{42}$$

pour y substituer la valeur (41) de s.

Comme on a

$$s = 37.7068\,427 \qquad \log s = 1.5764\,2017$$

à substituer dans l'équation (42), on trouve

$s^4 =$	2 021 532.4....
$..s^{-2} =$	5 144.61..
$..s^{-4} =$	36.021..
$..s^{-5} =$	0.3110 2..
$..s^{-6} =$	4.6032 9..
$..s^{-7} =$	0.1748 8...
$..s^{-8} =$	0.0032 9..
	2 026 718.12

$\frac{11}{2} g_2 s^2 =$	1 345 028.4...
$..s =$	348 411.3...
$..s^0 =$	305 084.9...
$..s^{-1} =$	25 289.0...
$..s^{-2} =$	2 203.44..
$..s^{-3} =$	382.41..
$..s^{-4} =$	312.8704..
$..s^{-5} =$	3.5047..
$..s^{-6} =$	0.7081..
$..s^{-7} =$	0.0263 4..
$..s^{-8} =$	0.0046 41
$..s^{-8} =$	0.0003 90
	2 026 716.57

De même, puisque (voir p. 38)

$$s_3 = p\left(\frac{2\,\omega_3}{6}\,;\ 172\,,\ 168\right) = -\,30.5323\,441$$

on obtient, en substituant cette valeur de s dans l'équation (42),

$s^4 =$	869 041.36..
$..s =$	282 118.85..
$..s^{-1} =$	31 231.40..
$..s^{-2} =$	7 846.44..
$..s^{-3} =$	720.294..
$..s^{-4} =$	83.791..
$..s^{-5} =$	10.068..
$..s^{-6} =$	16.332..
$..s^{-7} =$	0.1154..
$..s^{-8} =$	0.0178..
	1 191 068.67

$\frac{11}{2} g_2 s^2 =$	881 883.97..
$..s^0 =$	305 084.95..
$..s^{-2} =$	3 360.64..
$..s^{-4} =$	727.788..
$..s^{-5} =$	0.8935..
$..s^{-6} =$	2.5124..
$..s^{-7} =$	0.7663..
$..s^{-8} =$	0.0251 12..
$..s^{-8} =$	0.0021 11..
	1 191 061.55

Propriétés de l'équation

(39) $$r_{16}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ .$$

Nous avons fait voir

1. que les racines de l'équation (39) correspondent aux *sixièmes* parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$;

2. que l'équation fondamentale

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

n'est pas une équation dérivée, par rapport à s, de l'équation

(39) $$r_{16}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0\ ;$$

3 que l'équation (39) est résoluble en deux autres équations rationelles de s, de g_2 et de g_3, en sorte que

$$r_{16}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)\,.\,R_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3)\ .$$

A ces propriétés, nous pouvons en ajouter encore une.

En effet, en dérivant l'équation

$$R_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0$$

huit fois par rapport à s, on parvient à l'équation

$$R_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = 0$$

en sorte que l'on a

4. $$R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = \frac{dR_4(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds} = C\,.\,\frac{d^9R_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3)}{ds^9}\ .$$

La méthode que nous avons employée pour obtenir, à l'aide de l'équation (28), les équations rationelles de s, de g_2 et de g_3 dont les racines correspondent aux tiers, aux quatrièmes, aux cinquièmes et aux sixièmes parties des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$ — comme les racines de l'équation fondamentale de M. WEIERSTRASS $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ correspondent aux demi-périodes — la même méthode étant applicable à la déduction des équations rationelles

de s, de g_2 et de g_3 dont les racines correspondent à des parties aliquotes quelconques des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$, il ne nous reste qu'à revenir à l'équation

$$(37) \qquad 4s^{27} - 360\,g_2 s^{25} - 441\,g_3 s^{24} + \ldots - 4g_3^9 = 0$$

pour faire voir pourquoi les combinaisons (38) doivent être exceptées des parties aliquotes des périodes primitives de la fonction elliptique $s = p(u\,;\,g_2\,,\,g_3)$ qui correspondent aux racines de l'équation (37).

En effet, l'équation

$$(37) \qquad 4s^{27} - 360\,g_2 s^{25} - 441\,g_3 s^{24} + \ldots - 4g_3^9 = 0$$

s'obtient, comme nous l'avons vu, en substituant dans l'équation

$$4\overline{p(3u)}^3 - g_2 p(3u) - g_3 = 0$$

la valeur de

$$(36)\quad p(3u) = \Big\{s^9 + 3g_2 s^7 + 24 g_3 s^6 + \frac{15}{8} g_2^2 s^5 - \frac{3}{2} g_2 g_3 s^4 + \Big(-\frac{9}{16} g_2^3 + 3g_3^2\Big)s^3$$

$$- \frac{3}{4} g_2^2 g_3 s^2 + \Big(\frac{9}{256} g_2^4 - \frac{3}{2} g_2 g_3^2\Big) s + \frac{1}{32} g_2^3 g_3 - g_3^3\Big\} :$$

$$\Big\{3s^4 - \frac{3}{2} g_2 s^2 - 3 g_3 s - \frac{g_2^2}{16}\Big\}^2$$

où

$$s = p(u)\ .$$

L'équation (37) peut s'écrire sous la forme

$$(43)\qquad (4s^3 - g_2 s - g_3)\Big\{s^{12} - \frac{11}{2} g_2 s^{10} - 55 g_3 s^9 - \frac{165}{16} g_2^2 s^8 - 33 g_2 g_3 s^7$$

$$+ \Big(\frac{23}{16} g_2^3 - 111 g_3^2\Big) s^6 - \frac{33}{8} g_2^2 g_3 s^5 + \Big(-\frac{185}{256} g_2^4 + 15 g_2 g_3^2\Big) s^4$$

$$+ \Big(-\frac{5}{16} g_2^3 g_3 + 5 g_3^3\Big) s^3 + \Big(\frac{45}{512} g_2^5 - \frac{39}{16} g_2^2 g_3^2\Big) s^2 + \Big(\frac{33}{256} g_2^4 g_3 - \frac{7}{2} g_2 g_3^3\Big) s$$

$$- \frac{3}{4096} g_2^6 + \frac{3}{32} g_2^3 g_3^2 - 2 g_3^4\Big\}^2 = 0\ .$$

L'équation (43) prouve que l'on a, pour l'équation (37),

$$r_{27}(s\,;\,g_2\,,\,g_3) = R_3(s\,;\,g_2\,,\,g_3)\cdot\{R_{12}(s\,;\,g_2\,,\,g_3)\}^2\ .$$

Le facteur

$$s^{12} - \frac{11}{2}\,g_2\,s^{10} - \ldots - 2g_3^4 = 0$$

donne les mêmes valeurs de s que l'équation (40), et le facteur

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

donne les valeurs

$$s = p(\omega) \qquad s = p(\omega') \qquad s = p(\omega+\omega')\ .$$

L'équation (37), pourquoi ne donne-t-elle pas les valeurs de s correspondant à

$$\frac{2\omega}{3} \qquad \frac{2\omega'}{3} \qquad \frac{2\omega+2\omega'}{3} \qquad \frac{2\omega+4\omega'}{3}$$

et aux valeurs y conjuguées de l'argument?

La raison en est, que les valeurs de s correspondant à ces valeurs de l'argument et satisfaisant à l'équation

$$s^4 - \frac{g_2}{2}\,s^2 - g_3\,s - \frac{g_2^2}{48} = 0 \tag{29}$$

feraient disparaître le dénominateur de l'expression (36), tandis que l'emploi de cette formule exige que la valeur de $p(3u)$ soit finie.

SECTIO MEDICA ET HISTORIÆ NATURALIS.

STUDIEN

ÜBER

KLINIK UND PATHOLOGIE DER IDIOTIE

NEBST UNTERSUCHUNGEN ÜBER

DIE NORMALE ANATOMIE DER HIRNRINDE

VON

Dr. CARL HAMMARBERG

MIT SIEBEN TAFELN

NACH DEM TODE DES VERFASSERS
AUS DEM SCHWEDISCHEN ÜBERSETZT VON

WALTER BERGER

UND HERAUSGEGEBEN VON

Prof. Dr. S. E. HENSCHEN

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 10 März 1894)

UPSALA 1895
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI
EDV. BERLING

Mit Studien über die pathologischen Veränderungen bei Formen der Idiotie beschäftigt, wurde ich auf das Studium der normalen Hirnrinde geführt, über deren Bau sich sowohl unvollständige, als auch widersprechende Ansichten in der Literatur vorfinden. Da nun eine Beschreibung der pathologischen Veränderungen eines Organs mit Nothwendigkeit eine genaue Kenntniss des normalen Baues dieses Organs voraussetzt, so habe ich es für nöthig gehalten, ein genaues Studium der normalen Hirnrinde vorzunehmen und dem Bericht über die Untersuchungen über die pathologische Anatomie der Idiotie eine Darstellung der Resultate vorauszuschicken, zu denen mich dieses Studium geführt hat.

Da ich ausser den gewöhnlichen, von den Neurologen zu Studien auf diesem Gebiete allgemein angewendeten Methoden auch eine von mir ausgearbeitete Methode, die Zahl der Nervenzellen in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ [1]) Hirnsubstanz exakt zu bestimmen, angewendet habe, so glaube ich, hier einen ausführlichen Bericht über dieselbe geben zu müssen.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt demnach in drei Abtheilungen:

I. Bericht über die von mir angewendeten Methoden.
II. Darstellung der Anordnung, Menge, Grösse und Struktur der Zellen in den verschiedenen Schichten der normalen Hirnrinde.
III. Beiträge zur Klinik und Pathologie der Idiotie.

---

1) Auf diese Weise bezeichne ich im Folgenden das Volumen eines Cubus, dessen Seite 0,1 mm ist. Analog wird die Fläche eines Quadrats, dessen Seite 0,1 mm ist, mit $[0{,}1\ \text{mm}]^2$ bezeichnet.

I.

Da die Methode, über die im Folgenden berichtet werden soll, erfordert, dass das Rindengebiet, dessen Zellenanzahl bestimmt werden soll, in eine Serie gleich dicker Schnitte zerlegt wird, musste bei den vorbereitenden Präparirungsmethoden die grösste Sorgfalt beobachtet werden.

Zuerst muss eine solche *Härtungsflüssigkeit* gewählt werden, die keinerlei Veränderung hervorruft, weder in der Rinde in ihrer Gesammtheit, noch in der Lage der in derselben befindlichen Elemente und ihrem Verhalten zu einander; oder, wenn eine derartige Veränderung nicht umgangen werden kann, muss eine Flüssigkeit gewählt werden, bei deren Anwendung diese Veränderung theils so gering wie möglich ist, theils für Rinde von einem gewissen Bau bei verschiedenen Gehirnen constant bleibt.

Um zu bestimmen, welche von unsern gewöhnlichen Härtungsflüssigkeiten die genannten Forderungen am besten erfüllt, wurden folgende *Versuchsserien* angestellt.

Von einem möglichst frischen Gehirne wurden aus den Windungen kleine Stücke ausgeschnitten, deren Volumen durch Messen der von ihnen verdrängten Flüssigkeitsmenge bestimmt wurde [1]). Es wurde sowohl die Länge und Breite der ganzen Stücke, als auch speciell die Dicke der Rinde gemessen. Derartige genau gemessene Stücke wurden verschieden lange Zeit in die verschiedenen Härtungsflüssigkeiten gelegt, wonach das Volumen und die Dimensionen von Neuem gemessen wurden.

Dabei fand sich, dass in *Müller'scher Flüssigkeit* eine Schwellung des ganzen Stückes und speciell der Rinde entsteht, dass diese Schwel-

1) Das hierbei angewandte Verfahren ist folgendes: Eine gleichmässig weite Glasröhre wird mit Flüssigkeit von einer gegebenen Temperatur bis zu einer Marke gefüllt. Wenn das Hirnstück in die Flüssigkeit gelegt und die Flüssigkeitssäule gestiegen ist, wird mit einer 1 cm^3 haltenden, durch 30 gleich grosse Theilstriche graduirten feinen Glasspritze so viel von der Flüssigkeit aufgesaugt, dass sich die Flüssigkeitssäule genau wieder auf die ursprüngliche Marke einstellt. Die angesaugte Flüssigkeitsmenge, die direkt in der Spritze in halben Theilstrichen oder $^1/_{60}$ cm^3 abgelesen werden kann, giebt das Volumen der Rinde an.

lung bereits nach 24 Stunden nachgewiesen werden kann, dass aber dieselbe erst nach Härtung von einigen Wochen ausgeprägter wird. Nach 3 Tagen hatten die Stücke im Mittel von 0,51 bis 0,57 cm^3 zugenommen und die Volumenvermehrung betrug also in dieser Zeit bis 0,06 cm^3 oder 11,7 %. Vorausgesetzt, dass das Stück allenthalben dieselbe Dichtigkeit besässe und die Schwellung alle Theile gleichmässig beträfe, würde die Rinde (bei einer Dicke von 2 mm) höchstens 0,1 mm an Dicke zugenommen haben.

Stücke, die zuerst 3 Tage lang in *Müller'scher Flüssigkeit* und danach 14 Tage lang in 95 % Alkohol gelegen hatten, schrumpften ganz bedeutend, so dass das Volumen von 0,513 cm^3 auf 0,292 cm^3 herabging. Die Verminderung des ursprünglichen Volumens, das 0,513 cm^3 war, betrug also 0,221 cm^3 oder 43 %. Je länger das Präparat in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet ist, desto geringer wird die folgende Schrumpfung in Alkohol, dessen Concentration gradweise vermehrt wird, und die Volumenabnahme, die ein in Müllerscher Flüssigkeit wohlgehärtetes Stück binnen 14 Tagen in 60 % Spiritus erleidet, beläuft sich im Mittel auf 25 % des ursprünglichen Volumens. In Aether erleidet ein derart geschrumpftes Stück keine nennenswerthe weitere Schrumpfung.

Die erwähnte Schrumpfung ist auch für Stücke aus einem Gebiete desselben Gehirns nicht gleichmässig und es findet sich kein constantes Verhältniss zwischen Stücken aus Gehirnen von verschiedenem Härtungsgrade.

In Spiritus von 95 % unterliegen Stücke der Rinde aus einem frischen Gehirne einer Schrumpfung, die innerhalb 24 Stunden bis zu 20,5 % beträgt. Irgend eine Veränderung in der Dicke der Rinde kann durch makroskopische Messung nicht nachgewiesen werden. Die berechnete Verminderung beträgt 0,1 bis höchstens 0,2 mm, vorausgesetzt dass das Hirnstück allenthalben dieselbe Dichtigkeit besitzt.

Wenn das Stück weitere 3 Stunden lang in absolutem Alkohol (mit Hülfe von wasserfreiem Kupfersulphat dargestellt) gelegen hatte, konnte ebenfalls keine weitere Schrumpfung nachgewiesen werden. Stücke aus demselben Gebiete von demselben Gehirne und aus entsprechenden Gebieten von verschiedenen Gehirnen schrumpften in gleichem Grade.

Ebenso wurde die Veränderung der auf diese Weise gehärteten Stücke bei der Behandlung nach den verschiedenen *Einbettungsmethoden* bestimmt. Nachdem sie einige bis 24 Stunden in Xylol gelegen haben, bis sie vollständig durchtränkt sind, tritt keine nachweisbare Veränderung des Volumens oder der Flächendimensionen ein. Ebenso tritt keine nachweisbare Veränderung, weder des Volumens, noch der Flächendi-

mensionen, ein, wenn sie 2 Stunden lang in Paraffin von 45—50° Temperatur gelegen haben. Nach der Erstarrung konnte keine Veränderung in der Dicke der Rinde nachgewiesen werden.

Ein Stück, das 3 Monate lang in *Müller'scher Flüssigkeit*, darauf 14 Tage lang in Alkohol von 60—95 % und 24 Stunden lang in Aether wohlgehärtet ist, unterliegt bei der *Celloidineinbettung* keiner grösseren Volumenveränderung.

Um den Grad der Veränderung weiter zu bestimmen, welche die Dimensionen der Rinde durch die genannten Härtungs- und Einbettungsmethoden erleiden, wurde folgender *Versuch* angestellt:

Von einem soeben herausgenommenen Gehirne wurde aus einer Windung ein Stück herausgeschnitten, das in zwei gleich grosse Theile getheilt wurde, wonach die Dicke der Rinde an der Schnittfläche bestimmt wurde. Das eine Stück wurde einer sorgfältigen Paraffineinschmelzung und darauf folgender Färbung mit Methylenblau unterworfen. Das andere wurde, nachdem es 3 Stunden lang in Gummilösung gelegen hatte, mit dem Gefriermikrotom geschnitten und die so gewonnenen Stücke wurden dann ebenfalls mit Methylenblau gefärbt. Die Dicke der Rinde wurde nun sowohl an den mit dem Gefriermikrotom hergestellten Schnitten, wie auch an dem in Paraffin eingebetteten Stücke gemessen, wobei sich fand, dass sie in den ersteren 0,1, höchstens 0,2 mm dicker war. Durch makroskopische Messung konnte keine Veränderung in der Dicke der Rinde nachgewiesen werden, ebensowenig wie mikroskopisch eine solche für die verschiedenen Schichten constatirt werden konnte, weil die Verminderung jeder derselben sich nur auf Hunderttheile eines mm beläuft und die Abgrenzung zwischen den Schichten mehr oder weniger diffus ist.

Derselbe Versuch wurde mit einem in Spiritus gehärteten und in Celloidin eingebetteten Stücke gemacht, wobei sich eine etwas grössere und nicht so constante Veränderung zeigte.

Ein in Müller'scher Flüssigkeit gehärtetes und in Celloidin eingebettetes Stück zeigte eine grössere Verminderung der Rinde, bis zu 0,4 mm, mit grossen Unterschieden für Gehirne von verschiedenem Härtungsgrade.

Ein in Müller'scher Flüssigkeit gehärtetes Stück erleidet bei Paraffineinbettung öfters bedeutende und unberechenbare Veränderungen und die Rinde zerspringt manchmal in radiäre Streifen, wenn die Härtung nicht mit grösster Sorgfalt ausgeführt worden ist.

Da es sich also gezeigt hat, dass die Rinde bei der Paraffineinbettung nur höchst unbedeutende Veränderungen erleidet, da sich ferner

diese Veränderungen als constant erwiesen haben für die Rinde in einem Gebiete aus einem Gehirne, sowie für Rinde von demselben Bau aus verschiedenen Gehirnen, und da die Grösse der Veränderungen genau berechnet werden kann, habe ich zu meinen Bestimmungen der Zellenanzahl in der Rinde die beschriebene *Präparirungsmethode: Spiritus-Xylol-Paraffin* gewählt, zumal da diese Methode sich besonders gut zur Herstellung von Serienschnitten von einer bestimmten Dicke eignet.

Diese letztere stösst auf keine grösseren Schwierigkeiten, sobald man über ein gutes Mikrotom verfügt und die Paraffinmethode wohl beherrscht. Das Paraffin (mit einem Schmelzpunkte von 51°) wird während der ganzen zur Einschmelzung erforderlichen Zeit auf einer Temperatur erhalten, die dicht oberhalb seines Erstarrungspunktes liegt (ungefähr 45°). Die hergestellten Schnittserien werden mit Nelkenöl-Collodium auf einem Objektglase befestigt und mit einer Färbungsflüssigkeit behandelt, die mit Sicherheit alle in dem Präparate vorhandenen Nervenzellen färbt. Eine solche Flüssigkeit ist eine 5 % Lösung von Methylenblau, die eine gleichmässige und sichere Zellenfärbung bewerkstelligt.

Da die Schnitte bei dieser Färbung eine Menge von Proceduren durchzumachen haben, von denen man annehmen könnte, dass sie eine weitere Schrumpfung der Rinde herbeiführen, habe ich folgenden *Versuch* angestellt:

Die gefertigten und auf dem Objektglase befestigten Schnitte wurden genau gemessen, besonders wurde die Dicke der Rinde festgestellt. Nachdem das Präparat in Xylol vom Paraffin und in Spiritus vom Xylol befreit worden war, konnte keine Veränderung der gemessenen Dimensionen constatirt werden.

Die nun folgende Erwärmung der Schnitte in der Färbungsflüssigkeit muss mit grosser Vorsicht geschehen, da sonst eine ziemlich bedeutende und ungleichmässige Schrumpfung der Rindenelemente stattfindet. Eine langsame Erwärmung binnen einigen Minuten bis auf ungefähr 50° verändert die Dimensionen der Rinde oder der Rindenelemente oder das Verhältniss der letzteren zu einander nicht nachweisbar.

Auch nach der Entfärbung in Spiritus-Anilinöl und der Aufhellung in Origanumöl werden die Dimensionen der Rinde oder der Rindenelemente nicht merkbar verändert und, nachdem das Präparat in Benzincolophonium eingelegt worden war, konnte nach Wochen und Monaten keine Veränderung der Dimensionen der Rinde nachgewiesen werden.

Zur Bestimmung der Anzahl von Nervenzellen in $[0{,}1\ \text{mm}]^2$ in einer gewissen Tiefe in der Rinde habe ich es bequemer und vortheil-

hafter gefunden, statt des Ocularmikrometers das positive Bild einer in $[0{,}5\text{ mm}]^2$ eingetheilten $[1\text{ cm}]^2$ grossen Glasplatte zu benutzen, das durch eine convexe Linse (z. B. Abbe's Apparat) auf das Präparat geworfen wird. Der Vortheil bei dieser Anordnung liegt darin, dass man durch Annäherung der graduirten Platte an die Linse oder Entfernung von derselben mit Leichtigkeit die Grösse des Bildes der graduirten Platte auf dem Präparat zunehmen oder abnehmen lassen kann und dass dieses Bild, das in derselben Fläche wie das Präparat liegt, als ein integrirender Bestandtheil desselben zu betrachten ist, weshalb man mit Objektiv und Ocular die Vergrösserung nach Belieben verändern kann, ohne das Verhältniss zwischen dem Präparat und der darauf befindlichen Skala zu verändern. Die Glasplatte wird mittels eines Objektivmikrometers so eingestellt, dass jedes kleine Quadrat im Sehfelde genau $[0{,}1\text{ mm}]^2$ misst.

Ein Uebelstand bei dieser Methode liegt darin, dass das Bild des Messnetzes nicht leicht sichtbar wird, diesem Umstande kann man jedoch leicht dadurch abhelfen, dass man das Licht zum Spiegel durch einen in einem Schirm angebrachten, ungefähr 0,5 cm breiten Spalt durchgehen lässt.

Ein anderer Uebelstand besteht darin, dass die Skala in den peripherischen Theilen des Sehfeldes in Folge der sphärischen Aberration nicht vollständig correkt bleibt. Dieser Umstand hat wenig Bedeutung, da es keine Schwierigkeit macht, einen Theil des Präparats nach dem andern in den centralen Theilen des Sehfeldes einzustellen.

Nachdem die Zellen in einer Anzahl Quadraten von $[0{,}1\text{ mm}]^2$ in derselben Tiefe der Rinde im ersten Schnitte berechnet worden sind, berechnet man eben so viele Quadrate in 10 auf einander folgenden serienweise angefertigten Schnitten, deren jeder 10 μ dick ist, oder in 5 Schnitten von 20 μ Dicke. Die auf diese Weise gefundene Summe wird in eben so viele Theile getheilt, als Quadrate in jedem Präparate berechnet worden sind, und der Quotient giebt die Zahl der in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ Rindensubstanz vorhandenen Zellen an.

Hier stösst man nun auf die Schwierigkeit, dass dieselbe Zelle zerschnitten in mehreren auf einander folgenden Schnitten vorkommen kann, so dass sie mehrere Male in Berechnung gebracht wird. Diesem Uebelstande kann dadurch abgeholfen werden, dass man in das in Paraffin eingeschmolzene Präparat eine Einkerbung macht, so dass mittels dieses in jedem Schnitte wiederkehrenden Zeichens in den auf einander folgenden Schnitten eine bestimmte Stelle auf denselben Punkt im Sehfeld eingestellt und wiedererkannt werden kann. Obgleich dieses Verfahren zwar keine grösseren Schwierigkeiten verursacht, dürfte es doch zu

zeitraubend und praktisch in grösserer Ausdehnung kaum ausführbar sein. Weit einfacher und leichter wird dem erwähnten Uebelstande abgeholfen, wenn man darauf achtet, blos die Schnitte zu rechnen, die einen Nucleolus enthalten, oder — auf Querschnitten einer Windung — die Zellenschnitte, die einen wenigstens 10 μ langen Spitzenfortsatz haben.

Da sowohl Form und Grösse, als auch die Zahl der Zellen in verschiedenen Tiefen der Rinde bedeutend variiren können, kann für die Zahl der Zellen in der ganzen Dicke der Rinde ein Mittelwerth nicht angegeben werden, sondern die Bestimmung muss für jede einzelne der verschiedenen Schichten und oft auch für die verschiedenen Theile derselben gemacht werden. Deshalb muss auch bei Berichten über die Resultate der Bestimmung sowohl die Tiefe angegeben werden, in welcher sie gemacht worden ist, als auch die Grösse, Form und Anzahl der Zellen. Als Einheit hat sich für diese Bestimmungen $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ als am geeignetsten erwiesen.

Die im Folgenden vorkommenden Angaben über die Anzahl der Zellen stammen von Bestimmungen her, die nach der beschriebenen Methode gemacht worden sind; die Zuverlässigkeit derselben in Bezug auf die normale Rinde dürfte am besten daraus hervorgehen, dass übereinstimmende Resultate gewonnen wurden bei Bestimmungen aus demselben Rindengebiete in demselben Gehirne und aus entsprechenden Rindengebieten in verschiedenen Gehirnen von gleichem Alter und gleicher Entwicklung.

Die Anwendbarkeit der Methode für pathologische Fälle habe ich nur bei den Formen von Entwicklungshemmung geprüft, über die in Abtheilung III berichtet wird, und dabei gefunden, dass sie constante und mit einander völlig vergleichbare Resultate liefert.

Die Zeichnungen, die dieser Arbeit beigegeben worden sind, sind sämmtlich so hergestellt, dass das Bild eines reellen Präparates mittels elektrischen Bogenlichtes durch ein gewöhnliches geneigtes Mikroskop auf einen vor diesem befindlichen, in einem Winkel von 45^0 geneigten Spiegel und von diesem auf ein in $[2\ \text{cm}]^2$ grosse Quadrate getheiltes Papier geworfen wurde. Durch Annäherung des Spiegels an das Mikroskop oder Entferung von demselben kann das auf das Papier geworfene Bild des Präparats verkleinert oder vergrössert werden. Der Spiegel wird von Anfang an mittels einer Objektivskala so eingestellt, dass $[0{,}1\ \text{mm}]^2$ im Präparat genau einem $[2\ \text{cm}]^2$ grossen Quadrat auf dem Papiere ent-

spricht, oder so, dass die Linearvergrösserung 200 beträgt. Den Contouren der auf dem in Quadrate eingetheilten Papiere mit grosser Deutlichkeit erscheinenden Zellenbilder folgt man mit einem Bleistift, wonach die genaueren Einzelheiten aus freier Hand ausgeführt werden, nachdem man denselben Theil von Neuem in dem Mikroskop eingestellt hat, dessen Sehfeld auf die vorher erwähnte Weise in $[0{,}1\ \mathrm{mm}]^2$ grosse Quadrate eingetheilt ist.

Ein Uebelstand bei der beschriebenen Projektionsmethode ist der, dass das Bild an der Peripherie des Sehfeldes in Folge der sphärischen Aberration nicht correkt wird, er wird aber vermieden, wenn nach vorheriger Bestimmung des Umkreises der correkten Bilder nur die in diesem centralen Umkreise befindlichen Zellen abgezeichnet werden. Durch Verschiebung des Präparates können sämmtliche Theile der Rinde nach einander im centralen Sehfeld eingestellt und abgezeichnet werden.

Meine Zeichnungen machen deshalb Anspruch darauf, eine correkte Darstellung von der Dicke, sowohl der ganzen Rinde als ihrer verschiedenen Lagen, von der Grösse, Form, Anordnung und Menge der Nervenzellen in dem abgezeichneten Präparate zu bieten. Da die Skala $^{200}/_{1}$ ist, kann das wirkliche Maass einer gegebenen Partie in der Rinde mit Leichtigkeit auf der Zeichnung abgelesen werden. Die am Rande der Zeichnungen angegebenen Maasse sind Mittelzahlen sämmtlicher von mir ausgeführten Bestimmungen aus einem gegebenen Rindengebiete, während die Zeichnung selbst eine genaue Copie eines typischen Schnittes von demselben Gebiete ist.

Die Zeichnungen der stärker vergrösserten Zellen machen Anspruch darauf, genau die Zellform und die Zellstruktur zu zeigen, so wie diese mit Hülfe der Methylenblaufärbung hervortreten; und da es hierbei nur auf einen Vergleich zwischen auf dieselbe Weise behandelten normalen und pathologischen Zellen abgesehen ist, so mag es dahingestellt bleiben, wie weit die hier wiedergegebene Struktur ein Kunstprodukt ist oder nicht.

Da ferner hier nur eine Darstellung der Form und Grösse der Zellkörper, sowie ihrer Lage im Verhältniss zu andern beabsichtigt ist, so sind auf Zeichnungen von weniger vergrösserten Zellen nur die Fortsätze abgezeichnet worden, die bei der angewandten Vergrösserung hervortraten. Dass ich die Metallimprägnirungsmethode zur Vervollständigung meiner die Fortsätze betreffenden Angaben nicht angewendet habe, beruht darauf, dass ich eine Methode nicht anwenden zu müssen glaubte, die ihrem Wesen nach noch so wenig bekannt ist und Bilder liefert, deren Bedeutung noch nicht bestimmt ist, sondern eine der Streitfragen des Tages bildet.

II.

Die normalen Gehirne, die das Material für die Bestimmung der Zellenanzahl bildeten, stammen von den folgenden Patienten:

1. Edla J., 14 Jahre alt, am 14. Febr. 1893 an tuberkulöser Peritonitis gestorben.

Sie hatte mittelmässiges Urtheilsvermögen, etwas träge Gedankenthätigkeit und correktes Gedächtniss. Die Gemüthsart war gut und gleichmässig. Sie konnte ziemlich gut rechnen, lesen und schreiben und hatte die gewöhnliche Volksschulenbildung. Sie war nicht musikalisch, konnte nicht zeichnen.

2. Oscar E., 19 Jahre alt, am 29. Jan. 1893 an Gangraena pulmonum gestorben.

Auffassung, Urtheilsvermögen, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit waren in jeder Beziehung normal, die Gemüthsart war mild, in letzter Zeit etwas deprimirt. Er konnte gut rechnen, lesen und schreiben und hatte die gewöhnliche Volksschulenbildung.

3. Augusta A., Dienstmädchen, 39 Jahre alt, am 2. Dec. 1892 an Tuberculosis pulmonum gestorben.

Auffassung, Urtheil, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit normal, Gemüth geduldig und mild. Sie konnte ziemlich gut lesen, rechnen und schreiben, war wohlbewandert in weiblichen Arbeiten.

4. W. L., Kaufmann, 28 Jahre alt, am 6. Febr. 1893 an Typhus abdominalis gestorben.

Auffassung, Urtheilsvermögen, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit normal. Er konnte gut rechnen, lesen und schreiben und wurde für gut begabt gehalten.

5. Oscar P., Eisenarbeiter, 27 Jahre alt, am 11. März 1893 an Tuberculosis pulmonum gestorben.

Auffassung, Urtheilsvermögen, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit normal, Gemüthsart gleichmässig und gut. Er konnte gut lesen, rechnen und schreiben.

6. Oscar M., Tischler, 33 J. alt, am 23. März 1893 an Tuberculosis pulmonum gestorben.

Auffassung, Urtheilsvermögen, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit durchaus normal; Begabung mittelmässig. Gemüthsart gleichmässig und gut. Er konnte gut rechnen, lesen und schreiben, sollte mittelmässige Geschicklichkeit in seinem Berufe gehabt haben.

7. Alfrida G., Bauernfrau, 40 Jahre alt, am 20. Nov. 1892 an Tuberculosis pulmonum gestorben.

Urtheilsvermögen mittelmässig, Gedächtniss normal, Gedankenthätigkeit träg. Sie konnte nicht rechnen, schlecht lesen und schreiben. Feine Handarbeit konnte sie nicht machen.

8. E. J., Hausfrau, 50 J. alt, im October 1892 an Degeneratio cordis gestorben.

Auffassung, Urtheil, Gedächtniss und Gedankenthätigkeit mittelmässig entwickelt; Gemüthsart veränderlich, heftig. Sie konnte weder lesen, noch schreiben und verstand keine feine Handarbeit.

9. Fötus, 5 Monate, Zwilling.

10. Neugebornes Kind, unmittelbar nach der Geburt gestorben.

11. Mädchen, 10 Jahre alt.

12. Knabe, 2 Jahre alt.

Ausserdem sind verschiedene, sowohl in Spiritus, als in Chromsäure gehärtete Gehirne aus verschiedenen Altern mehr oder weniger in's Einzelne gehend untersucht worden. Hierbei fand sich, dass Gehirne von Personen desselben Geschlechts und Entwicklungsgrades in Hinsicht auf Form, Grösse, Anordnung und Struktur vollständig übereinstimmen.

Die im Folgenden angeführte Beschreibung der normalen Hirnrinde gründet sich auf die Untersuchung von Gehirnen erwachsener Männer, und Abweichungen für die Gehirne von jüngeren Individuen, sowie von Frauen werden besonders angeführt.

Was die Benennung der Windungen und Lappen betrifft, ist der von CLASON festgestellten Nomenclatur gefolgt worden. Die Beschreibungen des histologischen Baues der Rinde beziehen sich auf den Querschnitt der Windungen. Bei Angabe der Maasse der Zellen ist der horizontale Durchmesser zuerst angegeben und dann der vertikale (z. B. $5\mu \times 10\mu$). Die Benennung der verschiedenen Schichten bezieht sich entweder auf die Tiefe der Schicht oder auf Form und Grösse der Zellen nach der von den Autoren allgemein angewendeten Bezeichnungsweise.

Der Vollständigkeit halber glaube ich meiner Beschreibung der normalen Hirnrinde hierher gehörige wichtigere historische Data voraus-

schicken zu müssen. Da indessen meine Beschreibung in mehreren Abtheilungen dargestellt ist, die sich auf die verschiedenen Hirnlappen beziehen, habe ich es für zweckmässig gefunden, zu Anfang jeder Abtheilung das dazu gehörende Geschichtliche anzuführen.

Da sämmtliche Autoren, die eine Beschreibung des Baues der Hirnrinde geliefert haben, diesen als gemeinsam für den grössten Theil des Gehirnes dargestellt haben, wird hier zunächst ein Bericht darüber gegeben.

Die "gemeinsamen Typen" der Autoren.

Den älteren Beschreibungen, wie denen Kölliker's und Remak's eines 3-schichtigen, der Baillarger's eines 6-schichtigen Typus liegen hauptsächlich nur makroskopische Untersuchungen zu Grunde.

Die ersten genaueren Beschreibungen des feineren Baues der Hirnrinde sind von Berlin (1858), Arndt (1867) und Meynert (1867—72).

Berlin stellte einen 6-schichtigen Typus auf, wobei die 1., 2. und 3. Schicht zusammen Kölliker's gelbrother Schicht und Remak's Substantia gelatinosa, die 4. und 5. Schicht Kölliker's und Remak's grauer, die 6. der weissen Schicht dieser Autoren entspricht.

In Arndt's 5-schichtigem Typus entspricht die 1. und 2. Schicht Kölliker's weisser, die 3. und 4. der grauen Schicht dieses Autors und die 5. Kölliker's gelbrother sowie Remak's Substantia gelatinosa.

In Meynert's 5-schichtigem Typus entspricht die 1. Schicht Kölliker's und Remak's weisser, die 2. Schicht der grauen dieser Autoren, die 3., 4. und 5. Kölliker's gelbrother Schicht und Remak's Substantia gelatinosa. Bei diesem Typus besteht

die 1. Schicht, die $^1/_{10}$ der ganzen Dicke der Rinde ausmacht, zum grössten Theile aus Neuroglia mit einzelnen ohne regelmässige Anordnung eingestreuten Nervenzellen. Nach aussen wird diese Schicht durch ein Netzwerk feinster Nervenfasern begrenzt.

Die 2. Schicht, die ungefähr dieselbe Dicke wie die vorhergehende hat, wird aus dicht stehenden Pyramidenzellen gebildet, die ungefähr 10 μ Höhe haben.

Die 3. Schicht, die die mächtigste von allen ist, wird von dünn stehenden Pyramidenzellen gebildet, die bis 40 μ Höhe haben und vom oberflächlichsten zum tiefsten Theile der Schicht hin an Grösse zunehmen.

Die 4. Schicht wird von dicht stehenden, unregelmässigen, 8—10 μ grossen Zellen mit vereinzelten grossen Pyramidenzellen gebildet.

Die 5. Schicht wird von ungefähr 30 μ langen, spindelförmigen Zellen mit vereinzelten Pyramidenzellen gebildet. Auf einem Querschnitt durch die Windung stehen diese Spindelzellen in der Mitte der Windung vertikal, an den Seitenflächen der Windung aber und im Boden eines Sulcus horizontal.

Ungefähr von der inneren Hälfte der 3. Schicht aus sammeln sich die Nervenfasern zu distinkten, radiär verlaufenden Bündeln, wodurch die Zellen in parallelen Reihen angeordnet werden. Auf der Zeichnung, die Meynert seinem Aufsatz in Stricker's Handbuche beigegeben hat, sind die 3., 4. und 5. Schicht scharf gegen einander abgegrenzt und die von ihm beiläufig erwähnten Pyramidenzellen in der 4. und 5. Schicht fehlen auf dem Schema, ebenso findet sich auch weder im Text, noch im Schema irgend eine Andeutung über eine Zellenlage zwischen der 4. und 5. Schicht.

Derjenige, der zuerst die Aufmerksamkeit auf die unter der 3. Schicht befindlichen grossen Pyramidenzellen lenkte, war BETZ, der übrigens, wie auch Mierzejewski in der Hauptsache Meynert's Darstellung folgt.

BEVAN LEWIS legte grösseres Gewicht auf diese Zellen und beschrieb sie als einen für die ganze Hirnrinde charakteristischen, integrirenden Bestandtheil in der 4. Schicht. Diese Zellen, die grösser sind als die Zellen der 3. Schicht, aber kleiner als die für die motorische Region charakteristischen Riesenzellen, zu denen sie homologe Bildungen sind, sind im Allgemeinen in einer einfachen Reihe mit kürzeren oder längeren Zwischenräumen zwischen einander angeordnet, so dass sie oft eine deutliche Schicht bilden. Auf Grund dieser Anordnung hält sich der Vf. für berechtigt, einen 6-schichtigen Typus aufzustellen, der sich von dem Meynert's darin unterscheidet, dass sich in der 4. Schicht eine Schicht Pyramidenzellen, »ganglionic cells», vorfindet.

GOWERS folgt der Darstellung von Bevan Lewis.

MAJOR und BAILLARGER erwähnen diese Zellschicht, verlegen sie aber zwischen die 4. und 5. Schicht.

In einer späteren Abhandlung beschreibt BETZ einen gemeinsamen Typus ohne irgend eine wesentliche Abweichung von dem Meynert's. In seiner Beschreibung des Baues der Rinde in verschiedenen Theilen der Hirnoberfläche hat jedoch Betz das Vorhandensein dieser Zellen in der 4. Schicht aufrecht erhalten und an einigen Stellen sie auch als eine deutlich unterschiedene Schicht beschrieben.

Auch GOLGI (der einen 3-schichtigen Typus aufstellt) beschreibt diese Zellen als einen für den grösseren Theil der Hirnrinde charakteristischen Bestandtheil.

Schwalbe giebt folgende Beschreibung eines gemeinsamen Typus: die Rinde wird durch eine Grenzschicht (Baillarger's Streifen) in eine äussere und eine innere Hauptzone getheilt.

Die innere Hauptzone, die radiär aufsteigende Bündel von Nervenfasern enthält, besteht aus 2 Schichten: 1) der Schicht der kleinen Nervenzellen (4. und 5. nach Meynert's Typus), 2) der Schicht der grossen Pyramidenzellen (tieferer Theil von Meynert's 3. Schicht).

Die äussere Hauptzone ist getheilt in: 1) eine tiefere Schicht, die aus kleinen Pyramidenzellen besteht (äusserer Theil von Meynert's 3. und dessen 2. Schicht) und 2) eine obere, zellarme Schicht (Meynert's 1. Schicht).

Die Verfasser von späteren Lehrbüchern haben die oben genannten grossen Pyramidenzellen unter der 3. Schicht entweder vollständig übersehen oder nur beiläufig erwähnt oder sie schliesslich auch als einer andern Schicht der Rinde als der 4. angehörig beschrieben.

So berichtet Testut über Meynert's Schema, aber vergisst die Pyramidenzellen in der 4. und 5. Schicht. Er erwähnt wohl Betz's und Golgi's Beschreibungen der Riesenzellen der motorischen Region und die diesen homologen Zellen in der übrigen Hirnrinde, aber er giebt nichts über die Lage dieser Zellen an, weshalb aus seiner Beschreibung hervorgehen muss, dass diese Zellen der 3. Schicht angehören, da er nämlich die grossen Pyramidenzellen ausschliesslich dahin verlegt.

Denselben Fehler begeht Schäfer in Quain's Anatomie. Auch er vergisst die Pyramidenzellen in der 4. und 5. Schicht, behauptet aber dafür, dass der tiefste Theil der 3. Schicht bisweilen als eine besondere Schicht beschrieben worden sei. Wahrscheinlich liegt hier eine Verwechselung mit den Pyramidenzellen der Autoren in (Bevan Lewis) oder unter (Baillarger, Major) der 4. Schicht vor. Seine Angabe, dass bisweilen ein 6-schichtiger Typus dadurch entstehe, dass mitten in der 3. Schicht eine Schicht von angulären Zellen auftreten soll, dürfte entweder auf einer Verwechselung mit der unter der 3. Schicht befindlichen 4. Schicht beruhen, oder auch sich auf die Rinde des Occipitallappens beziehen.

Obersteiner's Darstellung stimmt in der Hauptsache mit der Meynert's überein, aber er erwähnt die in der 5. Schicht von Meynert beschriebenen Pyramidenzellen nicht, soweit man nicht seine Angabe so auffassen darf, dass sich in der 5. Schicht Uebergänge von Pyramidenzellen zu Spindelzellen finden. Die in der 4. Schicht sich vorfindenden Pyramidenzellen erwähnt er, nicht aber, dass sie eine besondere Schicht bilden können.

Sicher kann man im Grossen und Ganzen bei der Skizzirung des allgemeinen Baues der Rinde berechtigt sein, 2 Typen aufzustellen, einen *motorischen* und einen *sensitiven*, von denen der erstere dadurch charakterisirt sein dürfte, dass die 4. Schicht entweder ganz und gar oder fast vollständig fehlt, und dass ihre Stelle nebst einem Gebiet unter ihr von den grossen motorischen Zellen eingenommen wird, während der letztere charakterisirt ist durch eine wohl ausgebildete 4. Schicht mit einer deutlichen Schicht grosser Pyramidenzellen zwischen derselben und der 5. Schicht. (In diese Schicht, die von den meisten Autoren entweder übersehen oder auch unrichtig aufgefasst worden ist, verlegt Bevan Lewis seine »ganglionic cells». Im Folgenden wird sie »Ganglienzellenschicht» genannt).

Da aber die Rinde, wie später gezeigt werden soll, bei näherer Betrachtung in verschiedenen Gebieten innerhalb ihrer beiden Regionen sich als verschieden zusammengesetzt erweist, entweder so, dass sich Abweichungen in Zusammensetzung, Anordnung oder Gehalt an Zellen in den verschiedenen Schichten, oder auch in der Anordnung, Form und Grösse der Zellen unter einander vorfinden, muss man die Aufstellung eines gemeinsamen Typus dahingestellt sein lassen und die verschiedenen, von einander abweichenden Rindengebiete müssen gesondert für sich beschrieben werden, wenn es sich darum handelt, eine vollständige und genaue Darstellung des Baues der Hirnrinde zu liefern.

Lobus frontalis.

Die motorische Region wurde zuerst von BETZ ausführlicher beschrieben, der zu dieser Region das ganze vordere und obere Ende und den zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theil der hintern Centralwindung rechnet. Die Rinde in dieser Region wird durch die von Betz zuerst beschriebenen Riesenzellen charakterisirt, die in der 4. Schicht in Gruppen, bis zu 5 in jeder Gruppe, angeordnet sind. Diese Zellengruppen, die bei jungen Individuen spärlich sind, finden sich auch, obwohl in geringerer Anzahl, in der untern Hälfte der vorderen Centralwindung. Sie sind grösser und häufiger in der rechten Hemisphäre.

BEVAN LEWIS und CLARKE, welche zur motorischen Region auch das hintere Drittel der 1. und 2. Frontalwindung rechnen, heben hervor, dass sich in der 1. Schicht keine Nervenzellen finden. Die 2., 3. und 5. Schicht fallen nach diesen Autoren in der Hauptsache mit den entspre-

chenden Schichten in Meynert's gemeinsamem Typus zusammen. In der 4. Schicht treten Gruppen von grossen Pyramidenzellen auf, die bis 71 μ hoch sind. Die Verfasser schlagen den Namen »ganglionic cells» für diese unter der 3. Schicht gelegenen Zellen vor. Sie sind, wie erwähnt, in Gruppen angeordnet, aber blos in der Kuppe der Windung (auf dem Querschnitte), während sie im Grunde eines Sulcus in einer einfachen Reihe neben einander stehen.

Die Verff. haben die vordere Centralwindung sowie das hintere Drittel der 1. und 2. Frontalwindung Schnitt für Schnitt untersucht und dabei gefunden, dass die erwähnten Zellengruppen längs des parietalen Umfanges der vorderen Centralwindung constant vorkommen, ausser im Ursprunge der 1. und 2. Frontalwindung, wo sie ausschliesslich am frontalen Umfang der Windung lokalisirt sind. Die Zellen nehmen in diesen Gruppen gegen den untern Theil der vorderen Centralwindung, sowie gegen die Frontalwindungen hin ab.

Nach einem späteren Aufsatze von Betz können diese »Riesenzellen» auch in der 3. Schicht vorkommen, wo sie sich in einer einfachen Reihe ordnen. Ebenso können sie auch in der 2. und 5. Schicht angetroffen werden. Die grössten Zellen finden sich in der vorderen Centralwindung (am reichlichsten im Lobulus paracentralis), sowie bisweilen im obersten Theile der hinteren Centralwindung, wo diese in den Lobulus paracentralis übergeht.

Von den Verfassern späterer Lehrbücher erwähnt Schäfer, dass das motorische Gebiet von dem gemeinsamen Typus darin abweicht, dass einige der tieferen Pyramidenzellen sehr gross und in mehr oder weniger gut begrenzten Gruppen angeordnet sind. Da er die Pyramidenzellen ausschliesslich in die 3. Schicht verlegt, dürfte hieraus hervorgehen, dass er die für die motorische Region charakteristischen »ganglionic cells» oder die Riesenzellen mit den tiefsten Pyramidenzellen der 3. Schicht verwechselt.

Auch Obersteiner hebt die für diese Zellen charakteristische Lage in der 4. Schicht nicht mit hinreichender Schärfe hervor. Er erwähnt nämlich, dass einige der Pyramidenzellen im Lobulus paracentralis und im obersten Theile der Centralwindungen eine bedeutende Grösse erreichen und in Gruppen von 2 bis 3 Zellen angeordnet sind. Er giebt jedoch an, dass »manche dieser Zellen in der Schicht unregelmässiger Zellen» liegen.

Die Rinde des Frontallappens wird von MEYNERT als nach dem von ihm aufgestellten gemeinsamen Typus gebaut betrachtet. Betz, Bevan Lewis und Clarke grenzen, wie erwähnt, die vordere Centralwindung sammt dem hintern Drittel der 1. und 2. Frontalwindung als zur motorischen Region gehörig ab.

Nach BETZ wird die 1. Frontalwindung dadurch charakterisirt, »dass in der 3. Schicht, im innersten Theile der Windung» Pyramidenzellen vorkommen, die grösser sind als die entsprechenden Zellen im gemeinsamen Typus. Die 4. Schicht ist schwach entwickelt, weshalb die 3. Schicht bis zur 5. zu reichen scheint. Erst am vorderen Drittel dieser Windung wird die 4. Schicht mächtiger und nimmt gegen die Spitze hin zu, während die 3. Schicht an Dicke abnimmt.

Dasselbe Verhalten gilt von der 2. Frontalwindung, obgleich hier schon von Anfang an die 4. Schicht mehr entwickelt ist.

In der 3. Frontalwindung können 3 verschiedene Gebiete unterschieden werden.

Das hinterste, das nach vorn bis zum aufsteigenden Aste der Fissura Sylvii reicht, ist dadurch charakterisirt, dass grosse Pyramidenzellen, die kleineren Riesenzellen gleichen (bei älteren Individuen), bisweilen in der 3. Schicht vorkommen.

Im 2. Gebiete, das bis zum Anfang des Orbitaltheils der 3. Frontalwindung reicht, finden sich in der 2. und 3. Schicht schmale, aber lange, in Gruppen geordnete Pyramidenzellen, die sich mit ihren Fortsätzen unter einander verflechten.

Im 3. Gebiete, das bis zum Polus insulae reicht, haben die Zellen der 5. Schicht dieselbe Grösse, wie die Zellen im Claustrum. Bisweilen finden sich in der 3. Schicht ganz kleine Zellen.

Die Rinde der Orbitalwindungen gleicht der in der Spitze der Frontalwindungen. Je mehr man sich der vorderen Spitze der Orbitaloberfläche nähert, desto mehr nehmen die Pyramidenzellen an Zahl und Umfang ab. Am hintern Umfange derselben nimmt die 5. Schicht an Breite zu.

Der Gyrus rectus gleicht dem Gyrus cinguli und besteht blos aus 1. und 5. Schicht, mit vereinzelten kleineren Zellen in der 5. Schicht.

Die Verfasser späterer Lehrbücher rechnen die Rinde des Frontallappens zu dem gemeinsamen Typus. OBERSTEINER erwähnt, dass die Pyramidenzellen um so grösser werden, je mehr man sich den Centralwindungen nähert.

Die Rinde hat im **Gyrus centralis anterior** in der Kuppe der Windung (auf dem Querschnitte) folgende Zusammensetzung:

Die 1. Schicht, die hier 0,20 mm dick ist, enthält einige vereinzelte Nervenzellen ohne andere charakteristische Anordnung, als dass in der oberen Hälfte ihre längsten Durchmesser horizontal und in der tieferen Hälfte vertikal gerichtet sind. Sie messen $8\,\mu \times 4\,\mu$ und resp. $5\,\mu \times 10\,\mu$.

Die darauf folgenden kleinen Pyramidenzellen bilden keine besondere Schicht, sondern gehen ganz allmählich in die Zellen der 3. Schicht über, die gegen den tiefsten Theil der Schicht hin an Grösse zunehmen und hier eine Grösse bis zu $20\,\mu \times 30\,\mu$ erreichen.

Da die Zellen der 4. Schicht entweder gänzlich fehlen oder auch blos in geringer Anzahl sich vorfinden, stösst man hier auf grosse Schwierigkeit, die untere Grenze der 3. Schicht zu bestimmen, aber da theils an Stelle der 4. Schicht Pyramidenzellen vorkommen, die kleiner sind als diejenigen im tiefsten Theile der 3. Schicht, und theils, wenigstens an manchen Stellen, einige unregelmässige Zellen von $4\,\mu \times 7\,\mu$ zwischen den Pyramidenzellen auftreten, kann diese Grenze im Allgemeinen bestimmt werden. Dieselbe Schwierigkeit besteht für die Bestimmung der untern Grenze der 4. Schicht, wo eine solche vorhanden ist, und für die obere Grenze der Ganglienzellenschicht. Aber auch dies wird im Allgemeinen möglich sein, da die Zellen der Ganglienzellenschicht grösser sind als die grossen Pyramidenzellen in der 4. Schicht. Diese Schwierigkeit, die untere Grenze der 3. Schicht zu bestimmen, ist der Grund, dass verschiedene Forscher gemeint haben, dass die 3. Schicht das ganze Gebiet zwischen der 1. Schicht und der Spindelzellenschicht umfasse.

Die 3. Schicht hat hier 1 mm Dicke. Die Zellen messen in der oberen Hälfte der Schicht $10-12\,\mu \times 15-25\,\mu$, die Anzahl der Zellen ist 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. In der tieferen Hälfte messen die Zellen $15-20\,\mu \times 25-30\,\mu$, ihre Zahl beträgt 12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Die 4. Schicht ist 0,30 mm breit und die unregelmässigen Zellen messen $6\,\mu \times 8-10\,\mu$. Sie finden sich in einer Menge von 25 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Die Zellen in der *Ganglienzellenschicht*, die 0,40 mm breit ist, messen $10-15\,\mu \times 25\,\mu$ und finden sich in einer Menge von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. Zwischen diesen mittelgrossen Pyramidenzellen treten an bestimmten Stellen Gruppen von grösseren Zellen auf, die sogen. Riesenzellen, 4 bis 5 Zellen in jeder Gruppe. Diese Zellen messen $35-40\,\mu \times 50-80\,\mu$. Diese Gruppen sind im parietalen Umfange der Windung lokalisirt, ausser an der Grenze gegen den Gyrus frontalis superior und medius, wo sich

einige Zellgruppen im frontalen Umfang der Windung vorfinden. Am reichlichsten finden sie sich in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung.

Die *Spindelzellenschicht* ist 1,10 mm breit und aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $5-10\,\mu \times 20-25\,\mu$ messen und in einer Zahl von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen. Manchmal treten mitten in dieser Schicht vereinzelte Riesenzellen auf.

An den Seitenflächen der Windung sind die 4. Schicht und die Ganglienzellenschicht schmäler, aber enthalten eine grössere Anzahl Zellen in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. Die Spindelzellenschicht misst hier blos 0,20 mm an Dicke und der längste Durchmesser der Zellen liegt horizontal.

Gegen den untern Umfang der Windung hin nimmt die Grösse der grösseren Zellen in der 3. Schicht, sowie der Riesenzellen in der Ganglienzellenschicht ab, zugleich treten immer mehr unregelmässige und kleine Pyramidenzellen in der 4. Schicht auf, so dass eine solche Schicht immer deutlicher hervortritt.

Gegen den oberen Umfang der Windung und besonders im Lobulus paracentralis häufen sich an Stelle der 2. Schicht kleine pyramidale und unregelmässige Zellen und machen an manchen Stellen den Eindruck, als ob sie eine besondere, 0,10 mm breite Schicht bildeten. Die Zellen der 3. Schicht werden immer grösser und klumpiger, zugleich nimmt die Anzahl der Zellen in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ ab. Die 3., 4. und Ganglienzellenschicht von einander abzugrenzen, wird immer schwieriger und an den meisten Stellen unausführbar.

Der **Gyrus frontalis superior** kann hinsichtlich seines feineren Baues in 4 verschiedene Gebiete eingetheilt werden, die für Gehirne von Individuen desselben Entwicklungsgrades und Geschlechts dieselbe Ausdehnung haben.

Im ersten dieser Gebiete, das bei Erwachsenen ungefähr die hintern 2 Drittel des ganzen zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles der Windung einnimmt, bei jüngeren Individuen aber kaum mehr als das hintere Drittel umfasst, hat die Rinde in der Windung folgende Zusammensetzung:

Die *1. Schicht*, die 0,25 mm dick ist, enthält blos einige wenige, kleinere Nervenzellen, von denen die im obern Theile der Schicht gelegenen ihren längsten Durchmesser horizontal haben und $15\,\mu \times 5\,\mu$ messen, während in der tieferen Hälfte der längste Durchmesser vertikal angeordnet ist und die Zellen $8\,\mu \times 10\,\mu$ messen. Sie kommen hier und

da zerstreut vor, ohne regelmässige Ordnung, weshalb ihre Menge nicht genau bestimmt werden kann.

Nach der 1. Schicht beginnen kleine Pyramidenzellen, die $10\,\mu \times 13\,\mu$ messen und keine distinkte *2. Schicht* bilden, sondern allmählich in die Pyramidenzellen der *3. Schicht* übergehen, mit welchen zusammen sie eine 0,80 mm dicke Schicht bilden. Die Zellen nehmen gegen die Tiefe hin an Grösse zu und messen in der oberen Hälfte der Schicht $10-12\,\mu \times 15-20\,\mu$, in der tieferen $15-20\,\mu \times 25\,\mu$. Sie kommen in der äusseren Hälfte in einer Menge von 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Die untere Grenze der 3. Schicht ist schwer zu bestimmen, da eine distinkte 4. Schicht fehlt.

Unter den tiefen Pyramidenzellen beginnt eine *4. Schicht* von vereinzelt stehenden kleinen Pyramidenzellen ($10\,\mu \times 20\,\mu$) in einer Zahl von 5 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$, nebst einigen wenigen kleineren unregelmässigen und pyramidalen Zellen von $5\,\mu \times 8\,\mu$, ohne indessen in solcher Menge vorzukommen, dass sie an allen Stellen den Eindruck einer besonderen Schicht machen.

Nach dieser zellarmen Zwischenschicht (die die 4. Schicht vertritt) beginnt eine 0,70 mm dicke Schicht, die *Ganglienzellenschicht*, aus Pyramidenzellen bestehend, die nach den tieferen Theilen der Schicht zu an Grösse zunehmen und hier $20\,\mu \times 25-30\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen. Je näher man den Centralwindungen kommt, desto grösser werden diese Zellen und in der Wurzel des Gyrus frontalis superior findet sich eine Gruppe sogen. Riesenzellen, die $30\,\mu \times 65\,\mu$ messen.

Dieser Schicht (die von Meynert und den meisten Autoren nicht erwähnt wird, und von Bevan Lewis Ganglienzellenschicht benannt wurde) zunächst beginnt eine 1,10 mm dicke Schicht, die *Spindelzellenschicht*, aus Spindelzellen bestehend, deren grösster Durchmesser vertikal liegt; sie messen $8-10\,\mu \times 25-30\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

An den Seitenflächen der Windung und im Boden eines Sulcus ist die Schicht etwas schmäler und besonders sind die Ganglienzellenschicht und die Spindelzellenschicht schmäler und machen den Eindruck, als ob sie zusammengepresst seien. Die Zellen in dieser Schicht stehen hier dichter als in der Kuppe der Windung und der grösste Durchmesser der Spindelzellen ist horizontal gerichtet.

Das 2. Gebiet, das bei älteren Individuen das vordere Drittel, bei jüngeren die vordern 2 Drittel des zur lateralen Hirnoberfläche gehö-

renden Theiles der Windung nebst dem grössten Theile des zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theiles (Gyrus marginalis) ausser dem dem Gyrus cinguli zunächst liegenden Gebiet umfasst, hat in der Kuppe der Windung folgenden Bau:

Die *1. Schicht* gleicht vollständig der entsprechenden Schicht in dem eben beschriebenen Gebiet.

Die darauf folgenden kleinen Pyramidenzellen, die $8\,\mu \times 10\,\mu$ messen, stehen dichter als in dem vorhergehenden Gebiete und bilden dadurch eine *2. Schicht* von 0,20 mm Dicke. Sie kommen in einer Anzahl von 40 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

Die Schicht der grossen Pyramidenzellen (*die 3.*) ist hier schmäler als im vorhergehenden Gebiete, hat eine Dicke von 0,65 mm und ist aus Pyramidenzellen zusammengesetzt, die gegen die Tiefe der Schicht hin an Grösse zunehmen. Die Zellen messen $10 - 20\,\mu \times 20 - 25\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 15 in der oberen Hälfte und 12 in der tieferen in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Die grössten Zellen werden in den tiefsten Theilen der Schicht angetroffen, die wohl abgegrenzt ist gegen die Schicht der kleinen unregelmässigen Zellen.

Diese 0,25 mm dicke Schicht (*die 4.*) besteht aus $5\,\mu \times 8\,\mu$ grossen pyramidalen und unregelmässigen Zellen in einer Menge von 60 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$, nebst vereinzelten grossen ($20\,\mu \times 30\,\mu$) Pyramidenzellen.

Hierauf beginnt eine 0,35 mm dicke Schicht (*Ganglienzellenschicht*), zusammengesetzt aus grossen Pyramidenzellen, die $20 - 22\,\mu \times 30\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

Die *Spindelzellenschicht* hat 0,95 mm Dicke und ihre Zellen sind $8 - 10\,\mu \times 25 - 30\,\mu$ gross und kommen in einer Anzahl von 20 in der oberen, von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ in der tieferen Hälfte vor.

An den Seitenflächen der Windung und im Boden eines Sulcus vermindert sich die Dicke der Schichten in bedeutendem Grade, besonders die der Spindelzellenschicht, die an manchen Stellen nicht mehr als 0,10 mm misst. Der grösste Durchmesser der Spindelzellen ist horizontal gerichtet. Die Dicke der Ganglienzellenschicht ist nicht so sehr vermindert und die etwas plattgedrückten Pyramidenzellen sind hauptsächlich an den Grenzen gegen die vorhergehende und die nachfolgende Schicht angehäuft.

Je mehr man sich der Spitze der Windung nähert, desto schmäler wird die Schicht und desto spärlicher und kleiner werden die Pyramidenzellen.

Das 3. Gebiet, das den zur orbitalen Hirnoberfläche gehörenden Theil der Windung (Gyrus olfactorius) umfasst, ist charakterisirt durch eine 0,20 mm dicke *1. Schicht*, eine wohlentwickelte *2. Schicht* mit $4-6\,\mu \times 6-10\,\mu$ grossen Zellen, eine blos 0,50 mm dicke *3.*, eine aus kleinen ($5\,\mu \times 8\,\mu$) Pyramidenzellen bestehende und 0,20 mm dicke *4. Schicht*, mit vereinzelten grossen Pyramidenzellen und eine 0,10 mm dicke *Ganglienzellenschicht* mit grossen Pyramidenzellen, hauptsächlich an der Grenzfläche gegen die vorhergehende Schicht. Die *Spindelzellenschicht* hat eine relativ grosse Dicke, indem sie 0,80 mm misst. Die Grösse und Menge der Zellen stimmt mit den entsprechenden Maassen im vorhergehenden Gebiete überein.

Das 4. Gebiet, das den gegen den Gyrus cinguli hin liegenden Theil der Windung umfasst, hat denselben Bau wie der Gyrus cinguli und wird am besten im Zusammenhang mit diesem beschrieben.

Der **Gyrus frontalis medius** kann hinsichtlich des feineren Baues in 2 verschiedene Gebiete eingetheilt werden.

Das 1., das den ganzen zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theil der 2. Frontalwindung umfasst, hat in der Kuppe der Windung folgenden Bau:

Die *1. Schicht* ist 0,30 mm dick und gleicht der entsprechenden Schicht im Gyrus frontalis superior.

Hierauf folgt eine deutlich unterscheidbare 0,20 mm breite Schicht (*die 2.*) von kleinen Pyramidenzellen. Diese Zellen messen $8\,\mu \times 10\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 60 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

Die Schicht der grossen Pyramidenzellen (*die 3.*) misst 1,30 mm an Dicke und die Zellen nehmen gegen die tieferen Theile der Schicht hin allmählich an Grösse zu. Sie messen in der oberen Hälfte $12\,\mu \times 20\,\mu$ und in der tieferen $15-25\,\mu \times 25-35\,\mu$.

Hierauf beginnt eine 0,20 mm dicke Schicht (*die 4.*) von kleinen ($3\,\mu \times 10-15\,\mu$) und schmalen pyramidalen, nebst einigen unregelmässigen Zellen, in solcher Anzahl (45 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$), dass sie den Eindruck einer besonderen Schicht mit eingesprengten grössern Pyramidenzellen machen.

Die darauf folgende *Ganglienzellenschicht* ist 0,40 mm dick und aus $20\,\mu \times 30\,\mu$ grossen Pyramidenzellen zusammengesetzt, die in einer Anzahl von 12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

Die zunächst folgende Schicht, die der *spindelförmigen Zellen*, ist 1 mm dick und aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $8-10\,\mu \times 25-30\,\mu$ an Grösse messen.

An den Seitenflächen der Windung haben die 3 ersten Schichten dieselbe Dicke und denselben Bau wie in der Kuppe der Windung. Die 4. und die Ganglienzellenschicht sind blos halb so dick als die entsprechenden Schichten in der Mitte des Querschnittes. Die Zellen der Ganglienzellenschicht liegen hauptsächlich an der Grenze gegen die vorhergehende Schicht. Zunächst der Grenze gegen die nächste Schicht finden sich blos einzelne grosse Pyramidenzellen, so dass ein zellenarmes Gebiet die Ganglienzellenschicht von der Spindelzellenschicht abzugrenzen scheint. Diese letztere Schicht kann hier an mehreren Stellen in 2 getheilt sein: eine oberflächlichere (0,40 mm) von Spindelzellen mit vereinzelten Pyramidenzellen, mit dem grössten Durchmesser vertikal, und eine tiefere (0,10 mm) mit spindelförmigen Zellen, deren längster Durchmesser horizontal liegt.

In der Nähe der Centralwindungen sind die Zellen der 2. und 4. Schicht spärlicher und zugleich nehmen die tiefsten Zellen in der 3. Schicht sammt denen der Ganglienzellenschicht an Grösse zu. Am Uebergange zur vorderen Centralwindung treten einige Gruppen von Riesenzellen auf, die $30\,\mu \times 70\,\mu$ messen.

Näher an der Spitze der Windung ist die 2. und 4. Schicht deutlicher ausgeprägt, zugleich nehmen sämmtliche Schichten, besonders die 3., an Dicke und Zellengehalt ab. Die tiefsten Zellen in der 3. Schicht sammt den Zellen der Ganglienzellenschicht werden immer kleiner, je mehr man sich der Spitze der Windung nähert.

Das 2. Gebiet, das den orbitalen Theil der Windung umfasst, ist durch schmale, lange und ungefähr gleich grosse Pyramidenzellen in der 3. Schicht charakterisirt. Sie messen $10\,\mu \times 25\,\mu$ an Grösse und kommen in einer Anzahl von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Die Zellen der Ganglienzellenschicht sind spärlich an Zahl (12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$) und die Spindelzellenschicht ist relativ mächtig, mit breiten Spindelzellen, die $12\,\mu \times 25\,\mu$ messen.

Der **Gyrus frontalis inferior** kann hinsichtlich seines feineren Baues in 3 Gebiete eingetheilt werden.

Das erste, das den hinter dem aufsteigenden Schenkel der Fissura Sylvii liegenden Theil der Windung umfasst, hat in der Kuppe der Windung folgende Zusammensetzung:

Die *1. Schicht* hat 0,10 mm Dicke.

Eine deutlich ausgeprägte *2. Schicht* fehlt. Die kleinen Pyramidenzellen gehen allmählich in die *3. Schicht* über und bilden mit dieser zusammen eine 0,80 mm dicke Schicht. Die Zellen in den tiefsten Theilen

dieser Schicht sind grösser als die übrigen und messen 22 $\mu \times 30\,\mu$, sie kommen in einer Anzahl von 15 in [0,1 mm]^3 vor.

Die *4. Schicht* wird von zerstreut liegenden kleinen Pyramidenzellen gebildet, die $3 - 4\,\mu \times 10\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 30 in [0,1 mm]^3 vorkommen. An manchen Stellen bilden sie keine gesonderte Schicht, sondern sind zwischen die Zellen der 3. und der folgenden Schicht eingestreut.

Die *Ganglienzellenschicht* misst 0,40 mm an Dicke und besteht hauptsächlich aus Pyramidenzellen, die $12\,\mu \times 25\,\mu$ messen, mit vereinzelten grösseren, $20\,\mu \times 30\,\mu$. Zunächst an der vorderen Centralwindung finden sich einige Gruppen von Zellen, die $30\,\mu \times 50\,\mu$ messen.

Die Schicht der spindelförmigen Zellen, die 0,90 mm misst, ist aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $5 - 7\,\mu \times 15 - 25\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in [0,1 mm]^3 vorkommen.

An den Seitenflächen der Windung und im Boden eines Sulcus ist es oft schwer zu bestimmen, wie viel zur 3. und zur Ganglienzellenschicht gerechnet werden soll, da die 4. Zellenschicht wenig ausgeprägt ist und die Zellen der Ganglienzellenschicht von derselben Grösse sind wie die in den tiefsten Theilen der 3. Schicht. Die Schicht der Spindelzellen misst blos 0,10 mm an Dicke und ist aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $20\,\mu \times 8\,\mu$ messen, mit dem grössten Durchmesser horizontal.

Das 2 Gebiet, das sich vom aufsteigenden Schenkel der Fissura Sylvii bis zum Orbitaltheile der Windung erstreckt, hat eine schmale *1. Schicht* (0,10 mm) von demselben Bau wie an den übrigen Stellen des Frontallappens.

Eine 0,10 mm dicke *2. Schicht* wird aus kleinen Pyramidenzellen gebildet, die $8\,\mu \times 10\,\mu$ messen und dicht stehen (60 in [0,1 mm]^3). Die 1 mm dicke *3. Schicht* ist aus Pyramidenzellen gebildet, die $12\,\mu \times 20\,\mu$ messen, sie sind in mehr oder weniger deutlichen Zellengruppen angeordnet, innerhalb welcher sich die Zellen mit ihren Spitzenfortsätzen zu verflechten scheinen. Im tiefsten Theile der Schicht finden sich spärliche grössere Zellen, die $25\,\mu \times 35\,\mu$ messen.

Eine deutliche, 0,20 mm dicke *4. Schicht* findet sich gebildet aus kleinen Pyramidenzellen, die $6\,\mu \times 10\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 40 in [0,1 mm]^3 vorkommen.

Die *Ganglienzellenschicht*, die 0,50 mm an Dicke misst, ist aus Pyramidenzellen zusammengesetzt, die $15 - 18\,\mu \times 25 - 30\,\mu$ messen.

Die *Spindelzellenschicht* misst an Dicke 0,90 mm und gleicht der entsprechenden Schicht im vorhergehenden Gebiete.

An den Seitenflächen der Windung ist der Bau der Rinde derselbe wie in der Kuppe der Windung, mit der Ausnahme, dass die 4. Schicht und die Ganglienzellenschicht etwas schmäler sind mit einer grösseren Anzahl von Zellen in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$, die Spindelzellenschicht hat nur 0,10 mm Dicke.

Das 3. Gebiet, das den orbitalen Theil der Windung umfasst, gleicht dem orbitalen Theile des Gyrus frontalis medius und wird durch schmale, lange, gleich grosse Pyramidenzellen in der 3. Schicht und der Ganglienzellenschicht charakterisirt und eine relativ mächtige Spindelzellenschicht.

Lobus parietalis.

Der obere Theil des Gyrus centralis posterior gehört nach BETZ zur motorischen Region.

Nach MEYNERT weichen die oberen und unteren Parietalwindungen nicht von dem gemeinsamen Typus ab.

Der Gyrus parieto-occipitalis und der Gyrus angularis sind auch nach BETZ nach dem gemeinsamen Typus gebaut, aber die 4. Schicht ist bedeutend mächtig, während die Schicht der spindelförmigen Zellen schwach entwickelt ist. Im Gyrus angularis ist an einigen Stellen die 3. Schicht in 2 über einander liegende Zonen getheilt, die durch eine Schicht kleiner Pyramidenzellen getrennt sind. Im Gyrus parieto-occipitalis finden sich vereinzelte grosse Pyramidenzellen.

Nach BEVAN LEWIS und OBERSTEINER soll die Parietalrinde dadurch charakterisirt sein, dass zwischen die 3. und 4. Schicht eine Lage dicht stehender kleiner Pyramidenzellen eingeschoben ist, die den Zellen der 2. Schicht gleichen.

Der **Gyrus centralis posterior** kann in 2 verschiedene Gebiete eingetheilt werden, die bezüglich ihres feineren Baues von einander abweichen.

Das erste, das das obere Sechstel der Windung umfasst, hat durchaus denselben Bau wie der Gyrus centralis anterior, es ist deshalb auf die Beschreibung dieser Windung hinzuweisen.

Das 2. Gebiet wird charakterisirt durch eine 0,20 mm dicke *1. Schicht*, eine 0,20 mm dicke Pyramidenzellenschicht (*2. und 3. Schicht*), aus fast gleich grossen Pyramidenzellen bestehend, die nach der Tiefe zu nicht nennenswerth an Grösse zunehmen und an der Stelle der 2. Schicht am

dichtesten stehen, ohne doch den Eindruck zu machen, dass sie eine deutlich ausgeprägte Schicht bilden. Sie kommen in einer Anzahl von 20 in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$ vor. Im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht finden sich grössere Pyramidenzellen, die $20\,\mu \times 30\,\mu$ messen. Sie stehen dünn angeordnet in einer einfachen oder in 2 Reihen zwischen den kleineren Pyramidenzellen.

Die *4. Schicht* tritt hier deutlich hervor und misst 0,30 mm an Dicke. Sie ist aus unregelmässigen und pyramidalen Zellen zusammengesetzt, die $6\,\mu \times 10\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 60 in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$ vorkommen. Ausserdem kommen vereinzelte grosse Pyramidenzellen vor.

Die *Ganglienzellenschicht* misst 0,30 mm an Dicke und besteht aus Pyramidenzellen, die $16 - 18\,\mu \times 25\,\mu$ messen, nebst einigen grösseren ($20 - 22\,\mu \times 30\,\mu$) Pyramidenzellen, einzeln oder in kleineren Gruppen angeordnet.

Die *Spindelzellenschicht* misst 0,70 mm und ist aus kleineren spindelförmigen Zellen zusammengesetzt, die $8 - 10\,\mu \times 25\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 20 in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$ vorkommen.

In den Seitenflächen der Windung sind die 4. Schicht und die Ganglienzellenschicht an Dicke reducirt (0,10, resp. 0,20 mm), aber sie enthalten mehr Zellen in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$. Die Spindelzellenschicht ist um mehr als die Hälfte dünner als in der Kuppe der Windung und die Zellen haben hier ihren längsten Durchmesser horizontal.

Der Uebergang von dem einen Gebiete zu dem andern geschieht allmählich. An ältern Gehirnen erstreckt sich das erste Gebiet etwas weiter nach unten in der Windung als bei jüngeren. Im tiefsten Theile der Windung werden die Zellen der Spindelzellenschicht grösser und die Schicht nimmt an Mächtigkeit zu (0,90 mm). Am vordern Umfang des untersten Theils dieser Windung sind die Zellen der 3. Schicht grösser als in höher gelegenen Theilen, während die entsprechenden Zellen im hintern Umfang der Windung bedeutend kleiner sind und ungefähr von der Grösse der Zellen in der 2. Schicht.

Der **Gyrus parietalis superior** ist in der Kuppe der Windung charakterisirt durch eine *2. Schicht*, die 0,20 mm dick und aus Pyramidenzellen zusammengesetzt ist, die $6 - 8\,\mu \times 2\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 35 in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$ vorkommen, eine relativ schwach entwickelte *3. Schicht* von 0,70 mm Dicke, aus Pyramidenzellen bestehend, die $12 - 20\,\mu \times 20 - 30\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in $[0{,}1 \text{ mm}]^3$ vorkommen; eine mächtige, aus kleinen ($6 - 9\,\mu \times 9\,\mu$) Pyramidenzellen bestehende, 0,30 mm dicke *4. Schicht* mit vereinzelten grösseren Pyramidenzellen; eine

0,65 mm dicke *Ganglienzellenschicht* mit Pyramidenzellen, die 20 $\mu \times 30\ \mu$ messen und sich in einer Anzahl von 7 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ finden. Die *Spindelzellenschicht* ist relativ schwach entwickelt und misst blos 0,40 mm.

An den Seitenflächen der Windung sind die 4., die Ganglienzellen- und die Spindelzellenschicht reducirt, die letztere misst blos 0,10 mm an Dicke und die Zellen haben hier ihren grössten Durchmesser horizontal.

Im vorderen, dem Gyrus centralis posterior zunächst liegenden Theile sind die tiefsten Zellen der Schicht sammt einzelnen Zellen in der Ganglienzellenschicht grösser, sowie die 3. und 5. Schicht dicker, während die 4. Schicht weniger mächtig ist.

Gegen den hintern Theil hin, zunächst dem Occipitallappen (Gyr. transit. ext. sup.) ist die 3. Schicht schmäler und aus kleineren Pyramidenzellen zusammengesetzt, während die 4. Schicht immer mehr an Dicke zunimmt. An dem gegen den Gyrus cinguli hin liegenden Abschnitte der zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung ist die Schicht der spindelförmigen Zellen dicker und die Spindelzellen sind grösser als in den übrigen Theilen der Windung.

Der **Gyrus parietalis inferior** hat denselben Bau wie die vorhergehende Windung in Bezug auf Grösse und Anzahl der Zellen. Im vorderen Theile (Gyrus parietalis inferior anterior) ist die *3. Schicht* mächtiger (1 mm) und im hintern Theile (Gyrus parietalis inferior posterior) nimmt in der Nähe des Occipitallappens die 3. Schicht an Dicke zu, gleichzeitig sammeln sich die in der mächtigen 4. Schicht befindlichen Pyramidenzellen mehr zu einer einfachen oder doppelten Reihe, wodurch die 4. Schicht wie in 2 Schichten getheilt scheint.

Lobus occipitalis.

Schon MEYNERT schied die Rinde in der Fissura calcarina und in der Spitze des Occipitallappens von dem gemeinsamen Typus ab. Die Pyramidenzellenschicht ist nach ihm hier bedeutend schmäler und schränkt sich ausschliesslich auf die 2. Schicht ein, während unregelmässige Zellen die Stelle sowohl der 3., als auch der 4. Schicht einnehmen. Dadurch, dass 2 Schichten dünn stehender unregelmässiger Zellen in diese Formation eingeschoben werden, geschieht es, dass dieselbe aus 5 Schichten besteht. In dieser zellenarmen Zwischenschicht finden sich einzeln stehende oder kleinere Haufen von grossen Pyramidenzellen, Meynerts Solitärzellen.

Nach Betz sind diese Zellen in Gruppen gelagert, in einer oder in 2 Reihen, 1 bis 2, selten 3 Zellen in jeder Gruppe. An den Uebergangswindungen und am oberen Rande des Occipitallappens liegen sie dichter als an den übrigen Stellen.

Nach Betz hat die Rinde im Gyrus lingualis, im angrenzenden Theile des Gyrus fusiformis, in der innern Fläche des Cuneus und der ganzen Spitze des Occipitallappens folgende Zusammensetzung: 1) Neurogliaschicht, 2) Kleinpyramidenzellenschicht, 3) 1. Kernschicht, 4) 1. Faserschicht, 5) 2. Kernschicht, 6) 2. Faserschicht, 7) eine Schicht von Pyramidenzellen, getrennt von einander durch grössere oder kleinere Zwischenräume, 8) die Spindelzellenschicht. An manchen Stellen findet sich auch eine 5. und eine 6. Schicht grosser Pyramidenzellen.

Je näher man dem Gyrus extremus kommt, verschwindet die 7. Schicht und an der Spitze des Occipitallappens mischen sich alle diese Schichten (3—7) mit einander und bilden eine fast gleichförmige Masse von Kernzellen. Von der Schicht der spindelförmigen Zellen findet sich hier nur ein schwacher Streifen.

In den übrigen Theilen der Occipitalwindungen haben die 2. und die 3. Schicht der Rinde denselben Bau wie die entsprechenden Schichten des gemeinsamen Typus. Oft finden sich Zellen von bedeutender Grösse, besonders mitten in der Windung.

Von späteren Autoren erwähnt Testut keine andere Abweichung der Occipitalrinde von dem gemeinsamen Typus, als dass in derselben blos kleine Zellen vorkommen. Ebensowenig erwähnt Schäfer etwas Anderes, als dass in der Fissura calcarina die grossen Pyramidenzellen sehr spärlich vorkommen und deren Platz von kleineren solchen Zellen eingenommen wird.

Nach Obersteiner hat die Occipitalrinde eine schmälere 1. Schicht als die Rinde in anderen Abschnitten; die 2. Schicht stimmt mit der entsprechenden Schicht des gemeinsamen Typus überein. In der 3. Schicht nehmen die Zellen nach der Tiefe hin nicht an Grösse zu, sondern es finden sich im tiefsten Theile dieser Schicht einzelne oder zu Gruppen vereinigte grosse Pyramidenzellen, die sogen. Solitärzellen. In der 4. Schicht, die hier breiter ist als an den übrigen Stellen, kommt eine zellenarme Schicht vor, in der ebenfalls Solitärzellen vorkommen.

Der **Gyrus occipitalis superior** kann hinsichtlich seines feineren Baues in 2 verschiedene Gebiete eingetheilt werden.

Das erste Gebiet, das den zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theil der Windung mit Ausnahme der Spitze des Occipitallappens selbst umfasst, hat folgende Zusammensetzung:

Die *1. Schicht* misst 0,10 mm an Dicke; die *zweite* grenzt sich nicht von der *3.* ab, sondern bildet mit dieser zusammen eine 0,60 mm dicke Schicht gleichgrosser Pyramidenzellen, die $10 - 14\,\mu \times 25\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen. Im tiefsten Theile der Schicht kommen in einfacher Reihe mit längeren oder kürzeren Zwischenräumen angeordnete grössere Pyramidenzellen vor, die $20\,\mu \times 25 - 30\,\mu$ messen. Je weiter man nach hinten gegen die Spitze des Occipitallappens hin kommt, desto mehr werden diese Zellen von der 3. Schicht abgegrenzt, indem keine kleineren Pyramidenzellen zwischen diesen Zellen vorkommen, so dass sie in eine zellenarme Zwischenschicht zu liegen kommen.

Die Zellen der 4. Schicht füllen die Stelle der *4. Schicht* und auch die der *Ganglienzellenschicht* aus, weshalb diese beiden Schichten im vordern Theile der Windung nur mit Schwierigkeit von einander getrennt werden können, vielmehr eine 0,60 mm dicke Schicht bilden. An manchen Stellen können sie aber doch in 2 Schichten getrennt werden, da theils kleine Zellen in der 4. Schicht dichter gehäuft sind, theils grössere Pyramidenzellen in der Ganglienzellenschicht in grösserer Anzahl vorkommen. Gegen die Spitze des Occipitallappens hin werden die in der 4. Schicht befindlichen grösseren Zellen immer mehr in einer immer deutlicheren Reihe in der Tiefe der Schicht angeordnet, zugleich ziehen sich die kleinen Zellen zurück und lassen die erwähnten Zellen in einer zellenarmen Zwischenschicht liegen.

Ebenso werden in der Spitze des Occipitallappens die Zellen der Ganglienzellenschicht in einer immer deutlicheren Reihe in der Tiefe dieser von kleinen Zellen erfüllten Schicht angeordnet, zugleich ziehen sich diese zwischen den grösseren Zellen liegenden kleinen Zellen von diesen zurück, wodurch auch diese näher an der Spitze des Orbitallappens an Grösse zunehmenden Zellen in eine zellenarme Zwischenschicht zu liegen kommen. Auch in der Mitte der 3. Schicht können einzelne grössere Pyramidenzellen auftreten.

Die *Spindelzellenschicht* misst 0,50 mm und ist aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $9\,\mu \times 20\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 20 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

An den Seitenflächen der Windung sind die Schichten etwas schmäler.

Das zweite Gebiet, das den ganzen zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theil der Windung (Cuneus) nebst der Spitze des Occipitallappens selbst umfasst, wird durch eine *Pyramidenzellenschicht* charakterisirt, die 0,70 mm misst und aus kleinen gleichgrossen Zellen besteht, die $10\,\mu \times 14\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 40 in [0,1 mm]^3 vorkommen. Im tiefsten Theile der Schicht können einzelne grössere ($20\,\mu \times 30\,\mu$) Pyramidenzellen auftreten und in der Mitte oder gewöhnlich etwas unter der Mitte dieser Schicht (die der *2.* und *3. Schicht* in andern Rindengebieten entspricht) tritt bisweilen eine 0,20 mm breite Zwischenschicht auf, in der obern Hälfte aus kleinen Pyramidenzellen ($6\,\mu \times 9\,\mu$) bestehend, in der tieferen Hälfte aus grossen Pyramidenzellen, die $25\,\mu \times 40\,\mu$ messen, nebst einer geringeren Anzahl $6 - 10\,\mu \times 12 - 14\,\mu$ grossen Pyramidenzellen.

Darauf beginnt eine 0,50 mm breite *4. Schicht*, die in der oberen Hälfte aus Pyramidenzellen besteht, die $4\,\mu \times 7\,\mu$ messen und sich in einer Menge von 90 in [0,1 mm]^3 vorfinden, in der tieferen Hälfte besteht sie aus $8\,\mu \times 10\,\mu$ grossen Zellen nebst Pyramidenzellen, die $22 - 25\,\mu \times 30\,\mu$ messen und einzeln in einfacher Reihe vorkommen.

Die *Ganglienzellenschicht*, die 0,50 mm an Dicke misst, ist zusammengesetzt aus Pyramidenzellen, die $10 - 15\,\mu \times 20\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 35 in [0,1 mm]^3 vorkommen, nebst einzelnen grösseren Pyramidenzellen, die $20 - 22\,\mu \times 30\,\mu$ messen. Die *Spindelzellenschicht* ist 0,50 mm dick und besteht aus Spindelzellen, die $8\,\mu \times 20\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in [0,1 mm]^3 vorkommen.

An den Seitenflächen der Windung und im Boden eines Sulcus sind die Schichten bedeutend reducirt. So messen im Boden eines Sulcus die beiden Hälften der Pyramidenschicht 0,30 mm, die 4. Schicht 0,10, die Ganglienzellenschicht 0,25 mm und die Spindelzellenschicht kaum 0,05 mm. (Bei den Maassen der verschiedenen Schichten sind die zu jeder Schicht gehörenden kleinen zellenarmen Zwischenzonen mit den darin befindlichen grossen Pyramidenzellen mit eingerechnet).

Auf kürzeren Strecken, wie z. B. an einer Stelle in der Spitze des Occipitallappens, fehlen die grossen Pyramidenzellen ganz und gar und da die Zellen der Pyramidenzellenschicht nebst denen der 4. Schicht und der Ganglienzellenschicht ungefähr gleich gross und oft von demselben Aussehen sind, kann man leicht den Eindruck erhalten, dass die ganze Rinde nur aus der 1., der 4. Schicht nebst der Spindelzellenschicht gebildet sei. Bei näherer Betrachtung aber können ohne irgend eine weitere Schwierigkeit die verschiedenen Schichten von einander unter-

schieden werden. Die Grenze zwischen der Ganglienzellenschicht und der 4. Schicht wird durch eine zellenarme Zwischenschicht (den untern Theil der 4. Schicht) markirt. Die obere Grenze der 4. Schicht ist schwerer zu bestimmen und oft blos durch die unbedeutende Verschiedenheit der Grösse der Zellen in beiden Schichten angedeutet. Irgend ein Unterschied zwischen der 2. und 3. Schicht kann nicht festgestellt werden. Manchmal deutet ein hellerer (zellenärmerer) Streifen in der Mitte der Pyramidenzellenschicht deren Theilung in 2 Schichten an. Die helleren Streifen werden in dem übrigen Gebiete von den vorher beschriebenen grossen Pyramidenzellen eingenommen.

Im entsprechenden Gebiet an den Seitenflächen der Windungen sind die Zellen in der tieferen Hälfte der Pyramidenzellenschicht bedeutend geringer an Zahl und die ganze untere Hälfte der Schicht macht den Eindruck, als sei sie eine ungewöhnlich breite Zwischenschicht, aber nur der obere Theil dieser zellenarmen Schicht entspricht der oben beschriebenen Zwischenschicht. Die grossen Pyramidenzellen liegen auch in der Mitte, sowie an der untern Grenze dieser zellenarmen Schicht. Die Spindelzellenschicht ist an den Seitenflächen der Windung an manchen Stellen in 2 Theile getheilt, von denen der obere aus vertikal gestellten Pyramiden- und Spindelzellen besteht, während der tiefere aus kleinen horizontal gestellten Zellen zusammengesetzt ist. Die zur Ganglienzellenschicht gehörenden grossen Pyramidenzellen liegen an den Seitenflächen in der Regel an der Grenze zwischen dieser und der Spindelzellenschicht.

Nach dem vordern und obern Umfang des zur medialen Gehirnoberfläche gehörenden Theils der Windung zu nimmt die Rinde denselben Bau an, wie an der lateralen Fläche. Im vordern Theile wird die Spindelzellenschicht mächtiger.

Der **Gyrus occipitalis externus** hat im Allgemeinen denselben Bau, wie der laterale Theil des Gyrus occipitalis superior.

Der **Gyrus occipitalis inferior internus** hat denselben Bau, wie der mediale Theil des Gyrus occipitalis superior. Nach dem vorderen Theile der Windung zu, sowie in dem an die vorhergehende Windung angrenzenden Theile werden die meisten Zellen der 3. Schicht grösser und die Pyramidenzellen in der Mitte und in der Tiefe der 3. Schicht, sowie in der Tiefe der 4. Schicht und der Ganglienzellenschicht werden kleiner, sind nicht mehr in einer einfachen Reihe angeordnet und kommen zwischen die übrigen Zellen der Schicht gemischt vor.

Lobus temporalis.

Nach Betz wird die Rinde in den 3 Temporalwindungen durch eine mächtige 5. Schicht und kleine Zellen in der 3. Schicht charakterisirt. Im Polus temporalis sind die Pyramidenzellen der 3. Schicht in Gruppen geordnet unter der 1. Schicht, wie in der Spitze der Ammonswindung.

Von den Verfassern der neuesten Lehrbücher wird die genannte mächtige 5. Schicht als charakteristisch für die Temporalwindungen erwähnt.

Der **Gyrus temporalis superior** hat in der Kuppe der Windung folgende Zusammensetzung:

Die *1. Schicht* misst 0,20 mm an Dicke und enthält vereinzelte kleine Nervenzellen ohne charakteristische Anordnung.

Die *2. Schicht* ist nicht deutlich von der *3.* abgegrenzt, sondern bildet mit dieser zusammen eine 0,70 mm dicke Schicht von kleinen Pyramidenzellen, die im tieferen Theile der Schicht etwas an Grösse zunehmen und in der oberen Hälfte $9\,\mu \times 15\,\mu$, in der unteren Hälfte $12\,\mu \times 22\,\mu$ messen. Ihre Anzahl ist 25, resp. 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. Zwischen diesen Zellen treten im tiefsten Theile der Schicht grosse Pyramidenzellen auf, die $20\,\mu \times 30\,\mu$ messen, in einfacher oder doppelter Reihe.

Die *4. Schicht,* die 0,20 mm an Dicke misst, ist zusammengesetzt aus kleinen pyramidalen und unregelmässigen Zellen, die in einer Anzahl von 45 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

Die *Ganglienzellenschicht* misst 0,40 mm an Dicke und ist zusammengesetzt theils aus kleineren, $10\,\mu \times 18\,\mu$ grossen Pyramidenzellen, theils aus grösseren Pyramidenzellen, die $20\,\mu \times 30 - 35\,\mu$ messen.

Die *Spindelzellenschicht* ist hier mächtig und misst 1,20 mm an Dicke. Sie ist aus Spindelzellen zusammengesetzt, die $9\,\mu \times 30\,\mu$ messen und sich in einer Anzahl von $15 - 20$ in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ finden.

An den Seitenflächen der Windung sind die 4., die Ganglienzellen- und die Spindelzellenschicht an Dicke reducirt. In der letzteren, die 0,40 mm misst, sind die Zellen mit dem längsten Durchmesser horizontal angeordnet.

Gyrus temporalis medius, inferior und **internus** unterscheiden sich vom vorhergehenden dadurch, dass sämmtliche Zellen der *3. Schicht* und der *Ganglienzellenschicht* grösser sind und dass sich keine einzelnen

grossen Pyramidenzellen finden. Bisweilen findet sich eine deutlich ausgeprägte *2. Schicht*, aus kleinen Pyramidenzellen gebildet, die den in der ganzen Pyramidenzellenschicht im Gyrus occipitalis superior vorkommenden gleichen. Im vorderen Umfange dieser Windung finden sich unter der 1. Schicht regelmässig angeordnete Haufen von grossen Pyramidenzellen, wie im vorderen Umfange des Gyrus hippocampi.

Lobus falciformis [1]).

Das Cornu Ammonis, dessen eigenthümlicher Bau schon von PURKINJE und KÖLLIKER beobachtet worden ist, wurde zum ersten Male vollständiger von KUPFFER beschrieben, welcher folgende Schichten unterscheidet: 1) Stratum fibrarum nerv., 2) Stratum moleculare primum, 3) Stratum cellulosum, 4) Stratum reticulare, 5) Stratum moleculare secundum und 6) Stratum granulosum.

Nach MEYNERT besteht die Rinde hier aus einer mächtigen 1. Schicht (Kernblatt) mit kleinen, eingestreuten Nervenzellen, und einer 2. Schicht (Stratum lacunosum), welche zum grössten Theile aus einem anastomosirenden Capillarnetz besteht, umgeben von einem dichten Netz von perivasculären Räumen. Nervenzellen fehlen vollständig, aber die Schicht ist durchsponnen von einem Netzwerk von Ausläufern aus den Pyramidenzellen der inneren Hälfte der 3. Schicht. Die äussere Hälfte der 3. Schicht (Stratum radiatum) wird von Spitzenfortsätzen aus den in der inneren Hälfte der Schicht befindlichen, in mehreren Reihen über einander angeordneten Pyramidenzellen gebildet. Die 3. und 5. Schicht fehlen ganz, weshalb die Pyramidenzellenschicht hier unmittelbar an die Marklamelle (Alveus) grenzt.

Die zusammengerollte Lamelle im Innern des eigentlichen Cornu Ammonis besteht nur aus grossen Pyramidenzellen, aber im Gebiet der Fascia dentata treten kleine dichtstehende Zellen (Stratum corp. nerv. art.) auf.

Nach BETZ nimmt am Uebergang des Gyrus cinguli zum Gyrus hippocampi die Schicht grosser Pyramidenzellen des ersteren an Dicke zu. Die Kernschicht des Gyrus cinguli wird die Kernschicht der Ammonswindung und die weisse Markfaserschicht im Gyrus cinguli wird die

1) Hier wird eine Abweichung von Clasons Eintheilung gemacht, indem der Gyrus hippocampi und der Gyrus cinguli zusammengefasst werden.

Substantia reticularis alba in der Ammonswindung, sowie weiterhin das Kernblatt (Meynert). Am Ende der Ammonswindung sind die Zellen der 3. Schicht in Gruppen geordnet unmittelbar unter der 1. Schicht, die von Betz sogen. Glomeruli corticales.

Golgi giebt folgende Beschreibung vom Bau des Ammonshorns: 1) Alveus, Marklamelle, 2) Stratum convolutum mit Pyramidenzellen in 2 oder 3 Reihen. Diese Schicht ist die Fortsetzung der Rinde im Gyrus hippocampi. Ihr mittelster Theil entspricht Meynert's Stratum radiatum, sowie der tiefere Theil dem Stratum lacunosum. Der äusserste, unter der Fascia dentata gelegene Theil enthält eine grosse Zahl Pyramidenzellen, die dicht gestellt sind, so dass die Zellconturen schwer zu erkennen sind. Die 3. Schicht (Lamina medullaris circumvoluta) ist die Fortsetzung der 1. Schicht im Gyrus hippocampi. Als 4. Schicht wird die Fascia dentata Tarini beschrieben, gebildet aus kugelförmigen oder ovalen, regelmässig, bisweilen in mehreren Serien angeordneten Zellen.

Von Schäfer wird angegeben, dass die grossen Pyramidenzellen in der Fascia dentata unregelmässig angeordnet sind, umgeben von einem unvollständigen Ring kleiner, dicht zusammengedrängter Pyramidenzellen (Stratum granulosum).

Obersteiner giebt folgende Darstellung vom Bau der Rinde in diesem Gebiete: Im Gyrus hippocampi ist die 1. Schicht breiter als in andern Gebieten, was auf einer Vermehrung der oberflächlichen Markfasern (Substantia reticularis) beruht. Die kleinen Pyramidenzellen der 2. Schicht sind nicht in einer gleichförmigen Schicht angeordnet, sondern bilden eine Kette von Zacken, die sich zwischen die Faserbündel in der vorhergehenden Schicht einpassen. In der 3. Schicht finden sich fast ausschliesslich grössere Pyramidenzellen. Die 4. und 5. Schicht sind reducirt.

Im Cornu Ammonis selbst finden sich folgende Schichten: 1) das Kernblatt, 2) das Stratum moleculare, welche zusammen der 1. Schicht des gemeinsamen Typus entsprechen, 3) das Stratum lacunosum (2. Schicht im gemeinsamen Typus), 4) das Stratum radiatum, 5) das Stratum cellulosum pyramidale, welche beiden letzteren zusammen die 3. Schicht des gemeinsamen Typus bilden, 6) das Stratum oriens (5. Schicht), 7) der Alveus, 8) die Ependymschicht.

Die Fascia dentata enthält folgende Schichten: 1) das Stratum marginale, die Fortsetzung des Kernblatts, 2) das Stratum moleculare (1. Schicht des gemeinsamen Typus), 3) das Stratum granulosum, 4) der Nucleus fasciae dentatae mit Pyramidenzellen.

SALA, der mit Golgi's Methode arbeitete, beschreibt dieselben Schichten wie Golgi und beschäftigt sich, ebenso wie die übrigen Forscher, die Golgi's Methode anwendeten, hauptsächlich mit Zellfortsätzen und Nervenfasern.

Der Gyrus cinguli besteht nach BETZ ausschliesslich aus der 1. und 5. Schicht und einzelnen kleinen Zellen der 2. Schicht. Die spindelförmigen Zellen in der 5. Schicht sind 2—3 Mal so gross als die entsprechenden Zellen im gemeinsamen Typus und stehen auch im Boden eines Sulcus so angeordnet wie in der Mitte der Windung. Näher am Genu corporis callosi werden diese Zellen von dicht gehäuften Zellen in der 2. Schicht verdrängt. An der Mitte der Windung tritt wieder die Kernschicht mit den Pyramidenzellen der 3. Schicht auf, die kleiner als in andern Rindengebieten sind.

Die Rinde wird gegen das Corpus callosum hin dünner und besteht hier im hintern Theil der Windung aus 3 Schichten: 1) die tiefsten longitudinalen Markfasern, 2) eine Schicht von kleinen Nervenzellen und 3) eine Schicht von Pyramiden- und Spindelzellen von bedeutender Grösse.

Nach OBERSTEINER gleichen die 1. und 2. Schicht den entsprechenden Schichten im gemeinsamen Typus. Im äussern Theil der 3. Schicht finden sich blos wenige kleine Pyramidenzellen, im mittelsten Theile kommen gleichfalls Nervenzellen vor und im innern Theile mittelgrosse Pyramidenzellen. Die 4. Schicht bietet nichts Charakteristisches; die 5. Schicht ist wenig entwickelt.

Die Verdünnung der Rinde gegen das Corpus callosum hin beruht nach OBERSTEINER hauptsächlich auf einer Reduktion der 3. Schicht. Im Ligamentum tectum und in grösserer Anzahl in der Stria logitudinalis, kommen einzelne kleinere Nervenzellen vor.

Der **Gyrus hippocampi** hat in seiner äusseren Hälfte denselben Bau wie die Temporalwindungen, nur ist die *1. Schicht* bedeutend mächtiger (0,40 mm). Je mehr man sich dem innern Umfang der Windung nähert, desto dicker wird die 1. Schicht und sendet dicke Nervenbündel in die Pyramidenzellenschicht hinein (die hier nicht in eine *2.* und *3.* Schicht differenzirt werden kann). Dadurch wird das obere Drittel der Pyramidenzellenschicht von der übrigen Schicht abgesprengt und bildet grössere und kleinere Zelleninseln unter der 1. Schicht. Die Zellen in diesen Gruppen haben dieselbe Grösse wie die entsprechenden Zellen in der äusseren Hälfte der Pyramidenzellenschicht in mehr lateralen Theilen der Win-

dung und sind im Allgemeinen so angeordnet, dass ihre Fortsätze nach dem Mittelpunkt der Gruppe gerichtet sind. Die Zellen in den tieferen 2 Dritteln der Pyramidenzellenschicht haben dieselbe Grösse und Anordnung, wie die entsprechenden Zellen in mehr lateralen Theilen der Windung.

Hierauf folgt eine zellenarme Schicht (*die 4.*) mit vereinzelten kleinen Pyramiden- oder unregelmässigen Zellen.

Die *Ganglienzellenschicht* und die *Spindelzellenschicht* sind an Dicke reducirt.

Mehr medial wird es unmöglich, ferner die tiefere Hälfte der Pyramiden- und der Ganglienzellenschicht zu unterscheiden, sie bilden vielmehr zusammen eine ungefähr 0,60 mm mächtige, aus grossen und langen Pyramidenzellen bestehende Schicht zwischen der äussern Hälfte der 3. Schicht, die aus kleinen Pyramidenzellen und der sehr reducirten Spindelzellenschicht gebildet ist. An den Stellen, wo die Nervenbündel aus der mächtigen 1. Schicht in die Pyramidenzellenschicht hinein gesendet werden, wird diese aus kleinen Pyramidenzellen bestehende äussere Hälfte der Pyramidenzellenschicht von der aus grossen Pyramidenzellen bestehenden tieferen Hälfte abgesprengt und zugleich mit der Verdünnung der Rinde rücken diese Zellen theilweise nach oben in die Lücken zwischen den Gruppen von kleinen Zellen, wodurch die für das Subiculum charakteristische Anordnung von abwechselnd klein- und grosszelligen Zellengruppen entsteht.

Weiter nach innen verschwinden die aus kleinen Zellen bestehenden Gruppen, zugleich wird die Grosszellenschicht immer mehr verdünnt und die Spindelzellenschicht wird nur durch einige einzeln stehende horizontale Spindelzellen repräsentirt, die in einfacher oder doppelter Reihe angeordnet sind.

Die aus Nervenzellen bestehende Schicht im Cornu Ammonis, die dem unteren Theile der Pyramidenzellenschicht sammt der Ganglienzellenschicht entspricht, wird gegen das Seitenhorn hin begrenzt von einer 0,50 mm dicken Marklamelle (Alveus), sowie in entgegengesetzter Richtung von einer 0,80 mm dicken zellenfreien Schicht, die der oberen Hälfte der Pyramidenzellenschicht sammt der 1. Schicht entspricht.

In der Fascia dentata misst die äussere zellenfreie Schicht, die der 1. Schicht entspricht, 0,30 mm; die darauf folgende, aus kleinen runden und bipolaren Zellen bestehende Schicht, die der äussern Hälfte der Pyramidenzellenschicht entspricht, misst 0,10 mm; die darauf folgende (halbe Dicke des Nucleus), aus grossen, irregulären und pyramidalen Zellen bestehende Schicht, die der tieferen Hälfte der Pyramidenzellenschicht und Ganglienzellenschicht entspricht, misst 0,30 mm an Dicke.

Im vordersten Theile der Windung wird eine ähnliche Anordnung der Zellen der Pyramidenzellenschicht wahrgenommen wie im Subiculum cornu Ammonis. Die kleinzelligen Gruppen sind auch hier durch Absprengung von der übrigen Schicht gebildet, aber die grosszelligen, die entweder neben oder unter den vorigen liegen können, machen hier nicht sämmtliche Zellen in der tieferen Hälfte der 3. und der Ganglienzellenschicht aus, sondern eine zellenarme, aus etwas kleineren Pyramidenzellen bestehende Schicht trennt hier diese Gruppen von der relativ mächtigen Spindelzellenschicht.

Gyrus cinguli. Die zunächst auf die *I. Schicht* folgenden kleinen Pyramidenzellen machen eine ungefähr 0,50 mm dicke Schicht der Rinde aus; hierauf folgt eine ungefähr gleich dicke Schicht von grossen *Pyramidenzellen* und nach dieser eine 0,70 mm dicke *Spindelzellenschicht.* Da die 4. Schicht hier ganz fehlt, macht es grosse Schwierigkeit, zu bestimmen, wie viel von der Schicht der grossen Pyramidenzellen zur 3. und zur Ganglienzellenschicht gehört. An manchen Stellen aber kann diese Schicht in 2 ungefähr gleich grosse Theile getheilt werden, von denen der äussere etwas kleinere und dichter gehäufte Zellen enthält, als der innere.

Die Zellen in dieser Schicht sind im Allgemeinen so zu sagen klumpiger und nicht so typisch pyramidal, wie in andern Rindengebieten, und an mehreren Stellen gleichen sie grossen Spindelzellen. Sie messen $20\,\mu \times 30\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Es ist klar, dass BETZ diese Zellen als Spindelzellen aufgefasst hat, und er giebt an, dass sie auch im Boden eines Sulcus vertikal stehen, was die Spindelzellen doch in der Regel nicht thun.

Die *Spindelzellen* messen $12\,\mu \times 30 - 40\,\mu$ und sind relativ dicht gehäuft in einer 0,20 mm dicken Schicht.

Nach dem hintern Umfang der Windung zu treten die Zellen der *4. Schicht* auf, durch die die Spindelzellenschicht und die Ganglienzellenschicht von einander getrennt werden.

Nach dem Corpus callosum zu verdünnen sich alle Schichten und zugleich nimmt die Grösse der Zellen ab. Nahe an der Uebergangsstelle findet sich blos eine schmale 1. Schicht, eine aus gleichgrossen Zellen bestehende Pyramidenzellenschicht und eine ungefähr 0,30 mm breite Spindelzellenschicht aus horizontal gestellten Zellen. Im tieferen Theil der Pyramidenzellenschicht finden sich vereinzelte grössere Pyramidenzellen. In der grauen Substanz am Corpus callosum finden sich vereinzelte, unregelmässige, kleine Nervenzellen, in grösserer Menge gehäuft in der Stria longitudinalis.

Lobus centralis.

Die Insularinde oder die Rinde in der Fissura Sylvii und um dieselbe herum ist nach Meynert charakterisirt durch die mächtige, aus Spindelzellen bestehende Schicht, die unter dem Namen Claustrum von innen die Windungen in der Insula bekleidet und in die die Fossa Sylvii begrenzende Rinde übergeht und nach Meynert nichts Anderes ist, als eine compakte Anhäufung von Zellen aus der tiefsten Rindenschicht.

Nach Betz wird die Insularinde durch grosse Zellen in der 5. Schicht charakterisirt, den Claustrumzellen ähnlich, sowie durch haufenweise angeordnete kleine Pyramidenzellen mit langen Spitzenfortsätzen in der 2. und 3. Schicht. An der Wurzel des Operculum Blumenbachii finden sich bisweilen bei Erwachsenen grosse, Riesenzellen ähnliche Pyramidenzellen in der 3. Schicht.

Obersteiner hebt (nach H. Major) hervor, dass die Rinde in der Insula nicht von dem gemeinsamen Typus abweicht.

Nach Mondino ist das Claustrum die Fortsetzung und der Schluss der Rinde des Temporallappens und besteht peripherisch aus Spindelzellen, aber in der Mitte aus mannigfach gestalteten Zellen, die oft Pyramidenzellen gleichen.

Die Rinde in den **Gyri breves** hat folgende Zusammensetzung:

Die *Pyramidenzellenschicht* misst 0,70 mm in der Dicke und enthält Zellen, die $8 - 10\,\mu \times 10 - 15\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 30 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

Die *4. Schicht* ist wenig ausgeprägt und misst 0,18 mm in der Dicke.

Die *Ganglienzellenschicht* misst 0,40 mm und besteht aus Zellen, die $10\,\mu \times 15\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 35 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen.

Die *Spindelzellenschicht* ist mächtig und misst 0,90—1,20 mm in der Breite, sie enthält Zellen, die $4 - 8\,\mu \times 20\,\mu$ messen und sich in einer Anzahl von 28 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ finden.

Am Uebergange zu den Frontal- und Centralwindungen werden die Zellen immer grösser und die Rinde nimmt ungefähr denselben Bau an, wie im orbitalen Theile des Gyrus frontalis inferior.

Nachdem ich nun über die den normalen Bau der Hirnrinde betreffenden Untersuchungen berichtet habe, die ich dem Studium der pathologischen Verhältnisse derselben vorausschicken zu müssen glaubte, gehe ich nun über zu einem Bericht meiner Studien über die Veränderung der Hirnrinde bei Formen von Idiotie.

III.

Unter dem Begriff *Idiotie* sind hier sämmtliche psychische Schwächezustände zu verstehen, die nach Krankheiten entstanden sind, die das Gehirn während des Fötallebens, während der Geburt oder im früheren Kindesalter getroffen haben.

Psychologisk-klinisch sind die Formen der Idiotie wohl charakterisirt. Nach der gebräuchlichsten, hier angewendeten Eintheilung (die unter Anderen von SCHÜLE in Ziemssen's Handbuch aufgestellt ist) werden die Idioten in 2 Gruppen getheilt:

A) *Blödsinnige*, denen Auffassung und Bewusstsein fehlt und die zu psychischer Entwicklung unfähig sind; sowie

B) *Schwachsinnige*, die zwar Auffassung und Bewusstsein haben, deren psychische Entwicklung aber in einem abnorm frühen Stadium stehen geblieben ist.

Die letztere Gruppe wird eingetheilt in:

1) *in hohem Grade Schwachsinnige*, nicht Bildungsfähige, deren psychische Entwicklung in einem Stadium stehen geblieben ist, das durch die früheste Kindheit (1.—5. Lebensjahr) charakterisirt ist; sowie

2) *mässig und in geringem Grade Schwachsinnige*, Bildungsfähige, deren psychische Entwicklung in einem späteren Stadium stehen geblieben ist, das zwar nur schwer mit den Stadien des normalen Kindesalters verglichen werden kann, das aber doch im Allgemeinen zwischen das 6. und 12. Lebensjahr verlegt werden kann.

Uebergänge sind zwischen den verschiedenen Gruppen vorhanden und innerhalb jeder dieser Gruppen lassen sich verschiedene Unterabtheilungen aufstellen.

Mannigfache Versuche sind gemacht worden, die klinischen Symptome auf pathologische Processe im Gehirn zurückzuführen, und vor Allem ist der Grösse, der Form und der makroskopischen Beschaffenheit des Gehirns die grösste Aufmerksamkeit zugewendet worden.

Da sich aber hierbei gefunden hat, dass bei derselben Veränderung des Gehirns die verschiedensten klinischen Symptome vorkommen können, wird vom *klinisch-pathologischen* Gesichtspunkte aus eine derartige Eintheilung unmöglich, selbst wenn dieselbe, *pathologisch-anatomisch* betrachtet, berechtigt sein kann.

In den neueren Zeiten hat sich die Aufmerksamkeit der Forscher immer mehr den feineren Veränderungen der Hirnrinde zugewendet und

es sind mehrere mikroskopische Untersuchungen der Hirnrinde bei Idioten ausgeführt worden.

Aber diese Untersuchungen sind hauptsächlich auf Form und Beschaffenheit, Grösse und Anordnung der Rindenelemente im Allgemeinen gerichtet gewesen und die Beschreibungen hatten die Rinde in ihrer Gesammtheit als ein gleichförmiges Gebilde im Auge.

Allerdings hat der oder jener von den Autoren betont, dass die Veränderung an einer Stelle des Gehirns ausgeprägter war oder einen andern Charakter hatte, als an einer anderen, aber eine erschöpfende und in das Einzelne gehende Untersuchung der Hirnrinde im speciellen Fall ist bisher nicht ausgeführt worden, ebensowenig sind die gefundenen Veränderungen mit genau und bis in das Einzelne bekannten klinischen Symptomen zusammengestellt worden.

Dass derartige Untersuchungen bisher nicht ausgeführt worden sind, dürfte darauf beruhen, dass die Verschiedenheiten im Bau der normalen Hirnrinde nicht bekannt waren und dass Methoden zur Untersuchung theilweise fehlten. Vor Allem in denjenigen Fällen, die durchaus normale Verhältnisse ausser bezüglich der Anzahl der Zellenelemente zeigten, mussten manche Veränderungen bisher der Beobachtung sich entziehen oder, wenn sie wahrgenommen wurden, konnten blos gröbere Abweichungen, und diese auch nur andeutungweise, angegeben werden.

Erst nachdem diese Schwierigkeiten überwunden worden sind, der normale Bau der Rinde genauer bekannt und eine Methode, die Anzahl der Zellen exakt zu bestimmen, angegeben ist, kann eine erschöpfende Untersuchung der Veränderungen der Hirnrinde in den speciellen Fällen vorgenommen werden und erst durch ein auf diesem Wege gewonnenes Material können wir hoffen, tiefer in das Wesen der Idiotie einzudringen und in den Stand gesetzt zu werden, eine erschöpfende *klinisch-pathologische* Eintheilung dieser Formen aufzustellen.

Nachdem eine solche vorbereitende Arbeit in Abtheilung I und II dargelegt worden ist, wird nun in dieser Abtheilung über meine zu dem angegebenen Zwecke unternommenen Untersuchungen, die specielle Fälle von Idiotie betreffen, berichtet.

Zuerst wird ein vollständiger Bericht über die einzelnen Fälle gegeben, die nach der vorhin erwähnten Eintheilung in klinisch zusammengehörige Gruppen geordnet sind. Nach jedem Fall wird eine Epikrise gegeben, sowie nach jeder Gruppe eine kurze Zusammenfassung und schliesslich eine Schlussbemerkung über die Resultate der Untersuchungen nebst einer Zusammenstellung derselben mit den in der hierhergehörigen Literatur sich vorfindenden Angaben.

A. Blödsinnige.

Fall 1.

Adolf Olsson, 22 Monate alt, geboren am 25. März 1890, gestorben an Pneumonia acuta.

Krankengeschichte.

In der Verwandtschaft des Pat. sind keine Nerven- oder Geisteskrankheiten bekannt. Beide Grossväter Alkoholisten. Die Eltern sind Geschwisterkinder.

Die Mutter hat 4 Entbindungen durchgemacht; die erste im Alter von 17 Jahren und 10 Monaten. Die Beckenmaasse sind (nach dem Journal des allgemeinen Gebärhauses vom 28. Oct. 1886) folgende: Diam. spin. il. 25; Crist. il. 26,5; Conj. ext. 19 cm. Die Durchmesser des Kindeskopfes waren: Diam. mento-occip. 14; front.-occip. 13,5; interbregm. 9,5 cm. Das Kind war blind; führte nie spontan irgend welche Bewegungen aus und konnte blos mit Schwierigkeit die Brust nehmen. Es starb im Alter von 7 Wochen.

Das 2. Kind wurde am 11. Nov. 1887 geboren. Durchmesser des Kindeskopfes: Diam. mento-occip. 10,5; fronto-occip. 9, interbregm. 7,2 cm. Es konnte die Brust nehmen, führte nie spontan irgend welche Bewegung aus, reagirte nicht auf Eindrücke auf irgend einen der Sinne; lallte nicht. Als das Kind 3 Monate alt war, begannen convulsive Zuckungen täglich mehrere Male aufzutreten und bestanden fort bis zum Tode des Kindes im Alter von 1 1/2 Jahren.

Das 3. Kind ist der Pat., von dem die vorliegende Krankengeschichte handelt. Das 4., ein 2 Monate altes Mädchen, scheint sich normal zu entwickeln; ihr Kopf zeigt einen geringen Grad von Dolichocephalie.

Pat. wurde am 25. März 1890 geboren, die Entbindung war leicht, Maasse des Kindeskopfes wurden nicht festgestellt. Der Kopf hatte ganz Form und Aussehen wie der des 2. Kindes.

Die *Körperentwicklung* war übrigens, wie auch der physische Gesundheitszustand, in jeder Beziehung normal, das Kind ernährte sich gut. Es konnte die Brust nehmen, gab aber nicht zu erkennen, ob es hungrig

war oder satt. Versuche, das Kind zu entwöhnen, misslangen, da es nicht zu schlucken verstand, wenn ihm Milch mit dem Löffel gereicht wurde.

Es lag während des ersten Lebensjahrs stets still, wie es gelegt wurde, führte spontan keine Bewegung aus und schlief fast fortwährend.

Höhere **psychische Funktionen** fehlten ganz und gar.

Sprache: Pat. konnte kein einziges Wort aussprechen.

Cranialnerven: I. *Geruch.* Es finden sich keine Angaben vor.

II. *Sehvermögen.* Schon vom 2. halben Jahre an richtete Pat. nach den Angaben die Augen nach einer im Gemache befindlichen Lichtflamme und suchte ihr mit den Augen zu folgen, wenn sie weggetragen wurde. Es war einerlei, ob sich die Flamme auf der einen oder der andern Seite des Pat. befand. Coordinirte Augenbewegungen und ordentliche Fixation zeigten sich erst ungefähr im Alter von 1 1/2 Jahren, als Pat. bisweilen einem glänzenden oder farbigen Gegenstande mit den Augen folgte. Eine Vorliebe für eine bestimmte Farbe war nicht vorhanden. Er folgte Personen nicht mit dem Blicke und lernte nie Vater und Mutter kennen.

III. IV. VI. Die Pupillen waren gross, gleich und sehr leicht beweglich und änderten deutlich die Form, wenn Pat. erschreckt wurde oder wenn etwas in der Umgebung seine Aufmerksamkeit auf sich zog. Die Augen wurden nicht gerollt, Nystagmus bestand nicht.

V. VII. Keine Lähmung oder Gefühlsstörung im Gesicht.

VIII. *Das Hörvermögen* war sehr entwickelt im Verhältniss zu den übrigen Sinnen. Pat. reagirte auf das geringste Geräusch im Zimmer (gewöhnlich durch Schreien oder durch Hinblicken nach der Gegend, sowie durch deutliche Dilatation der Pupillen).

Er war besonders empfindlich für Dissonanzen, während Musik oder Gesang ihn alsbald beruhigte, wenn er unruhig oder schreiig war. Die Mutter giebt an, dass sie, wenn sie Messingdraht feilte, was sie täglich bei ihrer Arbeit thun musste, den Pat. in ein anderes Gemach oder zu den Nachbarn bringen musste, weil er deutlich dadurch gequält wurde. Wenn er in der Nacht schreiig oder unleidlich war, pflegte er sich alsbald zu beruhigen, wenn er Musik hörte, und der Vater berichtet, dass er jede Nacht die Guitarre neben sich lege, um sie gleich bei der Hand zu haben, und dass Pat. beim ersten Anschlagen derselben sofort still werde.

IX. Was den *Geschmack* betrifft, zog er gezuckerte Milch der Hafersuppe vor, an die ihn seine Mutter mehrere Male zu gewöhnen

versuchte. Er konnte auch gezuckerte von ungezuckerter, gekochte von ungekochter Milch unterscheiden.

X. XI. XII. Nichts angegeben.

Sensibilität. Pat. schrie leicht bei unsanfter Berührung. Er war einmal unleidlich und schreiig und seine Mutter konnte lange die Veranlassung dazu nicht auffinden, bis sie schliesslich Flohstiche am Körper des Pat. entdeckte, und als dieser von dem Ungeziefer befreit war, wurde er ruhig. Er konnte kalte und warme Milch unterscheiden. Wenn man ihn anfasste, wurde oft bemerkt, dass er die Augen auf die berührte Stelle richtete.

Von der Stellung seiner Glieder scheint Pat. keinen Begriff gehabt zu haben. Er lag, ohne Unbehagen zu erkennen zu geben, oft unbequem und besonders erinnert sich der Vater, dass Pat. mehrere Stunden lang mit dem einen nach hinten gebeugten Beine unter sich lag, ohne das mindeste Unbehagen zu erkennen zu geben.

Motilität. Pat. konnte keine freiwillige coordinirte Bewegung ausführen. Bewegungen nach vorn und hinten mit den Händen und ein Versuch, den Kopf zu heben, waren die einzigen, die er spontan ausführte. Suchte man ihn im Bett zu setzen, wankte er nach allen Seiten und musste gestützt werden. Beim Versuch, ihn gehen zu lehren, machte er manchmal Ansätze, das Bein nach vorn zu führen, stolperte aber und blieb mit dem einen Fusse an dem andern hängen, weshalb die Versuche bald aufgegeben wurden. Hielt man ihm einen Gegenstand hin, griff er nie danach und machte nicht einmal einen Versuch dazu. Steckte man ihm einen Gegenstand in die Hand, konnte er ihn festhalten und liess ihn nicht spontan los.

Trophische Störungen waren nicht vorhanden.

Keine Athetosebewegungen in den Fingern.

Convulsionen begannen aufzutreten, als Pat. 3 Monate alt war. Sie kamen ungefähr alle 14 Tage, wurden gewöhnlich durch irgend ein Geräusch hervorgerufen und traten stets während des Schlafes auf. Der Vater gab an, bemerkt zu haben, dass diese Anfälle stets auftraten, wenn Pat. auf der linken Seite lag, dagegen beobachtete man nicht, ob die Zuckungen in einem gewissen Gliede anfingen. Sie begannen mit Starre, wie es schien, im ganzen Körper und wurden von einigen klonischen Zuckungen abgeschlossen, sie dauerten eine bis einige Minuten. Darauf folgte einige Stunden lang tiefer Schlaf.

Sektion.

Ueber das Schädeldach und die harte Hirnhaut ist nichts bemerkt.

Das in Spiritus gehärtete Gehirn misst in der Länge 8,4 cm und wiegt 142,5 Gramm.

Die rechte Hemisphäre wiegt 65, die linke 66 und der Pons mit dem Kleinhirn 11,5 Gramm.

Was die Grösse der verschiedenen Lappen betrifft, scheinen die Temporal- und Parietallappen relativ kräftig entwickelt zu sein, während der Frontallappen und insonderheit der Occipitallappen recht bedeutend reducirt erscheinen.

Makroskopische Untersuchung. Rechte Hemisphäre.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* stellt sich nicht als eine zusammenhängende Windung dar und kann nicht deutlich abgegrenzt werden, weder von den übrigen Frontalwindungen, noch vom Gyrus centralis posterior.

Das kleine Gebiet, das dieser Windung entsprechen dürfte, und das nach vorn von einer undeutlichen Fissura centralis liegt, hängt direkt mit dem Gyrus frontalis superior und medius zusammen und wird durch einen kleinen Sulcus gegen den Gyrus frontalis inferior abgegrenzt. Die untere Grenze der Windung reicht nicht hinab bis zur Fissura Sylvii, sondern ist von dieser durch den Gyrus getrennt, der hier die Insulawindungen vertritt.

Der zur medialen Hirnoberfläche gehörende Theil wird nach unten von der Fissura calloso-marginalis begrenzt und geht nach vorn ohne Grenze in den Gyrus frontalis superior über.

Gyrus frontalis superior, *medius* und *inferior* sind klein und kurz. Sie sind an der seitlichen Hirnoberfläche wohl begrenzt, aber an der orbitalen Fläche ist die Rinde nicht in deutliche Windungen getheilt, sondern bildet eine von unregelmässigen und seichten Furchen oder Einsenkungen markirte Fläche.

Der **Lobus parietalis** umfasst mehr als die Hälfte der lateralen Hirnoberfläche.

Der *Gyrus centralis posterior* bildet eine kleine, undeutliche und wenig hervortretende Windung. Sein zur medialen Hirnoberfläche gehörender Theil wird nach hinten und unten von der Fissura calloso-marginalis begrenzt.

Sein zur lateralen Hirnoberfläche gehörender Theil wird von der Fissura Sylvii von der Windung getrennt, die hier die Rinde in der Insula vertritt.

Gyrus parietalis superior und *inferior* sind gut entwickelt und weichen nicht von dem Normalen ab, ausgenommen dass der Gyrus parietalis inferior anterior nach vorn direkt mit der zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Windung zusammenhängt, die die Insula-Rinde vertritt.

Lobus occipitalis. Dieser Lappen ist von dem Parietallappen durch eine tiefe Furche getrennt, die von der Margo falcata nach aussen, unten und vorn bis zum äussern Rande des Temporallappens geht. Er ist der relativ kleinste von sämmtlichen Lappen und erscheint wie ein Anhang zu dem übrigen Gehirn.

Der *Gyrus occipitalis superior* besteht aus einer kleinen, wenig ausgeprägten Windung, die ohne Grenze in den Gyrus occipitalis inferior externus übergeht. An der medialen Oberfläche wird der ganze Cuneus von einer kleinen, schwachen, 8 mm breiten Windung zwischen der Fissura calcarina und occipitalis interna repräsentirt.

Gyrus occipitalis inferior externus und *internus* sind etwas kräftiger entwickelt und von einander gut abgegrenzt.

Lobus temporalis. Dieser Lappen ist relativ kräftig entwickelt und seine Windungen sind von normalem Verlauf und normaler Begrenzung.

Der **Lobus falciformis** ist kräftig entwickelt.

Lobus centralis. Eine Fossa Sylvii findet sich nicht und von der Fissura Sylvii findet sich nur der hintere Schenkel deutlich ausgeprägt, während der vordere blos durch eine schwache Impression angedeutet ist.

Eine Insula findet sich nicht, sie wird aber durch eine Windung ersetzt, die zwischen den Gyrus frontalis inferior, die Centralwindungen und den Gyrus temporalis superior eingeschoben ist, während sie nach hinten in den Gyrus parietalis inferior anterior übergeht.

Diese Windung hat eine laterale, zur lateralen Hirnoberfläche gehörende Fläche und eine hintere untere, die in den hintern Schenkel der Fissura Sylvii versenkt ist. Sie wird nach vorn zu schmäler und geht vor dem Uncus gyri hippocampi in die Rinde der Orbitaloberfläche über.

Linke Hemisphäre.

Die Rinde zeigt in der Hauptsache dieselbe Anordnung der Windungen wie rechts.

Vom **Corpus callosum** findet sich nur ein Querschnitt, der sagittal 8 mm und vertikal 5 mm misst und an der Stelle des Genu corporis callosi liegt. Von hier aus strahlen Lamellen in die Hemisphäre ein und, nachdem sie einen nach oben convexen Bogen beschrieben haben, laufen sie im Dach der ausgedehnten Seitenventrikel nach unten vorn, unten aussen und unten hinten. Von diesen letzteren schwenkt ein Theil nach vorn um in den Temporallappen. Diese Lamellen bilden eine zusammenhängende Membran, die das Dach der ausgedehnten Seitenventrikel bildet.

Die am meisten medialen von den nach hinten verlaufenden Fasern bilden einen, von grauer Substanz bekleideten Wulst, der unter und parallel mit dem Gyrus cinguli verläuft. An der Bildung dieses Wulstes nimmt auch ein longitudinaler Faserzug Theil, der sich vom Frontallappen über das Corpus callosum hinweg nach dem Occipitallappen erstreckt und auch zum Temporallappen Fasern sendet.

Entsprechend der äussern untern Grenze des Ventrikels werden die Fasern des Corpus callosum von Lamellen aus der Capsula interna gekreuzt, die von unten nach oben zu der Margo falcata laufen.

Unter dem erwähnten Wulst beginnt eine von Ventrikelgrau und Oberflächengrau bekleidete Membran, die in der Mitte aus Nervenfasern besteht und im Sulcus chorioideus angeheftet ist. Diese Lamelle macht die eine Hälfte vom Corpus fornicis aus, das also aus 2 von einander vollständig getrennten Hälften gebildet wird. Ein grosses Foramen Monroi leitet hinter den Columnae fornicis in die Seitenventrikel, die weiter als normal sind.

Der 3. Ventrikel wird nach vorn und unten und im Abschnitt zwischen der Commissura anterior und dem Querschnitt des Corpus callosum von einer grauen Lamelle, der Lamina terminalis cin., geschlossen, nach oben von der Pialamelle, die zwischen den beiden Sulci chorioidei verläuft.

Commissura anterior und mollis sind gut entwickelt.

Die **Centralganglien**, der **Pons** und **die Medulla oblongata** zeigen makroskopisch nichts Abnormes.

Das **Kleinhirn** ist bedeutend kleiner als normal und erscheint wie ein kleiner Anhang an Pons und Medulla oblongata. Seine hintere Begrenzung liegt nahezu 3 cm vor der Occipitallappenspitze.

In Folge der Verkleinerung des Kleinhirns in vertikaler Richtung kann man von hinten her die ganze untere Hälfte des 4. Ventrikels sehen.

Im Centrum der obern Hemisphärenoberfläche liegt die centrale Marklamelle in einer Ausdehnung von ungefähr 7 mm blos. Sämmtliche Windungen können an diesem in seinem Wachsthum gehemmten Organe erkannt werden.

Jede Hemisphäre misst transversal 2,5 cm, vertikal 1,5 cm und sagittal 2,2 cm.

Der Vermis misst sagittal 0,5 cm und vertikal 0,7 cm.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Der zur medialen Hirnoberfläche gehörende Theil der Windung besteht aus einer zellenfreien, 0,30 mm dicken Schicht und einer Pyramidenzellenschicht von 1,5 mm Dicke.

Die Zellen in dieser Schicht sind sehr wenige an Zahl und kommen in einer Anzahl von 5 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ vor (normal bei Zweijährigen in der 3. Schicht 25). Sie haben einen grossen Kern und nur einen schmalen Ring feingranulirtes Protoplasma, sowie abgerundete, birnförmige Gestalt mit feinen, undeutlichen Fortsätzen. Sie sind ganz klein und messen $8 - 10\,\mu$ in der Breite. Im tiefsten Theile der Schicht kommen auch andere, spindelförmige Zellen vor, die $16\,\mu \times 48\,\mu$ messen. Diese Spindelzellen haben grosse Kerne, feingranulirtes Protoplasma und 2 vertikal gehende dicke Fortsätze. Sie kommen äusserst spärlich vor mit mehreren mm Zwischenraum zwischen einander.

Eine Spindelzellenschicht findet sich nicht, aber im Mark unter der Pyramidenzellenschicht finden sich vereinzelte birnförmige oder spindelförmige Zellen, die $8 - 10\,\mu \times 15 - 20\,\mu$ messen.

An dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung haben die Zellen dieselbe Grösse und Beschaffenheit, wie oben beschrieben, aber je weiter abwärts man an der Windung kommt, desto mehr Zellen treten an der Stelle der Spindelzellenschicht auf, so dass mitten in der Windung sich eine wohl markirte, 0,40 mm dicke Spindelzellenschicht findet, bestehend aus kleinen, $3 - 4\,\mu$ breiten Spindelzellen.

Die oben beschriebenen grossen Spindelzellen kommen hier nicht vor. Dafür sind sämmtliche tiefsten Zellen in der Pyramidenzellenschicht etwas grösser und von mehr pyramidaler Form als an der oberen Hälfte.

Der *Gyrus frontalis superior* verhält sich wie der obere Theil des Gyrus centralis anterior. Je näher man der Spitze der Windung kommt, desto mehr werden der Zellen in der Spindelzellenschicht, zugleich treten kleine, $2-3\,\mu$ breite, pyramidale und unregelmässige Zellen zwischen den Pyramidenzellen auf und deuten eine 4. Schicht an.

Blos in der hinteren Hälfte der Windung kommen im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht einige grosse Spindelzellen vor.

Im vordern Theile und in dem zur orbitalen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung haben die tiefsten Zellen in der Pyramidenzellenschicht und im letzteren Gebiet auch in der Ganglienzellenschicht eine mehr pyramidale Form angenommen und sind etwas grösser, als die übrigen Pyramidenzellen. Sie messen $12\,\mu \times 18\,\mu$.

Der *Gyrus frontalis medius* verhält sich wie die vordere Hälfte der vorigen Windung.

Gyrus frontalis inferior. Die hintere Hälfte des zur lateralen Oberfläche gehörenden Theiles der Windung hat denselben Bau wie der obere Theil des Gyrus centralis anterior, hat aber ausserdem eine deutliche und ziemlich stark entwickelte Spindelzellenschicht.

Die vordere Hälfte und der orbitale Theil der Windung gleichen dem Gyrus frontalis medius. Die tiefsten Zellen der Pyramidenzellenschicht sowie der Ganglienzellenschicht sind jedoch hier etwas grösser ($12-14\,\mu \times 20-25\,\mu$) und die 4. Schicht ist deutlicher markirt.

In allen Frontalwindungen finden sich, sowohl in der Rinde wie auch im Mark, runde Zellen, die weissen Blutkörperchen gleichen, aber etwas kleiner als diese sind. Die Stützsubstanz erscheint möglicherweise etwas dichter als normal; die Zahl der Gefässe, vor Allem der Rindencapillaren, vermehrt.

Keine Veränderungen in den Gefässwänden.

Die oberflächenparallele Faserschicht [Associationsfaserschicht] der ersten Schicht schwächer als normal.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* zeigt eine normale Anordnung in der Rindenschicht. Sämmtliche Zellen sind kleiner als normal und die Pyramidenzellen, die gleich gross sind, überschreiten nicht $10\,\mu$ in der Breite. Diese Zellen stimmen mit den vorher im Gyrus

centralis anterior beschriebenen überein, sowohl in Bezug auf Anzahl, als auch Grösse, Form und Struktur.

Die tieferen Zellen in der Pyramidenzellenschicht und in der Ganglienzellenschicht sind grösser als die übrigen und messen $12-15\,\mu$.

Im *Gyrus parietalis superior* sind sämmtliche Zellen der Pyramidenzellenschicht etwas grösser und haben eine ausgeprägtere Pyramidenform. Die tiefsten Zellen, sowie die Zellen in der Ganglienzellenschicht erreichen eine Grösse von $14-16\,\mu \times 20-25\,\mu$.

Die Spindelzellenschicht wird gebildet aus breiten, dicht gehäuften Spindelzellen, die $10-12\,\mu \times 25\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen (normal bei Zweijährigen 22).

Gyrus parietalis inferior. Die Rinde besteht hier nur aus 2 Schichten, einer oberflächlichen, zellenfreien Schicht und einer tieferen, die aus kleinen, $8-10\,\mu$ grossen Zellen von derselben Beschaffenheit besteht, wie die zuerst beschriebenen im Gyrus centralis anterior.

Sie sind äusserst wenige an Zahl und ihre Menge beträgt ungefähr $^1/_5$ der normalen. Sie sind alle gleich gross.

Im Mark unter der Zellenschicht finden sich zerstreut kleine Spindelzellen, die eine besondere Schicht nicht bilden. Die vorher beschriebenen runden Elemente kommen spärlich in Rinde und Mark des Lappens vor.

Die Stützsubstanz erscheint etwas dichter als normal im untern Theile des Lappens. Anzahl der Gefässe etwas vermehrt. Keine Verdickung der Gefässwände.

Associationsfaserschicht schwächer als normal.

Lobus occipitalis. Der zur lateralen Hirnoberfläche gehörende Theil des *Gyrus occipitalis superior,* sowie der *Gyrus occipitalis inferior externus* zeigen denselben Bau wie der Gyrus parietalis superior, aber die Spindelzellenschicht ist hier etwas mächtiger.

Der zur medialen Hirnoberfläche, sowie zur Spitze des Occipitallappens gehörende Theil der Windung ist gebildet aus äusserst kleinen, $3\,\mu \times 5-6\,\mu$ grossen Zellen von pyramidaler Form, eine grosse mächtige Schicht bildend, unterbrochen durch ein Paar aus grossen unregelmässigen Zellen bestehende zellenärmere Zwischenschichten, in denen vereinzelte grössere Zellen vorkommen. Diese Zellen sind äusserst spärlich vorhanden.

Die Spindelzellenschicht ist hier wenig entwickelt und blos repräsentirt durch einzelne kleinere Spindelzellen in der Marksubstanz.

Denselben Bau hat der *Gyrus occipitalis inferior internus* in seinem nach der Fissura calcarina hin gelegenen Theil. Nach dem Gyrus occipitalis inferior externus zu werden die Zellen grösser und die Rinde nimmt den für die laterale Oberfläche des Occipitallappens charakteristischen Bau an.

Sowohl das Mark, als die Rinde sind von den oben erwähnten runden Zellelementen durchsetzt.

Die Stützsubstanz erscheint an der medialen Oberfläche dichter. Anzahl der Gefässe vermehrt.

Die Dicke der Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist etwas reducirt.

Lobus temporalis. Dieser Lappen, der normale Anordnung der Schichten zeigt, ist durch bedeutend lange Pyramidenzellen charakterisirt. Im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht und in der Ganglienzellenschicht haben sie Spindelform angenommen und messen in der Breite $10\,\mu$ und in der Länge $50 - 100\,\mu$. Mehrere Uebergänge von der Spindel- zur Pyramidenform finden sich vor.

Diese Zellen, die in grosser Anzahl vorkommen, haben einen grossen Kern von der Form der Zelle und feinretikulirtes Protoplasma, sowie einen sehr groben Spitzenfortsatz, einen deutlichen Basalfortsatz nebst einigen feineren Seitenfortsätzen.

Die Spindelzellenschicht ist relativ kräftig entwickelt und aus Zellen zusammengesetzt, die $6 - 8\,\mu \times 15\,\mu$ messen.

Die oben beschriebenen grossen Zellen sind am reichlichsten in der vordern Hälfte des Gyrus temporalis superior und medius und nehmen an Anzahl und Grösse ab, je weiter nach hinten man kommt.

Die kleinen runden Zellelemente kommen spärlich in Rinde und Mark des ganzen Lappens vor.

Die Stützsubstanz ist möglicherweise etwas dichter als normal, die Zahl der Gefässe etwas vermehrt.

Menge der Nervenfasern nicht merkbar vermindert.

Lobus falciformis. Der *Gyrus hippocampi* zeigt keine Abweichungen, ausgenommen, dass die Anzahl der Zellen geringer als normal ist.

Gyrus cinguli. Die Zellen, die hier alle gleich gross sind, sind in einer einzigen grossen Schicht angeordnet. Sie gleichen den Pyramidenzellen im Gyrus centralis anterior, übertreffen sie aber etwas an Grösse.

Sowohl die Rinde, als das Mark sind durchsetzt von kleinen runden Zellelementen. Die Stützsubstanz erscheint normal. Anzahl der Gefässe vermehrt.

Die Zahl der Nervenfasern erscheint normal.

Lobus centralis. Die Rinde in den accessorischen Windungen, die die Rinde in der Insula ersetzen, zeigt denselben Bau, wie die Rinde im orbitalen Theile des Gyrus frontalis inferior, nur dass die tieferen Pyramidenzellen hier nicht grösser sind als die übrigen.

Beide Hirnhälften verhalten sich gleich.

Die **Centralganglien,** sowie die Kerne in **Pons** und **Medulla oblongata** zeigen keine Abweichungen vom Normalen.

Kleinhirn. Sowohl in den *Hemisphären* wie im *Vermis* sind sowohl die Zellen der Körnerschicht als die Purkinje'schen Zellen bedeutend reducirt in der Zahl und an mehreren Stellen findet man keine einzige Nervenzelle in der Windung. Die Zellen, die man findet, sind nach Grösse und Aussehen normal.

Die Marklamelle ist in den Windungen, wo die Zellen in grösserer Ausdehnung fehlen, bedeutend schmäler als normal.

Auch im kleinen Gehirne finden sich, obwohl in geringerer Menge, die vorher beschriebenen runden Zellelemente.

Epikrise.

Die klinischen Symptome in diesem Falle waren, zusammengefasst, folgende:

Auffassung der Aussenwelt höchst unvollständig oder fast fehlend.

Höhere psychische Funktionen fehlten ganz und gar. Pat. *sprach* nicht.

Gesichtssinn höchst unvollständig. Nur eine oberflächliche Perception.

Gehörssinn relativ gut entwickelt. Empfindlich für Dissonanzen.

Geschmackssinn und *Gefühlssinn* relativ gut entwickelt. Muskelsinn unentwickelt.

Keine *coordinirten Bewegungen* mit Rumpf oder Gliedern. Muskelkraft schwächer als normal. Keine partiellen Paresen. Epileptiforme Anfälle.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** waren zusammengefasst folgende:

Gehirn bedeutend *kleiner* als normal. *Frontal-* und *Occipitallappen* schwach entwickelt im Verhältniss zu den übrigen Lappen.

Die *Insula Reilii* fehlt. Ihre Rinde wird vertreten durch 2 accessorische Windungen an der lateralen Hirnoberfläche.

Centralwindungen undeutlich abgegrenzt. Eine tiefe Furche trennt die Parietallappen von den Occipitallappen.

Corpus callosum rudimentär.

Seitenventrikel erweitert.

Kleines Gehirn sowohl an und für sich als im Verhältniss zum grossen Gehirn bedeutend kleiner als normal.

Am wenigsten entwickelt ist die Rinde in den *Frontallappen.*

In dem ganzen zur medialen und in der obern Hälfte des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles des Gyrus centralis anterior sammt den angrenzenden Theilen der Frontalwindungen sind die Zellen in einer einzigen Schicht *angeordnet.*

In Bezug auf die *Form* gleichen sie unentwickelten Zellen bei einem Foetus von 5 Monaten; in Bezug auf die *Grösse* sind sie grösser als diese, aber kleiner als normal; an *Anzahl* machen sie $^1/_5$ der normalen aus. Was die *Struktur* betrifft, haben sie grössere Kerne und weniger Protoplasma, sowie weniger und feinere Fortsätze als normal.

Zwischen den tiefsten Zellen kommen in geringer Anzahl einzeln stehende grössere Spindelzellen vor, die unentwickelte Riesenzellen darstellen.

Die Rinde in den übrigen Theilen des Lappens, sowie in den accessorischen Windungen, die die Insula vertreten, verhält sich gleich, nur dass sich eine zellenarme Spindelzellenschicht findet, dass grosse Spindelzellen fehlen und dass die am tiefsten gelegenen Pyramidenzellen etwas grösser und mehr pyramidenartig sind. Im vordern Theile des Lappens und an der orbitalen Fläche findet sich eine mehr oder weniger deutliche 4. Schicht.

Im *Lobus parietalis* ist die Rinde etwas mehr entwickelt.

Im *Gyrus centralis posterior* und *parietalis superior* ist die *Anordnung* der Zellen normal. An *Form*, *Grösse*, *Struktur* und *Anzahl* stimmen die meisten mit den unentwickelten Zellen im Frontallappen überein. In der Tiefe der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht finden sich ausserdem grössere und deutlichere Pyramidenzellen.

Die Rinde im *Gyrus parietalis inferior* hat denselben Bau wie die am wenigsten entwickelte Rinde im Frontallappen.

Occipitallappen. Die Rinde der lateralen Fläche, sowie die Rinde im Gyrus occipitalis inferior internus weist denselben Bau auf, wie die Rinde über dem vorderen Theile des Parietallappens, nur dass die Spindelzellenschicht etwas mächtiger ist. Die Rinde der medialen Fläche hat ungefähr eine normale Anzahl kleiner Zellen, deren Grösse etwas geringer als normal ist. Die grösseren Pyramidenzellen in den zellenarmen Zwischenschichten sind an Anzahl und Grösse bedeutend geringer als normal.

Der *Lobus temporalis* ist mehr entwickelt als die übrigen Lappen. Die Rinde hat normale Anordnung und Zusammensetzung der verschiedenen Schichten, aber die tiefsten Zellen der 3. Schicht und sämmtliche Zellen der Ganglienzellenschicht bestehen aus langen, schmalen Spindeln mit grossen Kernen und feinretikulirtem Protoplasma. Ihre Anzahl ist normal.

Lobus falciformis. Der Gyrus hippocampi verhält sich normal, ausgenommen, dass die Anzahl der Zellen geringer ist als normal. Die Rinde im *Gyrus cinguli* verhält sich wie die am wenigsten entwickelte Rinde des Frontallappens, nur dass die Zellen etwas grösser sind.

Ueberall, sowohl in der Rinde, als im Mark, finden sich runde Zellen, die den weissen Blutkörperchen gleichen, am reichlichsten im Frontallappen, am spärlichsten im Temporallappen. Die Stützsubstanz ist im Allgemeinen etwas dichter als normal und die Zahl der Blutgefässe vermehrt, am wenigsten im Lobus temporalis. Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist, ausser im Temporallappen, weniger kräftig als normal, am schwächsten im hintern Theil des Frontallappens.

Kleinhirn. Die Purkinje'schen Zellen und die Kornzellen sind sowohl im Vermis als in den Hemisphären an Zahl geringer als normal.

Diagnose.

Die höchst unvollständige Auffassung der Aussenwelt und das Fehlen psychischer Funktionen berechtigen uns, den Fall zu den schwersten Formen der Idiotie zu rechnen und unter die Abtheilung A. Blödsinnige einzureihen.

Was die *pathologischen Veränderungen* in dem Falle betrifft, so lenkt zuerst die vorhandene sehr bedeutende *Verkleinerung des Gehirns* die Aufmerksamkeit auf sich. Eine solche Verminderung sowohl des Gewichts, wie sämmtlicher Durchmesser hat man Mikrocephalie genannt und eine Gruppe von Idioten aufgestellt, die durch eine derartige Veränderung des Gehirns charakterisirt wird.

Diese Mikrocephalen sind der Gegenstand zahlreicher und ausgedehnter Untersuchungen gewesen, seit Carl Vogt 1868 seine atavistische Hypothese aufgestellt hatte, Virchow seine Hypothese über die vorzeitige Verknöcherung der Schädelnähte, Klebs über den Uteruskrampf während der Schwangerschaft und Stark über encephalitische Processe als ursächliches Moment bei der Mikrocephalie.

Es wäre verlockend, näher auf eine Darstellung der interessanten Untersuchungen und Diskussionen hierüber, die sich in der Literatur finden, einzugehen, aber da schon von früher her recht vollständige Zusammenstellungen vorhanden sind und aus diesen hervorgeht, dass die verschiedensten klinischen Symptome bei dieser Veränderung des Gehirns vorkommen können, fällt eine derartige Zusammenstellung der Literatur nicht in den Rahmen dieser Arbeit.

Eben so wenig wie die Mikrocephalie kann die hier vorhandene relativ stärkere *Verkleinerung* der *Frontal- und Occipitallappen* oder die *Abweichung im Verlauf und in der Begrenzung der Windungen* die klinischen Symptome erklären, da, wie aus den in der Literatur vorhandenen Zusammenstellungen hervorgeht, solche Veränderungen ohne Defekte der Psyche vorgefunden werden können, und auf der andern Seite bedeutende psychische Defekte vorkommen können bei vollkommen normalem Verhalten dieser Lappen und Windungen.

Auch der fast vollständige *Defekt des Corpus callosum* kann die klinischen Symptome nicht erklären, da es sich gezeigt hat, dass dieser Hirntheil vollständig fehlen kann, ohne dass die geringste Störung der Intelligenz sich vorfindet.

Die *Ausdehnung der Seitenventrikel* dürfte, da keine Zeichen von Entzündung nachgewiesen werden konnten, als ein Hydrocephalus e vacuo anzusehen sein und kann als eine bei Mikrocephalie gewöhnliche Veränderung eben so wenig als diese die klinischen Symptome erklären.

Die *Veränderung im kleinen Gehirn* kann ebenfalls nicht die Ursache der psychischen Defekte gewesen sein, da es sich gezeigt hat, dass das kleine Gehirn in hohem Grade atrophisch sein kann, ohne dass sich die mindeste Störung der Intelligenz vorfindet.

Was die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* betrifft, so können diese im Allgemeinen auf eine Entwicklungshemmung der Hirnrinde zurückgeführt werden und die Verschiedenheiten in verschiedenen Rindengebieten sind blos Gradunterschiede desselben Processes. In dem am meisten veränderten Rindengebiete, *motorische Region*, *Gyrus cinguli* und *Gyrus parietalis inferior*, haben die Zellen sich noch nicht in verschiedene

Schichten differenzirt und sie haben die Form der Embryonalzellen. Nur ein Theil der tiefsten Zellen hat angefangen, sich zu differenziren, aber auch diese sind in ihrer Entwickelung stehen geblieben, ehe sie die für die vollständig entwickelte Zelle charakteristische Form und Grösse erlangt haben.

Da nach VIGNAL diese Zellen die ersten sind, die sich differenziren, und da dies zu Anfang des 6. Monats geschieht, müsste also hier dieses Rindengebiet in der 1. Hälfte des 6. Monats in seiner Entwicklung gehemmt worden sein.

Die Zellen sind seitdem gewachsen, ohne indessen eine dem Alter entsprechende Grösse erreicht zu haben.

Schwer zu erklären ist es, dass die Anzahl dieser unentwickelten Zellen so bedeutend hinter der normalen Zellenanzahl zurückbleibt, sofern man nicht anzunehmen hat, dass entweder ein Theil der Zellen hier untergegangen ist, oder dass unter normalen Umständen eine Neubildung von Zellen stattfindet und dass eine solche Neubildung von Zellen hier ausblieb. Um zu entscheiden, welches von beiden der Fall ist, müsste man das Verhältniss zwischen der Zellenanzahl in diesem, in seiner Entwicklung gehemmten Gebiete und normaler Hirnrinde in dem entsprechenden Entwicklungsstadium, oder in diesem Falle im 6. Monate, kennen.

In dem letzteren ist allerdings die Anzahl der Zellen in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ Hirnsubstanz bedeutend grösser, aber im Verhältniss zur Dicke der Rinde ist die Anzahl der Zellen ungefähr dieselbe in beiden Fällen. Die Zellen in diesem veränderten Gebiete dürften deshalb jedenfalls die sämmtlichen Zellen sein, die in der Rinde im 6. Monate vorhanden waren, und diese Zellen sind seitdem, während das Organ wuchs, durch grössere Zwischenräume von einander getrennt worden, dabei nahmen sie zugleich an Grösse zu, behielten aber ihre embryonale Form und Struktur (grosser Kern, feinkörniges Protoplasma).

Wenn eine Atrophie der Zellen stattgefunden hätte, wären wahrscheinlich Zellreste übrig geblieben.

Das übrige Rindengebiet hat eine etwas höhere Entwicklung erreicht. So findet sich in den übrigen Theilen des *Frontal-* und *Parietallappens* eine Spindelzellenschicht, weshalb die Rinde hier auf einer Entwicklungsstufe stehen geblieben sein dürfte, die dem 8. Fötalmonat unter normalen Verhältnissen entspricht.

In einem noch höheren Stadium dürfte die Rinde im *Occipitallappen* stehen und noch mehr entwickelt ist die Rinde des *Temporallappens*, die sich normal verhält, ausgenommen dass die Zellenanzahl geringer

als normal ist und dass die grossen Pyramiden nicht eine dem Alter entsprechende Form erreicht haben.

Fast vollständig normal ist der *Gyrus hippocampi*, aber auch hier ist die Anzahl der Zellen geringer als normal (ausgebliebene Neubildung von Zellen?).

Dass die Stützsubstanz dichter und die Zahl der Gefässe vermehrt ist in dem in der Entwicklung zurückgebliebenen Gebiete, dürfte einzig und allein als ein compensirendes Moment zu betrachten sein und nicht als Ausdruck für einen inflammatorischen Process, da sich keine Veränderungen in den Gefässwänden oder in ihrer Umgebung fanden.

Was die runden Zellelemente zu bedeuten haben könnten, die sich spärlich in der Rinde und im Mark fanden und bei allen Formen von Idiotie gefunden worden sind, muss dahingestellt bleiben.

Dass die Associationsfaserschicht in der 1. Schicht schwächer als normal ist und am schwächsten in den am meisten veränderten Rindengebieten, muss mit der Verminderung der Zellelemente der Rinde in Zusammenhang gebracht werden.

Wir haben also gefunden, dass die Rinde sich in verschiedenen Entwicklungsstadien befindet, die sich sehr genau auf die Stadien in der normalen Entwicklung der Hirnrinde zurückführen lassen. Das am wenigsten entwickelte Gebiet entspricht einer Entwicklungsstufe, die sich beim normalen Fötus im *6. Monate* findet, die eines andern Gebietes findet sich wieder im *8.* und die eines 3. im *9. Fötalmonate* oder bei dem *Neugebornen.* Blos ein Gebiet (Gyrus hippocampi) hat eine dem Alter entsprechende Entwicklung erreicht, obwohl auch hier die Anzahl der Zellen geringer als normal ist.

Bis zum *6. Monate* dürfte also die Entwicklung normal vor sich gegangen sein, aber von dieser Zeit an ist irgend ein Moment hinzugekommen, das die Entwicklung der Rinde in einem Gebiete vollständig aufzuhören gezwungen hat, oder sie in einem andern Gebiete eine Zeit lang fortschreiten liess, um sie bald auch hier zum Stillstand zu bringen. (Auch das Corpus callosum steht auf einem Entwicklungsgrade, der den normalen Verhältnissen im 6. Monate entspricht). Was dieses Moment gewesen sein kann, ist unmöglich festzustellen.

Stellen wir nun die verschiedenen *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologisch-anatomischen Veränderungen* in diesem Falle zusammen, so erklären sich die *Störungen der Motilität und der Sprache* genau durch die mangelnde Entwicklung *der Centra* für *Bewegungen* und *Sprache.*

Man könnte vielleicht die Störungen der Coordination mit der Verminderung der Nervenelemente im Vermis in Zusammenhang bringen wollen, aber nur nach Störungen in den Nervenzellen des Vermis, die eintreffen, wenn das Organ funktionirt hat, treten Coordinationsstörungen auf. In diesem Falle ist der Vermis in einem Entwicklungsstadium stehen geblieben, das sich in der 2. Hälfte des Embryonallebens wiederfindet.

Die Störungen des *Gesichtssinnes* (es fand sich kaum mehr als die Perception) dürften dadurch erklärt werden, dass sich die Rinde des Occipitallappens in einem Entwicklungsstadium befand, das bei Normalen dem Anfange des ersten Lebensjahres entspricht.

Dass das *Gehör* relativ gut entwickelt war, steht gut in Uebereinstimmung mit dem Entwicklungsgrade des Temporallappens, der der Norm in der ersten Hälfte des ersten Lebensjahres entspricht.

Was den *Geschmackssinn* betrifft (Perception fand sich), ist zu bemerken, dass die Rinde im Gyrus lingualis sich in einem Stadium befand, das den letzten Fötalmonaten entspricht.

In Bezug auf das *Gefühl* (Perception fand sich von Seiten aller Gefühlssinne mit Ausnahme des Muskelsinnes) betrifft, ist zu bemerken, dass die Rinde im obern und vordern Theile des Parietallappens sich in einem Stadium der Entwicklung befand, das einer normalen Rinde wenigstens im 8. Fötalmonate entspricht, während der untere Theil desselben (Gyrus parietalis inferior) der Norm im 6. Monate entspricht.

Das *Fehlen höherer psychischer Funktionen* dürfte wohl dadurch zu erklären sein, dass sich der grösste Theil der Hirnrinde in einem Entwicklungsstadium befand, das bei Normalen zwischen dem *6. Fötalmonat und dem Anfang des 1. Lebensjahres* liegt.

Fall 2.

Emma Nybom, 14 Jahre alt, gestorben am 28. Februar 1889 am Pneumonia acuta. Aufgenommen im »Eugeniahemmet» am 30. Juni 1887.

Krankengeschichte.

In Bezug auf Heredität ist nichts bekannt.

Pat. ist keinem Trauma ausgesetzt gewesen und hat keine Kinderkrankheiten durchgemacht.

Die ersten Zeichen der Idiotie wurden ganz zeitig bemerkt, weil sie die Aufmerksamkeit nicht auf das richtete, was um sie herum vor sich

ging. Sie lernte nicht gehen oder sitzen, lernte nicht nach Gegenständen greifen, die ihr vorgehalten wurden.

Ein von Dr. Björkman am 11. Dec. 1886 ausgestelltes Attest hat folgenden Wortlaut.

»Hirnschale abnorm klein, Blick umherirrend, Gesichtsausdruck blödsinnig, grimassirend, keine artikulirte Sprache. Die Glieder gewöhnlich gebeugt; Unvermögen zu gehen und ohne Stütze zu sitzen, Unvermögen Harn und Faeces zu halten. Mitunter Anfälle von klonischem Krampf in Beinen und Gesicht».

Bei der Ankunft in der Anstalt wurde folgender Zustand gefunden:

Pat., die eine für ihr Alter normale Körperlänge hat, ist bettlägerig und kann nicht im Mindesten sich selbst helfen.

Sie hat keinen *Begriff* von dem, was in ihrer Umgebung vor sich geht. Sie reagirt im Allgemeinen höchst unvollständig auf Eindrücke auf die verschiedenen Sinne.

Die *Stimmung* ist im Allgemeinen unruhig, Pat. schreit oft und, wie es scheint, unmotivirt.

Urtheil, *Gedankenthätigkeit* und *Gedächtniss* fehlen ganz.

Pat. kennt weder Laute, Gegenstände, noch Personen wieder, versteht nicht, was man zu ihr spricht.

Spricht nicht und macht keinen Versuch dazu. Giebt durch Schreien zu erkennen, wenn sie hungrig ist oder schlecht liegt.

Cranialnerven. I. In Bezug auf den Geruch ist nichts bekannt.

II. *Sehvermögen* fehlt nicht. Pat. richtet den Blick auf Gegenstände, die ihr vorgehalten werden, auch bisweilen auf Personen, die durch das Zimmer gehen.

III, IV, VI. *Bewegungen* der Pupillen und Augen normal.

V. *Gefühl* im Gesicht fehlt nicht.

VII. Keine Parese. S. a. unter Zuckungen!

VIII. *Gehör* relativ lebhaft.

IX. In Bezug auf den *Geschmack* ist nichts bekannt. Pat. isst alle Nahrung, die ihr gegeben wird.

X, XI, XII. Nichts Abnormes kann nachgewiesen werden.

Die **Sensibilität** scheint überall normal zu sein.

Motilität. Parese in den obern, Paralyse in den untern Extremitäten. Die Arme werden gewöhnlich über der Brust gebeugt gehalten,

die Beine gegen den Bauch in die Höhe gezogen; Pat. macht jedoch Versuche, sie auszustrecken, sie kann nicht aufrecht sitzen und die Stellung im Bett nicht verändern.

Reflexe im Allgemeinen lebhaft. Harn und Faeces gehen unfreiwillig ab.

Keine ausgeprägten *Contrakturen.*

Bisweilen treten *Zuckungen* im Gesicht und in den Fingern auf.

Anfälle von klonischem Krampf kommen gewöhnlich mehrere Male an einem Tage vor; bisweilen konnte Pat. mehrere Tage und Wochen frei von Anfällen sein. Den Anfällen ging kein Schrei vorher, sie dauerten einige Minuten und darauf folgte Schlaf.

Während des Aufenthalts in der Anstalt blieb der Zustand unverändert.

Sektion.

Harte Hirnhaut an den Nähten festgelöthet, so dass das Gehirn nicht herausgenommen werden konnte, ohne diese Haut ringsum abzuschneiden. Viel Flüssigkeit floss aus den Ventrikeln, besonders aus dem rechten, dessen Dach dabei einsank. Schädel klein, rundlich, kurz, niedrig, etwas unregelmässig, unsymmetrisch. Die Nähte offen, auch die Frontalnaht. Schädeldach an der Innenfläche nicht knollig.

Das *Gehirn wiegt gehärtet* 442 g, die rechte Hemisphäre 138 g, die linke 218, das kleine Gehirn mit Pons und Medulla oblongata 86 Gramm.

Die Länge der rechten Hemisphäre beträgt 11,5 cm, die der linken 12 cm.

Makroskopische Untersuchung der rechten Hemisphäre.

Die rechte Hemisphäre ist kleiner und leichter als die linke.

Lobus frontalis. Dieser Lappen wird nach hinten von einer deutlichen Fissura centralis begrenzt, die durch eine starke Windung von der Margo falcata getrennt ist.

Der *Gyrus centralis anterior* ist kräftig und relativ gut entwickelt. Der zur medialen Hirnoberfläche gehörende Theil der Windung ist undeutlich abgegrenzt vom Gyrus cinguli, da nämlich die Fissura callosomarginalis an dieser Stelle blos durch eine unregelmässige Einsenkung angedeutet ist. Er geht nach vorn in den Gyrus frontalis superior über.

Nach unten wird der Gyrus centralis anterior von einer accessorischen Windung fortgesetzt, die nach hinten in eine andere gleiche

Windung übergeht, welche letztere nach oben in den Gyrus centralis posterior und den Gyrus parietalis inferior übergeht.

Diese beiden accessorischen Windungen ersetzen hier die Insula, die auf keine andere Weise angedeutet ist. Dieses Rindengebiet grenzt nach vorn an den Gyrus frontalis inferior, nach oben geht es in den Gyrus centralis anterior über, nach oben und hinten in den Gyrus centralis posterior und den Gyrus parietalis inferior, nach unten wird es vom hintern Schenkel der Fissura Sylvii begrenzt.

Der *Gyrus frontalis superior* ist relativ kräftig entwickelt und aus mehreren kleinen Windungen zusammengesetzt. Seine Begrenzung gegen den Gyrus cinguli ist undeutlich und blos angedeutet durch eine ungleiche Einsenkung.

Der *Gyrus frontalis medius* ist blos in seinem hintern Theile gut begrenzt; nach vorn zu wird er durch einige horizontal verlaufende Windungen repräsentirt, die zwischen dem Gyrus frontalis superior und inferior liegen. Sein orbitaler Theil ist wohl markirt.

Der *Gyrus frontalis inferior* ist gut begrenzt.

Die Windungen an der Orbitalfläche des Frontallappens entspringen aus der Gegend der Substantia perforata antica und verlaufen radiär: der Gyrus olfactorius nach vorn, die Orbitalwindungen des Gyrus frontalis medius und inferior nach vorn und aussen, die vordere accessorische Windung gerade nach aussen und die hintere nach aussen und hinten.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* ist relativ gut entwickelt und begrenzt. Sein Uebergang in die hintere accessorische Windung ist oben erwähnt.

Der *Gyrus parietalis superior* ist an der medialen Hirnoberfläche nicht abgegrenzt vom Gyrus cinguli, sowie, da die Fissura occipitalis interna nicht bis an die Margo falcata hinauf reicht, in ziemlich grosser Ausdehnung zusammenhängend mit dem Gyrus occipitalis superior. Die Rinde ist nicht gefaltet, sondern bildet eine von einigen undeutlichen Einsenkungen markirte, verhältnissmässig glatte Fläche.

Der *Gyrus parietalis inferior anterior* ist um einen Zweig des hintern Schenkels der Fissura Sylvii gewunden.

Der *Lobus occipitalis* nimmt nur einen unbedeutenden Theil der lateralen Hirnoberfläche ein und wird hier repräsentirt durch eine mit dem Gyrus parietalis superior direkt zusammenhängende Windung, die am untern Rande der Hemisphäre sich überschwingt in den Gyrus occipitalis inferior externus und internus, die deutlich von einander getrennt sind.

Die *Fissura calcarina* gehört der untern Hirnoberfläche an. Der zwischen dieser und der Fissura occipitalis interna liegende Theil des Gyrus occipitalis superior (*Cuneus*) ist relativ kräftig entwickelt und, wie erwähnt, nach vorn und oben nicht abgegrenzt vom Gyrus parietalis superior.

Der **Lobus temporalis** ist im Verhältniss zu den Frontal- und Parietallappen schwach entwickelt, insbesondere sein vorderer Theil, weshalb die Substantia perforata antica in grösserer Ausdehnung als normal blosliegt.

Lobus falciformis. Der *Gyrus hippocampi* hängt nicht mit dem Gyrus cinguli zusammen, sondern geht nach hinten direkt in den Gyrus occipitalis inferior internus über.

Der *Gyrus cinguli* ist, wie erwähnt, undeutlich getrennt vom Gyrus frontalis superior, centralis anterior und parietalis superior. Nach hinten geht die nicht gefaltete Rindenfläche, die diese Windung im Boden der seichten Fissura occipitalis interna vertritt, in den Gyrus occipitalis superior (Lob. cuneus) über, der mit seiner obern Spitze zwischen diese Windung und den Gyrus hippocampi sich einschiebt.

Nach unten wird die Windung von einem seichten Sulcus vom Corpus callosum abgegrenzt.

Am weitesten nach hinten, wo das Corpus callosum fehlt, hängt die Windung mit dem hintern Ende der Fascia dentata Tarini zusammen, die in einer Ausdehnung von 1,5 cm blosliegt zwischen Cuneus, Gyrus cinguli und Gyrus hippocampi.

Der **Lobus centralis** ist durch 2 der lateralen Hirnoberfläche angehörige accessorische Windungen ersetzt, die oben bei dem Lobus frontalis beschrieben sind.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich wie die rechte, mit der Ausnahme, dass die Fissura occipitalis interna hier ganz fehlt, weshalb der Gyrus parietalis superior und der Gyrus cinguli ohne Grenze in den Gyrus occipitalis superior übergehen. Die Fissura calcarina ist blos angedeutet durch eine undeutliche Einsenkung. Die mediale Oberfläche des Occipitallappens bildet eine faltenlose, von seichten Einsenkungen schwach markirte Fläche.

Das **Corpus callosum**, dessen hinteres Fünftel fehlt, wird durch eine ungefähr 1 mm dicke Membran gebildet, die nach hinten mit einem dünnen, concaven Rande 12 mm vor der Stelle abschliesst, wo der Fornix in die Fimbria sich umbiegt.

Der *Fornix*, der aus einem paarigen, blos in der vordern Hälfte des Corpus fornicis mit beiden Hälften zusammenhängenden Gebilde besteht, ist überall durch das Septum pellucidum von der untern Fläche des Corpus callosum getrennt.

Die *Commissura anterior* fehlt dicht hinter den Columnae fornicis, aber neben der Commissura mollis befindet sich eine kleine, aus horizontal verlaufenden Fasern bestehende Commissur.

Die *Ventrikel* sind stark ausgedehnt, besonders an der rechten Seite, und die Hemisphärenwand selbst hat nur 5—10 mm Dicke.

Centralganglien und **Kleinhirn** bieten makroskopisch nichts Abnormes dar.

Der **Pons** ist unsymmetrisch, indem die rechte Hälfte kleiner ist als die linke.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Die 1. Schicht, die $0{,}_{20}$ mm an Dicke misst, verhält sich normal.

Darauf folgt eine 2 mm dicke Schicht, bestehend aus gleich grossen Zellen, die $6-8\,\mu \times 10-12\,\mu$ messen, rundliche, birnenähnliche Form haben, grosse Kerne und wenige feine Fortsätze. Sie kommen in einer Anzahl von 5 in $[0{,}_1\ \text{mm}]^3$ vor. In der tiefsten Hälfte der Schicht kommen sehr spärlich, zum Theil etwas grössere Zellen ($8-10\,\mu \times 20\,\mu$) mit deutlicher Spindelform vor.

Der *Gyrus frontalis superior* verhält sich in dem zur lateralen und medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile wie der vorhergehende Gyrus, mit der Ausnahme, dass, je mehr man sich der Spitze des Frontallappens nähert, desto mehr grössere ($10-12\,\mu \times 12-14\,\mu$) Zellen in den tieferen Theilen der Zellenschicht sich finden. Die Zellen haben entweder Spindelform oder Pyramidenform und an den Seitenflächen finden sich mehr solche Zellen als in der Kuppe der Windung.

Im orbitalen Theile der Windung findet sich eine deutliche Spindelzellenschicht, bestehend aus Spindelzellen, die $5\,\mu \times 20\,\mu$ messen und in einer Menge von 10 in $[0{,}_1\ \text{mm}]^3$ vorkommen. Ueber dieser Schicht

finden sich in einfacher oder doppelter Reihe grosse Spindelzellen, die $8 - 10\,\mu \times 30\,\mu$ messen. Von diesen Zellen aus bestehen mehrere Uebergangsformen bis zu grossen Pyramidenzellen. Zwischen den übrigen Zellen, die dieselbe Form und Grösse haben wie diejenigen im Gyrus centralis anterior, finden sich auch vereinzelte grössere ($12\,\mu \times 12 - 14\,\mu$) Zellen mit Spindel- oder Pyramidenform und gröberen Fortsätzen als die übrigen. Diese grösseren Zellen kommen in einer Anzahl von 2 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor, während die andern, weniger entwickelten sich in einer Anzahl von 8 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ finden.

Der *Gyrus frontalis medius* verhält sich wie der orbitale Theil der vorhergehenden Windung, aber hier finden sich mehr grössere Zellen mit deutlicher Pyramidenform zwischen den kleinen unentwickelten Zellen. Diese grösseren Pyramidenzellen, die bedeutend kleiner als normal sind, kommen in einer Anzahl von 3 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Sie sind gleich gering an Zahl in allen Theilen der Schicht.

Der *Gyrus frontalis inferior* verhält sich in der hintern Hälfte des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles wie der Gyrus centralis anterior, in den übrigen Theilen wie der orbitale Theil des Gyrus frontalis superior.

Zahlreich im Mark und vereinzelt in der Rinde kommen runde Zellelemente vor, ähnlich weissen Blutkörperchen, aber geringer an Grösse und stärker lichtbrechend als diese. Sie sind nicht besonders längs der Gefässe angeordnet. Die Stützsubstanz erscheint möglicherweise etwas dichter als normal. Anzahl der Gefässe etwas grösser als normal.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist schwächer als normal in den am wenigsten entwickelten Gebieten.

Lobus parietalis. *Gyrus centralis posterior.* Die Zellen sind in 2 Schichten angeordnet, einer oberflächlicheren, die aus $10\,\mu \times 12 - 15\,\mu$ grossen Zellen besteht, die der Form nach den embryonalen Zellen gleichen, und einer tieferen Spindelzellenschicht. An der Grenze zwischen diesen beiden Schichten finden sich vereinzelt grössere, $12 - 14\,\mu \times 15 - 18\,\mu$ grosse Zellen von deutlich pyramidaler Form.

Im *Gyrus parietalis superior* und *inferior* findet sich blos eine einzige Zellenschicht, die 2 mm dick ist und aus gleichgrossen Zellen von embryonaler Form und Struktur zusammengesetzt ist. Die Anzahl derselben beträgt ungefähr 5 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. Runde Zellelemente, etwas kleiner als weisse Blutkörperchen, kommen im Mark und, obwohl spärlich, auch in der Rinde vor.

Die Zahl der Gefässe ist vermehrt, besonders im hintern Theile des Lappens.

Die Fasern der Associationsfaserschicht der 1. Schicht sind deutlich geringer an Zahl.

Lobus occipitalis. Die Rinde in dem zur *lateralen Hirnfläche* gehörenden Theile der Windung hat denselben Bau wie die im Gyrus centralis posterior.

Die Rinde *der medialen Fläche* ist zusammengesetzt aus einer Schicht kleiner Zellen von ungefähr normaler Grösse, die aber in geringerer Anzahl als normal vorkommen.

Zwischen diesen Zellen kommen vereinzelte Pyramidenzellen ($14\,\mu \times 20\,\mu$) vor. Sie sind nicht in eine besondere Schicht geordnet, sondern kommen zerstreut zwischen den kleinern Pyramidenzellen vor.

Runde Zellelemente, denen gleichend, die in den übrigen Lappen vorkommen, finden sich reichlich im Mark, spärlich in der Rinde. Die Stützsubstanz erscheint dichter als normal. Die Zahl der Gefässe ist vermehrt.

Die Associationsfasern der ersten Schicht sind an Zahl geringer als normal.

Lobus temporalis. *Gyrus temporalis superior.* Die Zellen sind hier in 2 Schichten geordnet, eine oberflächliche, bestehend aus unentwickelten Zellen, die $10\,\mu \times 14\,\mu$ messen und in einer Anzahl von 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vorkommen, und eine tiefere, aus Spindelzellen bestehende Schicht.

An der Grenze zwischen diesen kommen vereinzelte grössere Pyramidenzellen vor und Uebergangsformen zwischen solchen und Spindelzellen. Sie messen bis 14 μ in der Breite.

In der vordern Hälfte der Windung sind diese grossen Zellen zahlreich und in 2 Reihen geordnet, die der tieferen Hälfte der 3. Schicht und der Ganglienzellenschicht entsprechen. Sie sind in der hintern Hälfte der Schicht an Zahl gering wie auch sämmtliche übrigen Zellen.

Die Rinde in den *übrigen Temporalwindungen* hat dieselbe Zusammensetzung wie im hintern Theile der vorhergehenden Windung. Spärliche runde Zellelemente im Mark und blos ganz vereinzelte in der Rinde.

Die Stützsubstanz erscheint etwas dichter als normal. Die Anzahl der Gefässe ist vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der 1. Schicht ist schwächer als normal.

Lobus falciformis. Der *Gyrus hippocampi* zeigt keine anderen Abweichungen vom Normalen, als dass die Zellen an Zahl und Grösse geringer sind als normal.

Die Rinde im *Gyrus cinguli* ist aus 2 Schichten gebildet, einer oberflächlichen aus an Zahl geringen, unentwickelten Zellen und einer tieferen aus Spindelzellen bestehenden Schicht.

Wenige runde Zellelemente in Mark und Rinde. Die Stützsubstanz ist dichter als normal und die Zahl der Gefässe vermehrt.

Die Associationsfasern der 1. Schicht sind an Zahl geringer als normal.

Lobus centralis. Die accessorischen Windungen, die die Insularinde vertreten, haben denselben Bau wie der orbitale Theil des Gyrus frontalis superior.

Die **centralen Ganglien** zeigen mikroskopisch nichts Abnormes.

Der **Pons** ist unsymmetrisch, indem sämmtliche Bahnen in der rechten Hälfte kleiner sind, als auf der linken Seite.

Kleines Gehirn. Sowohl im Vermis als in den Hemisphären sind die Purkinje'schen Zellen und die Zellen der Körnerschicht an Anzahl geringer als normal.

Anzahl der Gefässe vermehrt.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** in diesem Falle sind zusammengefasst folgende:

Auffassung höchst unvollständig oder gar nicht vorhanden.

Höhere psychische Funktionen fehlen ganz. Pat. kann nicht sprechen.

Sehvermögen unvollständig (nur gröbere Perception).

Hörvermögen etwas lebhafter, aber auch hier nur gröbere Perception.

Parese in obern Extremitäten und Rumpf; *Paralyse* in den untern. Keine coordinirten Bewegungen mit Rumpf oder Gliedern.

Reflexe lebhaft.

Isolirte *Zuckungen* in Gesicht und Fingern.

Epileptiforme Anfälle.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** sind folgende:

Die *Schädelsuturen* nicht geschlossen.

Das *Gewicht* und *sämmtliche Maasse des Gehirns* bedeutend unter der Norm.

Linke Hemisphäre grösser als rechte.

Temporallappen makroskopisch von sämmtlichen Lappen am schwächsten entwickelt.

Die Rinde an der lateralen Oberfläche des Gehirns ist reichlich, die an der medialen wenig gefaltet. Am wenigsten gefaltet ist sie am Gyrus cinguli und an der medialen Fläche des Occipitallappens.

Zwei *accessorische Windungen* an der lateralen Fläche des Gehirns vertreten die Rinde in der Insula, die sonst vollständig fehlt.

Corpus callosum membranartig. Sein hinteres Fünftel fehlt.

Die *Commissura anterior* fehlt an der normalen Stelle und ist durch eine neben der Commissura mollis liegende accessorische Commissur ersetzt.

Rechte Ponshälfte kleiner als linke.

Die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* waren folgende:

Am wenigsten entwickelt ist die Rinde im *Gyrus centralis anterior*, in der hintern Hälfte des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles des *Gyrus frontalis inferior* und im *Gyrus parietalis superior* und *inferior*, wo die Zellen in einer einzigen Schicht angeordnet sind. An *Form* und *Struktur* gleichen sie embryonalen Zellen, an *Grösse* übertreffen sie diese bedeutend, aber sie sind kleiner als bei normalen Individuen desselben Alters. Sie kommen in einer bedeutend geringeren Anzahl vor als bei gleichaltrigen normalen Individuen.

Etwas mehr entwickelt ist die Rinde in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile *des Gyrus frontalis superior*, wo die tieferen Zellen in der Schicht anfangen an Grösse zuzunehmen und Pyramidenform angenommen haben.

In einem höheren Stadium steht die Rinde im *orbitalen Theile* des *Gyrus frontalis superior*, im ganzen *Gyrus frontalis medius*, in den übrigen Theilen des *G. frontalis inferior*, *centralis posterior*, dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus occipitalis superior*, in den *Windungen* des *Temporallappens*, sowie im *Gyrus cinguli*, wo eine Spindelzellenschicht hinzugekommen ist.

In einem noch höheren Stadium der Entwickelung steht die Rinde in dem zur *medialen Hirnoberfläche* gehörenden Theile des *Occipitallappens*, wo die kleinen Zellen normale Grösse und Form haben, wo aber die grösseren Pyramidenzellen kleiner als normal und nicht in deutlich

ausgeprägten Schichten angeordnet sind. Sämmtliche Zellen sind auch an Anzahl geringer als normal.

Am meisten entwickelt ist die Rinde im *Gyrus hippocampi*, wo nur die Zellen etwas geringer an Grösse und Anzahl sind als normal.

Im *Kleinhirn* sind die Purkinje'schen Zellen und die Kornzellen geringer an Zahl.

Diagnose.

Die höchst unvollständige Auffassungskraft mit dem Fehlen aller psychischen Funktionen berechtigen uns, diesen Fall in die Gruppe A. Blödsinnige zu setzen.

Was die *pathologisch-anatomischen Veränderungen* in dem Falle betrifft, so können aus denselben Gründen wie im vorhergehenden Falle die *klinischen Symptome* nicht erklärt werden durch die hier vorhandene *Mikrocephalie*, die *Ungleichheit* in dem gegenseitigen Verhalten der *Hirnhälften*, der *Hirnlappen* und *der Windungen* oder die *unvollständige Entwicklung* des *Corpus callosum*.

Die *Verkleinerung* der *rechten Ponshälfte* ist ein Ausdruck für die Verminderung der weissen Substanz in der rechten Hirnhälfte.

Was die runden Zellelemente, die Gefässvermehrung und die Verminderung der Associationsfaserschicht betrifft, haben diese Momente dieselbe Bedeutung wie im vorhergehenden Falle.

Was die *feineren Veränderungen* in der *Hirnrinde* betrifft, so können sie auch in diesem Falle auf eine Entwicklungshemmung der Hirnrinde zurückgeführt werden.

Das am wenigsten entwickelte Gebiet (mit einer Zellenschicht, deren tiefste Zellen sich zu differenziren beginnen) entspricht einem Entwicklungsstadium, wie es sich zu Anfang des 6. Fötalmonats findet.

Das zunächst höhere (mehrere der tieferen Zellen haben deutliche Pyramidenform) entspricht einem Stadium, wie es im letzten Theile des 6. Monats angetroffen wird.

Das demnächst höhere (eine Spindelzellenschicht ist hinzugekommen) entspricht einem Stadium im 8. Monat.

Ein anderes Gebiet schliesslich entspricht einem Stadium, das im letzten Theile des Fötallebens angetroffen wird.

Ein Gebiet, der Gyrus hippocampi, hat in Bezug auf Anordnung und Form der Zellen eine dem Alter entsprechende Entwicklung erlangt, aber Anzahl und Grösse der Zellen sind bedeutend unter den normalen Verhältnissen.

Auch in diesem Falle dürfte also bis zum Anfange des 6. Fötalmonats die Entwicklung der Hirnrinde normal vor sich gegangen sein, aber zu dieser Zeit trat ein Moment ein, das die weitere Entwicklung der Rinde entweder vollständig oder theilweise unmöglich machte. Das Corpus callosum ist in diesem Falle in einem späteren Stadium in seiner Entwicklung gehemmt worden, als im vorhergehenden Falle.

Halten wir nun die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologisch-anatomischen Veränderungen* in dem Falle zusammen, so können auch hier die Störungen der *Sinnesorgane*, der *Motilität* und der *Sprache* durch die *unvollständige Entwicklung der betreffenden Rindencentra* vollständig erklärt werden.

Das *vollständige Fehlen höherer psychischer Funktionen* erklärt sich genügend dadurch, dass der grösste Theil der Hirnrinde nicht mehr entwickelt ist, als die normale Hirnrinde im *letzten Theile des Embryonallebens* (und dass das kleine Gebiet (*Gyrus hippocampi*), das eine höhere Entwicklung erreicht hat, nicht den dritten Theil der Anzahl von Nervenzellen hat, wie ein entsprechendes normales Rindengebiet).

Fall 3.

Lovisa Nilsson, 10 Jahre alt, gestorben am 18. Jan. 1889 an allgemeiner Entkräftung.

Krankengeschichte.

Von Nerven- oder Geisteskrankheiten in der Verwandtschaft der Pat. ist nichts bekannt.

Pat. überstand im Alter von 1 Jahre Scarlatina.

Die ersten Symptome der Krankheit wurden während des 1. Lebensjahres bemerkt und bestanden darin, das Pat. nicht die Aufmerksamkeit auf das richtete, was um sie herum vor sich ging, und dass sie nicht sah. Sie nährte sich schlecht, hatte eine dürftige und schwächliche Körperconstitution, lernte nicht essen und hielt sich unreinlich.

Bei der Aufnahme in der Anstalt war ihr Zustand folgender:

Pat., die von normaler Körperlänge und schwächlichem Körperbau ist, sitzt den ganzen Tag still auf einem Stuhle.

Aeusserst unvollständige *Auffassung* dessen, was um sie herum sich zuträgt.

Gemüthsstimmung gleichmässig, *Gedächtniss* und *Gedankenthätigkeit* fehlen.

Sie erkennt weder Personen, noch Gegenstände, versteht nicht, was gesprochen wird, und kann nicht ein Wort sagen. Giebt durch Schreien Unbehagen zu erkennen.

Cranialnerven. I. Ueber den *Geruch* ist nichts bekannt.

II. Pat. ist vollständig *blind*. Die Bulbi sind klein und unentwickelt.

III, IV, VI. Keine *Augenbewegungen*.

V, VII. *Gefühl* und *Beweglichkeit* im Gesicht fehlen nicht.

VIII. *Hörvermögen* fehlt nicht.

IX. *Geschmack* fehlt nicht.

X, XI, XII. Nichts Abweichendes.

Sensibilität normal.

Motilität. Bewegungen träg. Paresen oder Coordinationsstörungen finden sich nicht, aber Pat. ermüdet leicht beim Gehen und bei Bewegungen mit den Händen. Sie führt spontan keine Bewegungen aus.

Keine *Zuckungen*.

Keine *trophischen* oder *vasomotorischen* Störungen.

Sektion.

An der *Hirnschale* und an der *harten Hirnhaut* ist nichts Bemerkenswerthes.

Das *Gehirn*, in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet, wiegt 1114 g, die rechte Hemisphäre 492, die linke 481, Pons und Medulla oblongata mit dem Kleinhirn 141.

Die Hemisphären messen in der Länge 15 cm.

Makroskopische Untersuchung der rechten Hemisphäre.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* ist etwas schwächer als die *übrigen Frontalwindungen*, die alle kräftig und von normaler Begrenzung sind.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* hat ungefähr dieselbe Grösse wie die vordere Centralwindung. Die *übrigen Parietalwindungen* kräftig und normal entwickelt.

Der **Lobus occipitalis** ist bedeutend schwächer als die übrigen Lappen, die Windungen sind klein und oft durch kleine Sulci unterbrochen.

Lobus temporalis gut entwickelt mit normal verlaufenden Windungen.

Lobus falciformis. Der *Gyrus cinguli* ist blos in seinem vorderen Theile gut begrenzt. Die Grenze gegen den Gyrus parietalis superior ist nur angedeutet durch einige undeutliche Einsenkungen.

Der **Lobus centralis** ist gut entwickelt.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich wie die rechte, mit der Ausnahme, dass der Gyrus cinguli hier deutlicher begrenzt ist.

Corpus callosum, *Fornix* und *Commissura anterior* normal.

Ventrikel nicht ausgedehnt.

Nervi optici und *Tractus* sehr dünn. *Corpora geniculata externa* klein. Im Uebrigen zeigen die **centralen Ganglien, Pons, Medulla oblongata** und **Kleinhirn** nichts Abnormes.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Die Rinde, die 2 mm an Dicke misst, zeigt überall eine normale Anordnung der verschiedenen Schichten. Die Zellen, die eine etwas geringere Grösse als die normale haben, kommen in geringerer Zahl als normal vor, ungefähr 8 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ [1]). Gruppen von Riesenzellen kommen an normalen Stellen vor und, wie es scheint, in ungefähr normaler Anzahl.

Im *Gyrus frontalis superior* und *medius* ist die Anordnung der verschiedenen Schichten normal. Die Zellen sind klein und haben eine mehr abgerundete Form und feinere Fortsätze als gewöhnlich. Sie messen in der Pyramidenzellenschicht $8\,\mu \times 10 - 15\,\mu$ und kommen in geringerer Anzahl als normal vor, ungefähr 6 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$.

In den tieferen Theilen der 3. Schicht und der Ganglienzellenschicht finden sich grössere Zellen, die $14 - 16\,\mu \times 20 - 25\,\mu$ messen und in einer Anzahl von ungefähr 5 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ vorkommen.

Im *grösseren Theile* des *Gyrus frontalis inferior* sind die Zellen in 2 Schichten angeordnet, einer aus kleinen unentwickelten Zellen bestehenden oberflächlicheren und einer tieferen Spindelzellenschicht. Die grösseren Zellen zwischen diesen beiden Schichten sind sehr gering an Zahl.

---

1) Hier ist zu beachten, dass das Präparat in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet war, weshalb die Bestimmung der Anzahl nicht vollständig vergleichbar ist mit den Bestimmungen der normalen Verhältnisse.

Im *hintern Theile* des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theils der Windung sind die Zellen in einer einzigen Schicht angeordnet und haben die Form und die Struktur unentwickelter Zellen. Sie sind geringer an Zahl und Grösse als normal.

Kleine runde Zellen, weissen Blutkörperchen ähnlich, aber kleiner als diese und stärker lichtbrechend, finden sich im ganzen Lappen, sowohl in der Rinde, als im Mark. Die Anzahl der Gefässe in der Rinde ist überall vermehrt. Die Stützsubstanz erscheint dichter als normal.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist im ganzen Lappen, besonders in dessen vorderem Theil, schwächer als normal.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* ist, ausser in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile, der dem Gyrus centralis anterior gleicht, aus kleinen, unentwickelten Zellen zusammengesetzt, die $8 - 10\,\mu \times 10 - 18\,\mu$ messen und etwas reichlicher als im Frontallappen vorkommen, ungefähr 12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$. Blos einzelne grössere Pyramidenzellen ($12 - 14\,\mu \times 20\,\mu$) im tiefsten Theile der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht.

Der *Gyrus parietalis superior* und *inferior* sind charakterisirt durch kleine ($8 - 10\,\mu \times 10 - 14\,\mu$) unentwickelte Zellen in einer Anzahl von 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$, die eine 1,5 mm breite Schicht bilden. Blos vereinzelte grössere Zellen ($14\,\mu \times 20\,\mu$) kommen in der tieferen Hälfte der Schicht vor. Die Spindelzellenschicht ist schwach, 0,30 mm dick. Die Zellen messen $8\,\mu \times 20\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 12 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Ueberall im Lappen, sowohl im Mark als in der Rinde, kommen Zellelemente vor, die weissen Blutkörperchen gleichen.

Die Anzahl der Gefässe ist sehr vermehrt. Manche der kleinen Gefässe sind mit kleinen, ampullären Erweiterungen versehen.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist schwächer als normal.

Occipitallappen. Der *Gyrus occipitalis superior* zeigt in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung eine Anordnung der Zellen in 2 Schichten, einer Pyramidenzellenschicht und einer Spindelzellenschicht. Sämmtliche Zellen sind bedeutend kleiner als normal und gleichen den unentwickelten Zellen in andern Windungen. Sie messen in der oberen Hälfte der Rinde $8 - 10\,\mu \times 10 - 15\,\mu$ und kommen in geringerer Anzahl vor als normal. Blos vereinzelte grössere Pyramidenzellen kommen in dem tieferen Theil der Pyramidenzellenschicht vor.

Der zur medialen Hirnoberfläche gehörende Theil der Windung sammt der Spitze des Occipitallappens selbst zeigen eine Andeutung von

normaler Anordnung der verschiedenen Schichten. Die Rinde misst an Dicke 2 mm. Die Zellen sind hier alle gleich gross, messen $6 - 8\,\mu \times 10\,\mu$ und kommen, sowohl in den zellenreicheren wie in den zellenärmeren Schichten in geringerer Anzahl als normal vor. Grössere Pyramidenzellen fehlen ganz.

Gyrus occipitalis inferior externus und *internus* gleichen dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung.

Wenige runde Zellelemente sowohl in Rinde als Mark. Die Stützsubstanz erscheint dichter als normal. Anzahl der Gefässe vermehrt.

Associationsfaserschicht der ersten Schicht schwächer als normal.

Lobus temporalis. Die Rinde im *hintern Theile* des Lappens ist zusammengesetzt aus kleinen unentwickelten Zellen in 2 Schichten. In der vorderen Hälfte sind sämmtliche Schichten gut ausgebildet, die Zellen grösser $(10 - 12 - 14\,\mu \times 20\,\mu)$ und in dem tiefsten Theile der Pyramidenschicht, sowie in der Ganglienzellenschicht kommen, in einer einfachen Reihe oder zerstreut, grössere Pyramidenzellen vor, die $16 - 18\,\mu \times 25 - 30\,\mu$ messen; die Spindelzellenschicht ist hier kräftig entwickelt.

Im ganzen Lappen finden sich runde Zellelemente sowohl in der Rinde als im Marke.

Menge der Gefässe vermehrt.

Die Stützsubstanz erscheint dichter als normal.

Die Associationsfaserschicht der 1. Schicht ist etwas schwächer als normal, besonders im hintern Theile des Lappens.

Lobus falciformis. Der *Gyrus hippocampi* zeigt normale Verhältnisse, ausgenommen dass die Zellen an Zahl und Grösse geringer als normal sind.

Der *Gyrus cinguli* zeigt normale Anordnung der Schichten. Die Zellen sind blos kleiner als normal $(10\,\mu \times 15\,\mu)$ und kommen in geringerer Anzahl als normal vor, 10 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Kleine runde Zellelemente, etwas kleiner als Kornzellen, kommen überall vor, am reichlichsten im basalen Theile der Schicht.

Im **Lobus centralis** ist die Rinde ebenfalls aus unentwickelten Zellen in 2 Schichten zusammengesetzt. Keine grösseren Pyramidenzellen. Anzahl der Gefässe vermehrt.

Die Untersuchungen in Bezug auf die *Nervi optici* und die *Centralganglien* sollen an einem andern Orte publicirt werden [1]).

Pons und **Medulla oblongata** bieten nichts Abnormes dar.

---

1) Der Verfasser starb am 1. Nov. 1893, 5 Monate nach dem Erscheinen dieser Abhandlung.

Kleines Gehirn. In den Hemisphären, sowie, obwohl in geringerem Grade, auch im Vermis sind die Purkinje'schen Zellen und die Zellen der Körnerschicht an Menge reducirt.

Anzahl der Gefässe vermehrt.

Anzahl der Nervenfasern vermindert.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** sind, kurz zusammengefasst, folgende:

Auffassung äusserst unvollständig.

Höhere psychische Funktionen fehlen ganz. Pat. kann nicht reden. Sie ist vollständig *blind*. Die Augäpfel sind klein und unentwickelt.

Bewegungen träg. Keine spontanen Bewegungen.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** sind, kurz zusammengefasst, folgende:

Die *Occipitallappen* sind kleiner als normal. Die Verkleinerung betrifft die laterale Oberfläche eben so viel wie die mediale.

Die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* sind folgende:

Am wenigsten entwickelt ist die Rinde im hintern Theile des *Gyrus frontalis inferior*, wo grosse Pyramidenzellen vollständig fehlen und die übrigen Zellen in einer einzigen Schicht angeordnet sind.

Einen etwas höheren Entwicklungsgrad zeigt die Rinde im übrigen Theile des *Gyrus frontalis inferior*, im *Gyrus parietalis superior*, *inferior* und in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theil des *Gyrus occipitalis superior*, in den hintern Theilen des *Temporallappens* und im *Lobus centralis*, wo sich eine Spindelzellenschicht findet.

Die Rinde in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus occipitalis superior* steht in einem etwas höheren Entwicklungsstadium, da die normale Anordnung der Schichten und kleinen Zellen angedeutet ist; aber sämmtliche Zellen bleiben sowohl der Grösse wie der Anzahl nach etwas unter der Norm. Grosse Pyramidenzellen in den Zwischenschichten fehlen ganz.

Auf einer noch höheren Entwicklungsstufe steht die Rinde im *Gyrus frontalis superior* und *medius*, sowie im *Gyrus centralis posterior*, wo die Anordnung der verschiedenen Lagen vollständig normal ist, aber die meisten Zellen an *Form* unentwickelten Zellen gleichen und an *Grösse* und Anzahl hinter dem Normalen zurückbleiben. Die grösseren Pyramidenzellen in der 3. Schicht und Ganglienzellenschicht sind geringer an Grösse und Zahl als normal.

Etwas mehr entwickelt ist die Rinde im vordern Theil des *Gyrus temporalis*, wo die grösseren Pyramidenzellen im tiefsten Theile der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht etwas zahlreicher sind, ohne jedoch die normalen Verhältnisse in Bezug auf Grösse und Anzahl zu erreichen.

Den höchsten Entwicklungsgrad zeigt die Rinde im *Lobus falciformis* und *Gyrus centralis anterior*, da sämmtliche Zellen hier die normale Form und Anordnung haben und nur Abweichungen in Bezug auf Anzahl und Grösse sich finden.

Runde Zellelemente, ähnlich denen in den vorhergehenden Fällen finden sich reichlich im Mark und, obwohl spärlicher, in der Rinde in allen Lappen. Die Stützsubstanz ist etwas dichter als normal, besonders in den an Zellen ärmsten Gebieten. Die Anzahl der Gefässe ist vermehrt. Keine Veränderungen in den Gefässwandungen oder um dieselben herum.

Die Associationsfaserschicht überall vermehrt.

Diagnose.

Die höchst *unvollständige Auffassung* und das *Fehlen der höheren psychischen Funktionen* berechtigen uns, auch diesen Fall zu der *schwersten* Form der Idiotie zu rechnen.

In Bezug auf die psychischen Defekte stimmt der Fall also mit den beiden vorhergehenden überein, aber er weicht darin von ihnen ab, dass die Motilität nicht in so hohem Grade herabgesetzt war und dass das Sehvermögen ganz fehlte.

In Bezug auf die *pathologisch-anatomischen Veränderungen* weicht der makroskopische Befund in hohem Grade von denen in den vorhergehenden Fällen ab.

Hier liegen das Gewicht des Gehirns und sämmtliche Maasse in normalen Grenzen. Was das Verhältniss zwischen den verschiedenen Gehirntheilen betrifft, weichen nur die *Occipitallappen* vom Normalen ab.

Zwar hat man früher eine Verkleinerung dieser Lappen in Zusammenhang mit Defekten der Psyche bringen wollen, aber da Fälle mit vollständiger Zerstörung dieser Lappen ohne Störung der Intelligenz bekannt sind, kann eine Verkleinerung derselben die psychischen Defekte in diesem Falle nicht erklären.

Die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* können auch in diesem Falle auf eine *Entwicklungshemmung* der Hirnrinde zurückgeführt werden.

Das am wenigsten entwickelte Gebiet (mit Zellen in einer einzigen Schicht) entspricht einem Entwicklungsstadium unter normalen Verhältnissen, das sich zu Anfang des 6. Fötalmonats wiederfindet, das zunächst höher entwickelte (mit einer Spindelzellenschicht) entspricht einem Stadium, das sich im 8. Monate findet, das danach höhere (mit Andeutung von sämmtlichen Schichten, wobei aber alle Zellen klein und unentwickelt und an Anzahl geringer als normal sind) entspricht einem Stadium, das sich am Schluss des Embryonallebens findet.

Das Fehlen grosser Pyramidenzellen in diesem Gebiete (Occipitallappen) kann nicht anders erklärt werden, als durch die Annahme, dass ein Theil der Zellen dieses Rindengebiets schon zu Anfang des 6. Fötalmonats in seiner Entwicklung gehemmt wurde, oder auch, dass die fertig gebildeten Zellen zerstört wurden. Das Fehlen von Zellenresten und jedem Zeichen von Atrophie spricht für die erste Annahme. Hierfür spricht auch der Umstand, dass die Anzahl der unentwickelten Zellen im Verhältniss zur Dicke der Rinde in diesem Gebiete auch bei einem Fötus von 6 Monaten ungefähr dieselbe ist.

So gut wie die Rinde in ihrer Gesammtheit in einem Gebiete in ihrer Entwicklung gehemmt werden kann, eben so gut muss auch ein besonderer Theil derselben in seiner Entwicklung stillstehen bleiben können. Wie es hierbei zugeht und über die Ursachen dafür, ist jedoch für uns unmöglich, zu bestimmen.

Die übrigen Rindengebiete können auf Entwicklungsstadien zurückgeführt werden, die sich bei normal Entwickelten zu Anfange des extrauterinen Lebens und im ersten Lebensjahre finden.

Das am meisten entwickelte Gebiet hat eine dem Alter der Pat. entsprechende Entwicklung in Bezug auf Anordnung und Form der Zellen. Anzahl und Grösse der Zellen sind jedoch geringer als normal.

Halten wir nun die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologisch-anatomischen Veränderungen* zusammen, so wird die vollständige *Aphemie* hinreichend durch die fehlende Entwicklung der Rinde im *Gyrus parietalis inferior* erklärt.

Die *Trägheit* der Bewegungen und der *Mangel an Willensimpuls* dürfte mit der Verminderung der Zahl und Grösse der Zellen in der *motorischen Region* in Zusammenhang gebracht werden können.

Die Blindheit wird durch mangelnde Entwicklung der *Rinde des Occipitallappens*, sowohl in ihrer Gesammtheit, als auch vor Allem der grösseren Pyramidenzellen in den zellenarmen Zwischenschichten erklärt.

Die geringe *Funktionstüchtigkeit* der übrigen Sinne (es wurde kaum mehr als Perception vorgefunden) steht wohl in Zusammenhang damit, dass die entsprechenden Rindengebiete sich in einem Entwicklungszustande befinden, wie er unter normalen Verhältnissen im *ersten Lebensjahr* gefunden wird.

Die *höchst unvollständige Auffassung* und das Fehlen *höherer psychischer Funktionen* wird gut dadurch erklärt, dass der grössere Theil der Hirnrinde sich in einem Entwicklungsstadium befindet, das bei Normalen zwischen dem *6. Fötalmonat* und dem *1. Lebensjahre* liegt, und dass in den Gebieten, die sich in einem dem Alter entsprechenden Entwicklungsstadium befinden, die Anzahl und die Grösse der Zellen bedeutend geringer ist als normal.

Fall 4.

Thyra Augusta Johansson, 3 Jahre alt, gestorben am 16. Juni 1892 an Pneumonia acuta.

Krankengeschichte.

Die Mutter ist gesund, der Vater unbekannt.

Die Ziehmutter nahm das Kind im Jahre 1890 auf. Es stand damals im 2. Lebensjahre. In Bezug auf die Antecedentien des Kindes war ihr nichts bekannt. Pat. war zu jener Zeit gesund, fett und kräftig. Sie wurde von der Umgebung zwar als spät entwickelt angesehen, aber nicht als Idiot.

Sie zeigte Freude über Kleidung oder dergleichen, lachte mitunter, schrie nie, sondern weinte, wenn sie hungrig wurde.

Sie konnte »Mamma» und »Pappa» und »Puppe» sagen, horchte, wenn ihr Name genannt wurde. Konnte allein sitzen und auf ebenem Boden gehen. Sie schüttelte gewöhnlich mit dem Kopfe, geiferte und knirschte mit den Zähnen.

Vom Herbst 1890 an finden sich keine Nachrichten über sie.

Im Frühjahr 1890 war sie sehr abgemagert und elend, litt an schwerem Lungenkatarrh, der jedoch allmählich verschwand; sie war ganz kahlköpfig, wie rasirt.

Sie war nun mehr stumpf und gleichgültig als früher. Sie bekümmerte sich nicht um Spielen, schöne Sachen und dergleichen. Horchte

erst bei wiederholtem Anreden, schien indessen zu hören und auch zu verstehen, wenn sie gescholten wurde, und konnte mitunter lachen.

Sie konnte allein sitzen und auf ebenem Boden gehen, aber sehr wackelnd. Sie fiel leicht um und konnte allein nicht wieder aufstehen. Die Beine waren sehr schwach. Sie ging mit gestreckten Knieen. Die Arme waren stärker.

Sie konnte gar nicht sprechen, kaute keine Speise und wurde stets künstlich getränkt. Was sie trank, pflegte nicht durch die Nase zurückzugehen.

Sie saugte mit der Zunge oben am Gaumen, geiferte und knirschte mit den Zähnen, wie vorher. Sie schrie nie, wenn sie sich schlug.

Vierzehn Tage vor der Aufnahme erkrankte sie mit Fieber, Erbrechen, Husten und Bildung von vielem Schleime. Sie wurde am 26. Mai 1892 im Kinderkrankenhause aufgenommen. Temperatur am 26. Nachmittags 39,6°, Abends 39,6°.

Status praesens am 27. Mai 1892.

Pat. ist für ihr Alter von gewöhnlicher Grösse, aber schwächlich gebaut. Fettpolster und Muskulatur sind etwas schwach entwickelt.

Die Grösse des Kopfes ist normal, die Tubera frontalia sind etwas vorstehend.

Rhachitischer Rosenkranz findet sich vor. Der Körper ist im Uebrigen wohlgebildet.

Aus dem rechten Ohre besteht ein eitriger Ausfluss.

Der Gesichtsausdruck ist starr und deutet auf Schmerz. Pat. schläft viel. Sie ist ruhig und still und jammert nur, wenn sie berührt wird. Sie spricht gar nicht, reagirt nicht auf Anreden, auch nicht auf Kuchen und Spielsachen.

Sie ist gleichgültig gegen Alles, was um sie herum vorgeht.

Gesichtssinn. Pat. kann einen Gegenstand fixiren.

Der *Gehörssinn* erscheint normal.

Der *Schmerzsinn* ist bedeutend herabgesetzt.

Motilität. Pat. kann nicht einmal allein sitzen. Kopf, Arme und Beine zittern beständig, wenn sie wacht, aber nicht, wenn sie schläft. In den Extremitäten findet sich etwas Rigidität.

Die *Reflexe* sind ganz lebhaft. Wird ihr feste Speise gereicht, so kann sie dieselbe zwar kauen, aber es geschieht träg, gleichgültig und unvollständig, aber sie schluckt sie nicht, wenn ihr nicht erst Flüssiges dazwischen gegeben wird.

Das Schlucken ist auch träg und scheint nicht ohne Schwierigkeit vor sich zu gehen. Bei sitzender Stellung fliessen alle Nahrungsmittel, die ihr gegeben werden, wieder aus.

Lippen und Zunge sind nicht atrophisch.

Sie hat einen kurzen, abgebrochenen Husten, ohne Expektorat. Der Puls hat 144 Schläge in der Minute, die Temperatur beträgt 39°.

Die *objektive Untersuchung* der Brust ergab eine doppelseitige Pneumonie.

Sektion.

Die Leiche ist von schwächlichem Körperbau, bedeutend abgemagert mit geringem Panniculus und atrophischer Muskulatur.

Das Schädeldach ist symmetrisch, von einer eigenthümlichen Form, fast herzförmig, abgerundet spitzig nach vorn und bedeutend breiter nach hinten; von gewöhnlicher Grösse, geringem Diploëgehalt.

Die Dura mater zeigt etwas vermehrte Spannung, besitzt normale Durchsichtigkeit.

Im Sinus longitudinalis findet sich ein kleines Fibrincoagulum und etwas dünnflüssiges Blut. Die Innenseite der Dura mater ist glatt, blass, stark feucht und glänzend. Im Subduralraum etwas vermehrter Flüssigkeitsgehalt.

Arachnoidea durchscheinend, glatt und glänzend. Die Venen mit Blut gefüllt, besonders stark in den hinteren Theilen.

In den vorderen unteren Theilen des rechten Occipitallappens und in den untersten des rechten Parietallappens sieht man an den Windungen stellenweise eine lebhafte Capillarinjektion.

Bei Eröffnung der Basalcysterne floss eine ganz bedeutende Menge Cerebrospinalflüssigkeit ab. Die Häute an der Hirnbasis boten nichts Bemerkenswerthes.

Das Gehirn erscheint etwas klein, die Seitenventrikel mässig weit, Velum interpositum und Plexus chorioideus mit Blut gefüllt.; am Ependym nichts Bemerkenswerthes.

Auf dem Durchschnitt findet sich die Hirnsubstanz in den grossen Hemisphären reichlich mit Blutpunkten versehen, die Rinde ebenfalls blutreich, von dunkel graurother Farbe.

Die Basalganglien, der Pons, das verlängerte Mark und das kleine Gehirn zeigen ebenfalls ziemlich reichlichen Blutgehalt. Die Hirnsubstanz scheint überall etwas fester als normal zu sein.

Das Gehirn wurde nicht gewogen; es wurde in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet.

Die Oberfläche des Gehirns zeigt keine Abweichungen von dem Normalen, ausser dass die Centralwindungen, die kräftig entwickelt sind, einen etwas geraderen Verlauf haben als normal. Die Gyri sind kräftig und normal gewunden, Fissuren und Sulci von normaler Tiefe.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde. Rechte Hemisphäre.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Die Zellen sind im grössten Theile der Windung in deutlichen Schichten angeordnet. Sie haben in der Pyramiden- und Ganglienzellenschicht normale Form und Struktur und sind gleich gross ($5 - 8\,\mu \times 10 - 15\,\mu$). Sie kommen in einer Anzahl vor, die nicht einmal $^1/_5$ der normalen ausmacht.

Ausser diesen Zellen mit normaler Form finden sich andere, gleich grosse Zellen mit Form und Struktur der Embryonalzellen.

Ausserdem findet sich eine grosse Anzahl rundlicher oder ovaler Zellkörper, deren Protoplasma ein hyalines Aussehen hat und mit den gewöhnlichen Färbmitteln nicht gefärbt wird. Nucleus und Seitenausläufer fehlen, aber im Allgemeinen findet sich ein deutlicher Spitzenfortsatz. Diese Zellkörper finden sich in etwas grösserer Zahl als die normalen Zellen und haben dieselbe Grösse wie diese.

Im untern Umfang der Windung hat ein Theil der tieferen Zellen in der Ganglienzellenschicht bedeutend an Grösse zugenommen und eine langgestreckte Pyramiden- oder Spindelform angenommen. Diese Zellen liegen in der unteren Hälfte der Schicht.

Gyrus frontalis superior. Form und Anordnung der Zellen in den verschiedenen Schichten sind im Allgemeinen vollständig normal, aber die Zellen sind an Grösse und Anzahl geringer als normal.

Ausserdem kommt eine Anzahl Zellen mit Form und Struktur der Embryonalzellen vor. Nur vereinzelte hyaline Zellkörper, die denen in der vorhergehenden Windung gleichen, kommen vor.

Der *Gyrus frontalis medius* verhält sich im hintern und orbitalen Theile wie die vorhergehende Windung. Im vorderen Theile ist die ganze 3. Schicht gebildet aus kleinen unentwickelten Zellen nebst einer Anzahl hyaliner Zellkörper von der oben angegebenen Art.

In der Ganglienzellenschicht wiederum finden sich keine solchen Zellkörper, sondern statt derselben Pyramidenzellen von normaler Form und Struktur, aber geringer an Anzahl und Grösse als normal. Neben

diesen finden sich ungefähr gleich viele kleinere unentwickelte Zellen. Die Anordnung der Schichten ist auch hier normal.

Gyrus frontalis inferior. In dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung findet sich in der Pyramiden- und Ganglienzellenschicht nicht eine einzige normale Zelle, sondern nur unentwickelte Zellen nebst Zellkörpern von dem oben angegebenen Charakter. Die Zellen der Spindelzellenschicht sind nach Form und Struktur denen bei Neugebornen gleich, aber an Zahl und Grösse sind sie geringer als normal. Zwischen den Spindelzellen finden sich keine hyalinen Zellkörper.

In der Rinde des ganzen Lappens, am reichlichsten in dem Gebiete, wo Zellen von normaler Form und Grösse fehlen, findet sich eine grosse Menge runder Zellen, etwas kleiner als weisse Blutkörperchen und mit einem hyalinen Protoplasma.

Die Stützsubstanz erscheint dichter als normal. Die Gefässe sind vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht schwächer als normal

Lobus parietalis. Im *Gyrus centralis posterior* und *parietalis superior* sind die Zellen in einer einzigen Schicht angeordnet. Sie gleichen der Form nach unentwickelten Zellen und kommen in einer geringeren Anzahl als normal vor. Neben diesen Zellen finden sich einige, die eine deutlichere Pyramidenform angenommen haben, nebst hyalinen Zellkörpern, die den vorher beschriebenen gleichen.

Im *Gyrus parietalis inferior* fehlen Zellen von normaler Form und Struktur fast ganz und gar. Runde Zellelemente finden sich reichlich, sowohl in der Rinde, wie im Mark. Die Stützsubstanz erscheint dichter als gewöhnlich und die Zahl der Gefässe vermehrt. Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht schwächer als normal.

Lobus occipitalis. In dem medialen Theile des Lappens zeigt die Rinde normale Anordnung der verschiedenen Schichten. Die Zellen haben alle normale Form, aber sowohl ihre Grösse, als ihre Zahl ist geringer als normal. Hyaline Zellkörper sind nicht beobachtet worden.

Die Rinde in den übrigen Theilen des Lappens hat dieselbe Zusammensetzung wie im Gyrus parietalis superior, nur kommen mehr Zellen von normaler Form und weniger hyaline Zellkörper vor.

Runde Zellelemente sowohl in der Rinde, wie im Mark. Die Anzahl der Gefässe ist etwas grösser als gewöhnlich.

Lobus temporalis und **Lobus falciformis.** Die Rinde zeigt hier vollständig normale Anordnung der Schichten und der Zellen, die sich nach Form und Struktur normal verhalten, aber an Grösse und Zahl bedeutend hinter dem Normalen zurückbleiben.

Runde Zellelemente sind spärlich in Rinde und Mark.

Stützsubstanz etwas dichter als normal und Anzahl der Gefässe etwas vermehrt.

Associationsfaserschicht der ersten Schicht schwächer als normal.

Der **Lobus centralis** verhält sich wie der orbitale Theil des Gyrus frontalis inferior.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich in der Hauptsache wie die rechte.

Die **centralen Ganglien**, die Kerne in **Pons** und **Medulla oblongata** zeigen keine Abweichungen von der Norm.

Kleines Gehirn. Sowohl im Vermis, als in den Hemisphären sind die Purkinje'schen Zellen und die Zellen der Körnerschicht an Anzahl geringer als gewöhnlich.

Zahl der Gefässe vermehrt.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** in diesem Falle waren folgende:

Die Pat. soll sich entwickelt haben, wenn auch langsam, bis zum Schluss des 2. Jahres, aber von dieser Zeit an verschlechterte sich ihr Zustand und kurz vor ihrem Tode fehlten alle höheren *psychischen Funktionen*.

Was die *Sinne* betrifft, fand sich kurz vor dem Tode wenigstens Perception für *Sehen* und *Hören*. *Geschmack* und *Gefühl* schienen zu fehlen.

Was die *Motilität* betrifft, fehlte seit dem Herbst 1891 vollständig das Vermögen zu coordinirten Bewegungen; sie konnte nicht gehen und nicht sitzen.

Das Kauen war träg und unvollständig, das Schlingen träg und erschwert.

Vollständige *Aphemie* seit dem 2. Jahre.

Kopf, Arme und Beine zitterten fortwährend.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** beziehen sich in diesem Falle nur auf die feinere Struktur der Hirnrinde.

Am meisten abweichend von der Norm ist die Rinde im *Gyrus parietalis inferior*, wo sich nur hyaline Zellkörper von rundlicher Form ohne Kerne, Seiten- und Basalfortsätze finden, angeordnet in einer einzigen Schicht. Auch im *Gyrus centralis posterior*, *parietalis superior* und im lateralen Theile des *Gyrus occipitalis superior* zeigt die Rinde dieselbe Anordnung, aber hier finden sich theils unentwickelte Zellen, theils Zellen von normaler Form und Struktur sowie hyaline Zellkörper.

Die Anordnung der verschiedenen Schichten ist normal im lateralen Theile des *Gyrus frontalis inferior* und *frontalis medius*, aber hier finden

sich neben den hyalinen Zellkörpern auch unentwickelte Zellen von embryonaler Form und Struktur.

Ungefähr dasselbe Verhalten zeigt der grössere Theil des *Gyrus centralis anterior*, aber hier finden sich ausser diesen beiden Zellformen auch gleich grosse Zellen mit normaler Form und Struktur.

Ebenso verhält sich der *Gyrus frontalis superior*, aber hier ist die Zahl der hyalinen Zellkörper bedeutend geringer.

Am wenigsten verändert ist die Rinde im medialen Theile des *Lobus occipitalis*, im ganzen *G. temporalis* und *falciformis*, wo Anordnung und Form der Zellen normal sind, ihre Zahl aber bedeutend geringer als normal ist.

Diagnose.

In Folge des Fehlens der Angaben über den Zustand der Pat. in den ersten Lebensjahren kann über die psychische Entwicklung der Pat. vor dem Schluss des 2. Jahres nichts mit Sicherheit gesagt werden.

Die Angabe, dass sie als später als andere Kinder entwickelt betrachtet wurde, dass sie gewöhnlich mit dem Kopfe schüttelte, geiferte und mit den Zähnen knirschte, deutet indessen darauf hin, dass schon vor Beginn des 3. Lebensjahres sich Abnormitäten in der Entwicklung der Pat. vorfanden, wenn sie auch keinen hohen Grad erreichten.

Von Schluss des 2. Lebensjahres an blieb die psychische Entwicklung der Pat. ganz und gar stehen und die erworbenen Fähigkeiten gingen verloren, so dass kurz vor dem Tode die *Auffassung* der Aussenwelt eine *höchst unvollständige* war, und die *höheren psychischen Funktionen ganz und gar fehlten.* Auf Grund dieses Verhaltens muss der Fall zu der *Form von Idiotie höchsten Grades* gerechnet werden.

In den vorhergehenden Fällen waren die psychischen Defekte angeboren. Auch hier finden sich mit aller Sicherheit angeborne psychische Defekte, aber Defekte von hohem Grade sind erst am Schluss des 2. Lebensjahres aufgetreten.

Ebensowenig wie in den vorhergehenden Fällen kann hier ein ätiologisches Moment für die Krankheit angegeben werden.

Was die *pathologisch-anatomischen Veränderungen* in dem Falle betrifft, so können diese theils auf eine *Entwicklungshemmung* der Hirnrinde, theils auf eine *Zerstörung* mehr entwickelter Elemente zurückgeführt werden.

Eine Entwicklungshemmung zeigt die Rinde im *Parietallappen*, wo sich nur eine Zellenschicht findet, und die Rinde ist in ihrer normalen

Entwicklung gehemmt worden in einem Stadium, das sich unter normalen Verhältnissen im 6. Fötalmonate wiederfindet. Ein Theil der Zellen hat den embryonalen Charakter behalten, blos an Grösse zugenommen, und sie sind beim Wachsen der Rinde durch grössere Zwischenräume von einander getrennt worden, aber ein Theil hat sich weiter entwickelt und eine mehr ausgeprägte Pyramidenform angenommen.

Auch im *Frontallappen* steht die Rinde in einem abnorm frühen Entwicklungsstadium, das sich bei Normalen im Verlaufe des ersten Lebensjahres findet. Die Schichten sind zwar ausgebildet, aber manche Zellen haben noch embryonale Form und sämmtliche Zellen sind ausserdem an Zahl geringer als normal.

Das am meisten entwickelte Gebiet, der mediale Theil des *Lobus occipitalis, temporalis* und *falciformis*, steht in einem Stadium, das in Bezug auf Anordnung und Form der Zellen dem Alter der Pat. entspricht. Zahl und Grösse der Zellen sind indessen geringer als normal.

Auch in diesem Falle dürfte im 6. Fötalmonat ein Moment hinzugekommen sein, durch welches die Rinde in ihrer normalen Entwicklung gehemmt wurde. Dieses Moment wirkte jedoch nicht so kräftig wie in den vorhergehenden Fällen, weshalb hier der grösste Theil der Hirnrinde eine Entwicklung erreichen konnte, wie sie sich bei normal Entwickelten im ersten Lebensjahre findet.

Aber in diesem Falle ist noch ein Process hinzugekommen, nämlich eine *Degeneration* von Zellen, die Form und Struktur fertig gebildeter Zellen angenommen hatten.

Was die Art dieses pathologischen Processes betrifft, so fehlt in den Gefässwandungen oder um die Gefässe herum jedes Zeichen von Entzündung. Die Zellen scheinen einer hyalinen Degeneration unterlegen zu sein. Ein ursächliches Moment hierzu hat nicht nachgewiesen werden können.

Durch diesen degenerativen Process sind im grössten Theile der Hirnrinde die meisten Zellen, die eine höhere Entwicklung erlangt hatten, zerstört worden und die Rinde ist in einen Zustand versetzt worden, wie er unter normalen Verhältnissen einem Entwicklungsstadium zwischen dem 6. und 9. Fötalmonate entspricht.

Halten wir nun die *klinischen Symptome* mit den *pathologisch-anatomischen Veränderungen* zusammen, so kann die späte und langsame Entwicklung der Pat. nebst den aller Wahrscheinlichkeit nach vor Schluss des 2. Lebensjahres vorhandenen Defekten dadurch erklärt werden, dass

der grössere Theil der Hirnrinde sich in einem Entwicklungsstadium befand, das bei Normalen im ersten Lebensjahre sich findet.

Die nach dem Schluss des 2. Lebensjahres hinzugetretenen Symptome von Seiten der *Motilität* und *Sprache* können hinlänglich dadurch erklärt werden, dass in den entsprechenden Centren der grösste Theil der mehr entwickelten Zellen zerstört wurde, wodurch die Rinde in diesen Centren in einen Zustand versetzt wurde, wie er bei Normalen am Schluss des Fötallebens sich vorfindet.

Das Fehlen des Gefühls kann wohl mit dem hohen Grade der Entwicklungshemmung des Parietallappens in Zusammenhang gebracht werden.

Ebenso kann das Verlöschen aller *höheren psychischen Funktionen* dadurch erklärt werden, dass der grössere Theil der Hirnrinde durch den hinzugetretenen degenerativen Process in Entwicklungsstadien versetzt wurde, die bei Normalen zwischen dem *6. und 9. Fötalmonat* angetroffen werden, sowie dass in den mehr entwickelten Gebieten der Rinde die Zellen an Grösse und Anzahl geringer als normal waren.

Zusammenfassung.

Die *psychischen Defekte*, die in sämmtlichen bisher hier angeführten Fällen in ungefähr demselben Grade vorgefunden wurden, haben trotz grossen Abweichungen in Form, Grösse und makroskopischer Beschaffenheit des Gehirns auf die gefundenen *Veränderungen in der Hirnrinde* zurückgeführt und durch sie erklärt werden können.

Diese *Veränderungen* beruhten in sämmtlichen Fällen darauf, dass die Hirnrinde in der letzten Hälfte des Fötallebens in ihrer normalen Entwicklung *gehemmt* wurde, so dass entweder gewisse Gebiete ganz und gar in einem embryonalen Stadium stehen blieben, oder auch andere gehindert wurden, einen dem Alter entsprechenden Entwicklungsgrad zu erreichen.

Der grössere Theil der Hirnrinde steht in diesen Fällen in einem Entwicklungsstadium, das sich bei Normalen zwichen dem *6. und 9. Fötalmonate* wiederfindet.

Im 4. Falle ist jedoch die Entwicklung weiter fortgeschritten und hat ein Stadium erreicht, das sich bei normal Entwickelten im 1. Lebensjahre findet, und später ist ein Process hinzugekommen, der da-

durch, dass er die mehr entwickelten Zellelemente zerstörte, die Hirnrinde in dasselbe Entwicklungsstadium zurückführte, wie in den früheren Fällen.

Die in dieser Gruppe zusammengestellten 4 Patienten können also auf folgende Weise charakterisirt werden.

Sie ermangeln vollständig aller höheren psychischen Funktionen und sind unfähig zu psychischer Entwicklung. Der grössere Theil ihrer Hirnrinde befindet sich auf einer Entwicklungsstufe, die sich bei normal Entwickelten in der letzten Hälfte des Embryonallebens wiederfindet.

Die verschiedenen klinischen Symptome können auch in jedem Falle *durch Veränderungen im entsprechenden Rindengebiete* hinlänglich erklärt werden.

B. Schwachsinnige.

1. In hohem Grade Schwachsinnige.

Fall 5.

Laura Wallin, 26 J. alt, gestorben im April 1893 an allgemeinem Hydrops.

Krankengeschichte.

Von Nervenkrankheiten oder Geisteskrankheiten in der Verwandtschaft der Pat. ist nichts bekannt. Die Geschwister der Pat. sind alle gesund und wohlgebildet.

Sie war keinem Trauma ausgesetzt gewesen, überstand, 1 Jahr alt, das Scharlachfieber.

In Bezug auf die Entstehung der Krankheit wird angegeben, dass Pat. nicht eher gehen und sprechen lernte, als ungefähr im 3. Jahre. Ein Unterschied in der Art der Pat. sich zu benehmen oder in ihren psychischen Fähigkeiten vor und nach dem Scharlachfieber wurde nicht beobachtet. Sie entwickelte sich in psychischer Beziehung langsam, konnte sich aber nie über den Standpunkt eines 5-jährigen Kindes erheben.

Sie wuchs langsam in die Höhe bis zum 15. Jahre, wo sie 32 Zoll [95 cm] in der Höhe maass, worauf ihr Wachsthum aufhörte.

Sie wurde zu Hause unter besonders schlechten hygieinischen Verhältnissen bis 1884 gepflegt, dann wurde sie in Stockholm in der städtischen Versorgerungsanstalt aufgenommen. Während ihres Aufenthalts in dieser Anstalt ist keine Veränderung im Zustande der Pat. eingetreten.

Status praesens, Anfang 1893, einige Monate vor ihrem Tode.

Pat. hat das Aussehen eines 5-jährigen Kindes, ihre Länge beträgt 32 Zoll [95 cm], sie ist proportionirt gewachsen, jedoch ist der Bauch etwas dick; das Gesicht gross und grob, der Ausdruck ernst, etwas stumpf.

Psychische Funktionen. Die *Auffassung* ist im Allgemeinen correkt, aber träg.

Die *Stimmung* ist gewöhnlich ruhig und mild, wenn Pat. aber nicht ihren Willen bekommt, kann sie von dem heftigsten Zorn befallen werden, der mehrere Stunden lang anhalten kann.

Urtheil nicht ganz correkt.

Die *Gedankenthätigkeit* bewegte sich nur um ihr alltägliches Leben, religiöse Dinge fasste sie nicht, sie sprach zwar von Tod und Himmel, verstand aber offenbar die Bedeutung derselben nicht. Sie hatte keinen Begriff davon, dass sie eine Zwergin oder bemitleidenswerth war, sondern meinte ein Kind zu sein. Sie hielt jede Person, die länger war als sie, für älter und hatte es gern, wenn man zärtlich mit ihr war.

Sie war äusserst ordentlich und reinlich und hatte ihre Sachen in vortrefflicher Ordnung.

Das *Gedächtniss* war schlecht und sie vergass leicht, was vor einigen Tagen geschehen war, Gedächtniss für Begebenheiten aus vergangenen Jahren hatte sie nicht. Der Wille war frei und abnorme Triebe konnten nicht wahrgenommen werden.

Es fand sich keine Form von *Seelenblindheit* oder *Seelentaubheit* vor, keine *Worttaubheit*, sie verstand vollkommen, was zu ihr gesagt wurde, und konnte einen Auftrag ausführen.

Was die *Sprache* betrifft, war sie sehr schwer zu begreifen, Pat. bediente sich gewöhnlich einiger einfacher Worte, womit sie ausdrückte, was sie wünschte. Zeitwörter wendete sie selten an und bildete selten einige vollständige Sätze. Versuchte sie, dies zu thun, dann gelang es ihr nicht, sich verständlich zu machen, da sie eine Menge Worte oder Buchstaben wegliess. Fragte man danach, so wiederholte sie dieselben Buchstaben unter deutlichem Bemühen, sich verständlich zu machen.

Amnestische Aphasie bestand nicht. Sie sprach oft spontan und stellte dann einfache Fragen nach dem, was sich um sie zutrug, oder beklagte sich auch über irgend ein kleines Unrecht.

Sie stammelte nicht und gebrauchte keine unrichtigen Namen für Personen oder Sachen.

Trotz wiederholtem Versuch konnte sie nicht lesen lernen und beim Versuch, sie schreiben oder zeichnen zu lehren, brachte sie blos Striche oder inhaltslose Schnörkel zu Stande.

Handarbeiten konnte sie nicht, das einzige, was sie konnte, war, einige grobe und ungleiche Stiche nähen.

Cranialnerven: I. *Geruch* scharf und normal.
II. *Sehschärfe* normal. Keine Einschränkung des Gesichtsfeldes.
III, IV, VI. An den *Bewegungen der Augen* nichts Abnormes.
V, VII. *Gefühl* und *Bewegung* im Gesicht normal.
VIII. *Gehör* scharf und gleich auf beiden Seiten,

IX. *Geschmack* scharf und normal.

X, XI, XII. Nichts Abnormes.

Sensibilität überall normal und Reaktionszeit schnell.

Motilität. Bewegungen träg. Paresen sind nicht vorhanden. Sie fühlte sich jedoch beständig müd und vermochte anstrengende Bewegungen nicht auszuführen. Gang normal, aber sie ermüdete bald und musste sich legen, um auszuruhen.

Keine *Contrakturen.*

Reflexe normal.

Epileptische Anfälle traten während des letzten Lebensjahres der Pat. auf und wenigstens oft kamen mehrere in einem Monate, ohne weiter bemerkbare Regelmässigkeit. Den Anfällen ging keine deutliche Aura voraus, sie hatten den Charakter gewöhnlicher epileptischer Anfälle. Es wurde nicht beobachtet, wie weit die Zuckungen in einem bestimmten Gliede begannen. Nach den Anfällen war die Pat. ziemlich lange somnolent und reizbar.

Vasomotorische Störungen: Pat. war nie menstruirt. Ziemlich reichliche Blutungen traten aus dem Rectum mit einer gewissen Periodicität auf, ungefähr einmal im Monat.

Trophische Störungen: Keine partiellen Atrophien. Alle Glieder waren proportionirt und entsprachen der Körperlänge.

Sektion.

An Schädeldach und Dura nichts Bemerkenswerthes.

Die rechte Hemisphäre wiegt 352 g, die linke 372 g, Pons, Medulla oblongata und Kleinhirn zusammen 100 Gramm.

Pia normal.

Die Hemisphären sind ungewöhnlich lang (17 cm) im Verhältniss zur Höhe (6,5 cm) und Breite (6 cm). Die Occipitallappen reichen bis 2 cm hinter den hintern Rand des kleinen Gehirns.

Makroskopische Untersuchung der rechten Hemisphäre.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* ist im Verhältniss zu den übrigen Windungen ungewöhnlich kurz; er misst 6 cm in der Länge, seine grösste Breite ist 1 cm. Sein Verlauf ist etwas mehr vertikal als gewöhnlich.

Der *Gyrus frontalis superior* ist kräftig entwickelt, reich gewunden und hat einen normalen Verlauf. Sein orbitaler Theil ist ungewöhnlich

kräftig entwickelt und nimmt fast die Hälfte der Orbitalfläche ein. Sein lateraler Theil ist etwas über den Orbitaltheil der nächsten Windung gestülpt, der zwischen diesen und den Gyrus occipitalis inferior eingeschoben ist.

Gyrus frontalis medius und *inferior* sind gut entwickelt und haben einen normalen Verlauf.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* ist etwas schwächer als der G. centralis anterior.

Der *Gyrus parietalis superior* ist stark entwickelt und bildet allein fast den ganzen Lappen, während der *Gyrus parietalis inferior* hingegen schwach ist, besonders sein vorderer Theil.

Lobus occipitalis. Sämmtliche Windungen sind gut entwickelt und verlaufen normal.

Lobus temporalis. Der hintere Schenkel der Fissura Sylvii ist ungewöhnlich kurz und die Windung, die nach hinten die Fissur umgiebt, hängt direkt mit dem Gyrus temporalis superior zusammen.

Der *Gyrus temporalis superior* ist ungewöhnlich kurz und misst blos 6,5 cm, während die folgende Windung 10 cm misst.

Die übrigen Temporalwindungen sind kräftig und haben einen normalen Verlauf.

Der **Lobus falciformis** zeigt keine Abweichungen.

Der **Lobus centralis** zeigt nur normale Verhältnisse.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich wie die rechte, ausser dass der *Gyrus centralis posterior* und die *Pars posterior* des *Gyrus parietalis inferior* hier kräftiger sind und der *Gyrus parietalis superior* schwächer ist.

Der hintere Schenkel der Fissura Sylvii ist hier länger, wie auch der *Gyrus temporalis superior*.

Corpus callosum, *Commissura anterior* und *Fornix* verhalten sich makroskopisch normal auf Querschnitten durch die Hemisphären.

Centralganglien, Pons und **Medulla oblongata** bieten nichts Abnormes dar.

Das **kleine Gehirn** erscheint klein im Verhältniss zum grossen. Sein hinterer Rand reicht bis 2 cm vor die Spitze des Occipitallappens. Seine Windungen sind normal ausser der Tonsilla, die auf der rechten Seite fehlt und auf der linken schwach entwickelt ist.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* hat eine vollkommen normale Anordnung der verschiedenen Schichten und der Zellen in diesen. Die Zellen sind hier etwas kleiner als normal und sowohl die ganze Rinde, wie jede der verschiedenen Schichten ist hier schmäler als bei einem normalen Individuum von gleichem Alter.

Die Rinde misst 2 mm in der Dicke. Die Pyramidenzellen messen $10 - 12\,\mu \times 20\,\mu$ und die Riesenzellen $25 - 30\,\mu \times 50\,\mu$. Die Anzahl der Pyramidenzellen ist 15 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Runde Zellelemente kommen reichlich vor im Mark, sowie, obgleich spärlicher, in der Rinde.

Spindelzellen kommen zerstreut im Mark vor, weshalb sich eine deutliche untere Grenze der Spindelzellenschicht nicht an allen Stellen findet.

Der *Gyrus frontalis superior* stimmt in seiner hintern Hälfte mit dem Gyrus centralis anterior überein.

In den übrigen Theilen der Windung hat die Rinde eine normale Anordnung der verschiedenen Schichten und der Zellen in diesen, aber die Zellen sind hier kleiner als normal (sie messen $8\,\mu \times 15\,\mu$) und die tiefsten Zellen in der Pyramidenzellenschicht und Ganglienzellenschicht weichen wenig in Grösse und Aussehen von den übrigen ab.

Der Zellkern ist gross und die Form der Zelle etwas mehr abgerundet als normal, zugleich sind die Fortsätze schmäler.

Am kleinsten sind die Zellen in dem zur orbitalen Hirnoberfläche gehörenden Theil der Windung, wo sämmtliche Zellen gleich gross sind und $8\,\mu \times 12\,\mu$ messen. Sie kommen in einer Anzahl von 25 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

Der *Gyrus frontalis medius* ist von Zellen gebildet, die im Allgemeinen klein und von derselben Beschaffenheit sind, wie die Zellen in der vorhergehenden Windung. Ihre Anzahl ist 25 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Der *Gyrus frontalis inferior* zeigt dieselben Verhältnisse in Hinsicht der Zellen. Im hintern Theile der Windung fehlen Riesenzellen ganz und blos einzelne Zellen im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht und in der Ganglienzellenschicht erreichen eine Grösse von $15\,\mu \times 25\,\mu$.

In sämmtlichen Windungen kommen die runden Zellelemente vor, sowohl in der Rinde, wie im Mark.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist schwächer als normal in sämmtlichen Windungen, ausser im Gyrus centralis anterior, wo die Anzahl der Fasern nahezu normal ist.

Die Menge der Gefässe ist möglicherweise etwas grösser als normal im vorderen Theile des Lappens. Die Stützsubstanz zeigt keine Veränderungen.

Lobus parietalis. *Gyrus centralis posterior.* Alle Zellen, ausser den allertiefsten in der 3. Schicht, sowie einzelnen in der Ganglienzellenschicht, sind beträchtlich klein ($4\,\mu \times 8\,\mu$), haben abgerundete Form und feine Fortsätze und gleichen unentwickelten Zellen. Sie kommen in einer Anzahl von 30 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

Die übrigen Pyramidenzellen, die eine Grösse von $12 - 16\,\mu$ erreichen, verhalten sich normal.

Im *Gyrus parietalis superior* und *inferior* sind die Zellen grösser, haben deutliche Pyramidenform und gröbere Fortsätze, aber sie sind an Grösse geringer und an Anzahl häufiger als normal ($10 - 12\,\mu \times 18\,\mu$; Anzahl 20 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$).

Wenige runde Zellelemente im Mark, blos vereinzelte in der Rinde.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht etwas schmäler als normal.

Die Stützsubstanz erscheint unverändert. Menge der Gefässe ganz unbedeutend grösser als normal.

Lobus occipitalis. Die Rinde im *Gyrus occipitalis superior* ist in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile hauptsächlich aus kleinen unentwickelten Zellen zusammengesetzt, denen im Gyrus centralis posterior gleichend, mit vereinzelten grösseren Pyramidenzellen im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht und der Ganglienzellenschicht.

Der zur medialen Hirnoberfläche gehörende Theil der Windung, sowie der *Gyrus occipitalis inferior internus* haben einen normalen Bau. Die vereinzelten grossen Pyramidenzellen in der zellenarmen Zwischenschicht sind etwas kleiner als normal.

Der *Gyrus occipitalis inferior externus* hat denselben Bau wie der zur lateralen Hirnoberfläche gehörende Theil des Gyrus occipitalis superior.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht erscheint etwas weniger mächtig als normal an der äussern und untern Fläche des Lappens.

Die Menge der Gefässe ist unbedeutend grösser als normal. Die Stützsubstanz zeigt keine Veränderungen.

Lobus temporalis. Die *Temporalwindungen* verhalten sich normal, nur sind die Zellen etwas kleiner als entsprechende Zellen bei normalen Individuen gleichen Alters und kommen in etwas grösserer Anzahl vor.

Runde Zellelemente hier und da, sowohl in der Rinde, als im Mark.

Die Associationsfaserschicht ist unbedeutend schwächer als normal.

Lobus falciformis. *Gyrus hippocampi.* Die tiefer gelegenen grossen Pyramidenzellen sind sehr gering an Zahl. Der grössere Theil derselben hat eine undeutlich pyramidale Form; am häufigsten sind lange Spindelzellen von 12 μ Breite und 80 μ Länge.

Gyrus cinguli. Die Rinde hat hier eine ungewöhnlich grosse Breite, was darauf beruht, dass eine aus kleinen (4 μ), unentwickelten Zellen bestehende 4. Schicht von unbedeutender Dicke zwischen die Pyramidenzellen- und die Ganglienzellenschicht eingeschoben ist. Sie misst 0,50 mm in der Breite.

Die übrigen Zellen sind etwas kleiner als die entsprechenden bei normalen Individuen gleichen Alters.

Die Associationsfaserschicht erscheint etwas schwächer als gewöhnlich.

Anzahl der Gefässe unbedeutend vermehrt. Stützsubstanz normal.

Im **Lobus centralis** besteht die Rinde zum grössten Theile aus kleinen, unentwickelten Zellen von derselben Beschaffenheit wie die Zellen im Gyrus centralis posterior, sie messen $4 - 6\,\mu \times 10\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 50 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

Zwischen den beiden Hemisphären finden sich keine wesentlichen Verschiedenheiten vor.

Die **Centralganglien** zeigen normale Anordnung der Zellen und Nervenfasern. Sämmtliche Zellen sind einige μ kleiner als entsprechende von normalen Individuen gleichen Alters.

Pons und **Medulla oblongata** zeigen nichts Abnormes.

Kleines Gehirn. Die Purkinje'schen Zellen sowie die Zellen der Körnerschicht sind geringer an Zahl in beiden Hemisphären und, obwohl in unbedeutendem Grade, im Vermis.

Die Zellen sind etwas kleiner als entsprechende Zellen bei normalen Individuen von gleichem Alter. An mehreren Stellen im Vermis kommen diese Zellen in Gruppen vor und stehen bisweilen in mehreren Reihen über einander.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** waren kurz folgende:
Auffassung träg.
Stimmung wechselnd.
Urtheil nicht correkt.
Denkvermögen träg, beschränkt auf die alltäglichsten Verhältnisse.

Gedächtniss schlecht.

Sprache unvollständig.

Pat. konnte nicht *lesen*, nicht *schreiben*, auch keine feineren Handarbeiten ausführen.

Bewegungen träg.

Epileptiforme Anfälle.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** waren folgende:

Die Grösse des Gehirns entspricht ungefähr der Länge der Patientin. Im Verhältniss zum Alter ist es kleiner als normal.

Die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* waren folgende:

Am meisten verändert ist die Rinde im *Gyrus hippocampi*, wo die tieferen Zellen nicht vollständig ausgebildete Pyramidenform angenommen haben und an Zahl geringer sind als normal.

Mehr entwickelt ist die Rinde im *Gyrus centralis posterior*, im grösseren Theile des *G. occipitalis inferior*, sowie im *Lobus centralis*, wo die Zellen etwas mehr abgerundete Form, feinere Fortsätze und grössere Kerne haben, als bei Erwachsenen, und nicht grösser sind als Zellen bei einem normalen Individuum im ersten Lebensjahre.

Etwas mehr entwickelt ist die Rinde im *Gyrus frontalis superior*, *medius* und *inferior*, wo die Zellen etwas grösser sind, aber noch nicht die für vollkommen ausgebildete Zellen charakteristische Form erlangt haben. Sie sind hier etwas weniger zahlreich, sowie etwas grösser als bei einem zweijährigen Individuum, aber häufiger und in der Struktur unvollkommener als bei einem zehnjährigen [1]).

Ungefähr in derselben Weise verhält sich die Rinde im *Gyrus frontalis superior* und *inferior*, aber hier sind die Zellen etwas grösser und an Zahl geringer. In letzterem sind die grösseren Pyramidenzellen seltener und Riesenzellen fehlen ganz.

Am wenigsten verändert ist die Rinde um die *Fissura calcarina* herum, im *Lobus temporalis* und im *Gyrus centralis anterior*, wo Grösse und Zahl der Zellen ungefähr mit den Verhältnissen bei einem 2-jährigen Individuum übereinstimmen. Runde Zellelemente, ähnlich denen im vorhergehenden Fall, kommen auch hier vor.

Die Zellen in den Kleinhirnhemisphären sind an Anzahl geringer als normal.

---

1) Die Zellenzahl bei einem zweijährigen Individuum ist ungefähr um 10 Zellen in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ grösser als bei einem vollständig entwickelten.

Diagnose.

Da die psychische Entwicklung der Pat. im Allgemeinen als einem Stadium entsprechend betrachtet werden kann, das sich bei normalen Individuen im 5. Lebensjahre findet, und da sie aus Unterricht keinen Nutzen ziehen konnte, sind wir berechtigt, den Fall zur Gruppe *des Schwachsinns in hohem Grade* zu rechnen.

Was die *pathologischen Veränderungen* betrifft, so können sie auch in diesem Falle auf eine Entwicklungshemmung der Hirnrinde zurückgeführt werden. Aber hier ist die Hemmung in einem späteren Stadium eingetreten als in den vorhergehenden Fällen.

Die am wenigsten entwickelten Gebiete stehen in einem Entwicklungsstadium, das bei Normalen im ersten Lebensjahre angetroffen wird.

Andere Rindengebiete stehen auf einer Stufe, die bei Normalen nach dem 2. Jahre gefunden wird, eine dritte Entwicklungsstufe entspricht dem 10. Lebensjahre.

Im ersten Lebensjahre ist also ein Moment hinzugekommen, das an einer Stelle vollständig, an einer andern blos theilweise die normale Entwicklung der Hirnrinde hemmte.

Was dieses Moment war, ist schwer mit Bestimmtheit festzustellen. Die Angabe über die Scarlatina im ersten Lebensjahre kann möglicherweise damit in Zusammenhang gebracht werden.

Halten wir die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologischen Veränderungen* in diesem Falle zusammen, so kann die Störung der *Sprache* wohl durch den unentwickelten Zustand der Zellen im entsprechenden Rindengebiet erklärt werden.

Die *trägen Bewegungen* können nicht durch die Entwicklungshemmung der Rinde in der *motorischen Region* erklärt werden, da diese sich in einem Entwicklungsstadium befindet, das sich bei Normalen im 10. Lebensjahre findet. Möglicherweise dürfte die Verminderung der Zellelemente im *Vermis* mit der Trägheit der Bewegungen in Zusammenhang gebracht werden können.

Die *psychischen Defekte* werden hinlänglich dadurch erklärt, dass der grössere Theil der Hirnrinde sich auf Entwicklungsstufen befindet, die bei Normalen im 1. Lebensjahre angetroffen werden.

Die Grenze nach oben habe ich leider wegen Mangels an normalen Kindergehirnen nich näher zu präcisiren vermocht, aber nach der Grösse und Zahl der Zellen zu schliessen, liegt diese dem 2. Lebensjahre näher, als dem zehnten.

Fall 6.

Elisabeth Törnblom, 1 Jahr 10 Mon.; gestorben am 2. Februar 1889 an allgemeiner Entkräftung.

Krankengeschichte.

Eltern nicht verwandt, gesund. Die Mutter hat ein allgemein verengtes Becken, weshalb der Partus praematurus eingeleitet werden musste. Ein älterer Bruder der Pat. leidet seit der Geburt an beständigen Zuckungen im ganzen Körper, kann nicht gehen oder sitzen, hält den Kopf nicht aufrecht. Verstandesfähigkeiten verspätet. Sprache erschwert.

Pat. wurde 6 Wochen zu zeitig durch künstlich eingeleitete Frühgeburt geboren.

Sie hat keine der gewöhnlichen Kinderkrankheiten überstanden.

Die ersten Symptome der Krankheit wurden beobachtet, als Pat. einige Wochen alt war, und bestanden in Athetose ähnlichen Bewegungen in den Gliedern.

Sie konnte nicht entwöhnt werden, lernte nicht gehen, nicht sitzen und sprach nicht.

In körperlicher Hinsicht ernährte sie sich gut. Einige Monate vor dem Tode war der Zustand folgender:

Sie hatte eine für ihr Alter normale Körperlänge.

Ihre Auffassung dessen, was um sie herum vorging, war unvollständig. Sie erkannte jedoch Personen und hatte Spielsachen gern. Die Gemüthsstimmung war im Allgemeinen ruhig.

Psychische Funktionen verspätet. Sie verstand einfachere Anreden etwas weniger und erschien später entwickelt als ein normales Kind von gleichem Alter. Sie konnte nicht sprechen, sondern stammelte nur einige einfachere Laute hervor.

Cranialnerven I. Nichts bekannt.

II. *Sehvermögen* gut.

III, IV, VI. Nichts Abnormes in den Bewegungen der Augen.

V. *Gefühl* gut.

VII. Die Beweglichkeit der Gesichtsmuskeln normal. Zuckungen, ähnlich denen in den Extremitäten, kommen oft vor und täglich mehrere Male.

VIII. *Gehör* normal.

IX, X. Nichts bekannt.

XI. Pat. kann den Kopf nicht aufrecht halten.

XII. Nichts Abnormes bekannt.

Sensibilität normal.

Motilität. Pat. kann sich nicht auf die Beine stützen, nicht aufrecht sitzen, ordentliche Bewegungen mit den Händen nicht ausführen. Fast beständige Zuckungen in allen Extremitäten. Während des Schlafes treten keine Zuckungen auf. Sie sind nicht in einer bestimmten Seite oder Extremität lokalisirt.

Keine Atrophien oder vasomotorischen Störungen.

Sektion.

Das Gehirn wiegt 934 Gramm, die rechte Hemisphäre 420, die linke 386, Pons, Medulla oblongata und Kleinhirn zusammen 128 Gramm. Die Länge der Hemisphären beträgt 15 cm.

Makroskopische Untersuchung der rechten Hemisphäre.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* ist in seiner untern Hälfte etwas schwächer als in der oberen. Die übrigen Frontalwindungen sind kräftig entwickelt und von normalem Verlauf.

Lobus parietalis und **occipitalis** sind gut entwickelt mit normalen Gyri.

Der **Lobus temporalis** ist in seinem vorderen Theile etwas schwächer. Seine Windungen sind normal.

Der **Lobus falciformis** hat normalen Verlauf und normale Begrenzung.

Der **Lobus centralis** ist gut entwickelt mit kräftigen Windungen.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich wie die rechte.

Corpus callosum, *Fornix* und *Commissura anterior* normal.
Seitenventrikel etwas ausgedehnt.

Centralganglien, Pons, Medulla oblongata und **kleines Gehirn** zeigen makroskopisch nichts Abnormes.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Die Anordnung der Schichten ist vollkommen normal. Die Zellen haben im Allgemeinen Form und Struktur der Embryonalzellen, sind aber etwas grösser und kommen in einer etwas geringeren Anzahl vor als diese. Ausser diesen Zellen finden sich einige, die eine deutlichere Pyramidenform angenommen haben. In

der Ganglienzellenschicht sind die Zellen lang und schmal, haben nicht vollständig ausgebildete Pyramidenform und es finden sich manche Uebergänge zwischen Spindel- und Pyramidenzellen.

In den übrigen Frontalwindungen hat die Rinde denselben Bau, ausgenommen, dass die Zellen der Ganglienzellenschicht hier sowohl an Zahl, als Grösse geringer sind. Runde, hyaline Zellelemente, ohne Kerne und Ausläufer finden sich reichlich, sowohl in der Rinde, wie im Marke.

Die Stützsubstanz erscheint nicht erwähnenswerth verändert.

Die Zahl der Gefässe ist etwas vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht etwas schwächer als normal.

Lobus parietalis. Die Zellen sind hier in einer einzigen Schicht angeordnet, haben Form und Struktur der Embryonalzellen und sind unbedeutend grösser als diese. Alle Zellen sind ungefähr gleich gross.

Gyrus parietalis superior und *inferior.* Die Rinde hat normale Anordnung der verschiedenen Schichten, aber die Zellen haben nicht die entwickelte Zellform erlangt und sind blos wenig grösser als die unentwickelten embryonalen. Ihre Zahl ist etwas geringer als bei einem 8 Monate alten Fötus.

Auch hier finden sich runde hyaline Zellelemente in Rinde und Mark.

Die Stützsubstanz ist möglicherweise etwas dichter als normal, die Anzahl der Gefässe etwas vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist schwächer als normal.

Lobus occipitalis, temporalis und **falciformis** zeigen keine anderen Abweichungen von der Norm, als dass die Zellen nicht die Form und Grösse entwickelter Zellen erlangt haben, sondern sich wie bei einem normalen Individuum im ersten Lebensjahre verhalten. Die Zahl der Zellen ist indessen in $[0{,}1\ \mathrm{mm}]^3$ etwas geringer, als bei solchen.

Runde Zellelemente finden sich auch hier in Rinde und Mark.

Die Stützsubstanz ist nicht merkbar verändert, die Zahl der Gefässe nicht merkbar vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht erscheint etwas schwächer als bei einem normalen Individuum von gleichem Alter.

Die **Centralganglien**, die Kerne im **Pons** und in der **Medulla oblongata** zeigen keine Veränderungen.

Kleinhirn. Sowohl die Purkinje'schen Zellen, als die der Körnerschicht sind an Grösse geringer, sowohl im Vermis, als auch in den Hemisphären.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** sind kurz folgende:

Auffassung unvollständig und *höhere psychische Funktionen* nicht mehr entwickelt, als bei einem normalen Kinde im ersten Lebensjahre.

Pat. kann nicht sprechen.

Pat. kann nicht *gehen* oder *sitzen* und keine *coordinirten Bewegungen* mit den Händen ausführen.

Zuckungen im Gesicht und in den Extremitäten.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** bestehen in diesem Falle ausschliesslich aus den feineren Veränderungen in der Hirnrinde und sind folgende:

Am meisten verändert ist der *Gyrus centralis posterior*, wo die Zellen in einer einzigen Schicht angeordnet sind und Form und Charakter embryonaler Zellen haben.

Mehr entwickelt ist die Rinde in den übrigen Theilen des *Lobus parietalis* und *centralis*, wo die Anordnung der Schichten normal ist, aber die Zellen haben nicht die Form der ausgebildeten Zellen erlangt und sind ungefähr gleich gross.

In ungefähr demselben Stadium steht die Rinde im *Gyrus frontalis superior*, *medius* und *inferior*, aber hier sind die tieferen Zellen in der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht grösser und deutlicher pyramidal, obwohl sie nicht die Form ausgebildeter Zellen erreicht haben.

Etwas mehr entwickelt ist die Rinde im *Gyrus centralis anterior*, wo diese mehr entwickelten Zellen häufiger sind.

In ungefähr demselben Stadium steht die Rinde im *Lobus occipitalis*, *temporalis* und *falciformis*.

Diagnose.

Da die Pat. in psychischer Hinsicht ungefähr auf derselben Entwicklungsstufe steht, wie ein Kind im ersten Lebensjahre, dürfte es am richtigsten sein, auch diesen Fall zur Form von *Schwachsinn in hohem Grade* zu rechnen.

Was die *pathologischen Veränderungen* in der Hirnrinde betrifft, können sie auch in diesem Falle auf eine Entwicklungshemmung der Hirnrinde zurückgeführt werden.

Das am wenigsten entwickelte Gebiet, das blos aus dem Gyrus centralis posterior besteht, entspricht einem Entwicklungsstadium, wie es sich unter normalen Verhältnissen in der ersten Hälfte des Fötallebens findet (die Zellen sind noch nicht differenzirt).

Das nächst höhere Entwicklungsstadium entspricht dem *Schluss des Fötallebens* (sämmtliche Schichten sind entwickelt, aber die Zellen haben noch nicht die Form der ausgebildeten Zellen erlangt).

Das zunächst höhere dürfte dem *Anfang* und das am meisten entwickelte Gebiet dem *späteren Theil des ersten Lebensjahrs* entsprechen (ausgebildete Zellen kommen häufiger vor).

In diesem Falle ist also ungefähr um die Mitte des Fötallebens ein Moment hinzugekommen, das die Rinde in ihrer normalen Entwicklung hemmte.

Hierdurch ist ein kleineres Gebiet (blos die hintere Centralwindung) in seiner Entwicklung vollständig zum Stillstand gebracht worden, während die Entwicklung der übrigen Theile der Rinde blos verlangsamt worden ist.

Das ätiologische Moment kann in diesem Falle eben so wenig nachgewiesen werden, wie in den früheren.

Stellen wir die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologischen Veränderungen* zusammen, so können die Störungen der *Motilität* nicht allein durch den unentwickelten Zustand der Rinde in der motorischen Region erklärt werden, da der Entwicklungsgrad derselben ungefähr dem Schluss des ersten Lebensjahres entspricht.

Wenn man aber hinzurechnet, dass die Zahl der Zellen, sowohl im Allgemeinen, wie vor Allem die der Riesenzellen, bedeutend geringer als normal ist, dürften die erwähnten Störungen durch das Zusammenwirken dieser beiden Umstände erklärt werden können.

Die *Zuckungen* sind in diesem Falle eben so wenig wie in dem vorhergehenden durch die gefundenen pathologischen Veränderungen zu erklären.

Die *psychischen Defekte* können hinlänglich dadurch erklärt werden, dass die Hirnrinde nicht mehr entwickelt war als bei einem normalen Kinde im *ersten Lebensjahre.*

Zusammenfassung.

Beide in dieser Gruppe zusammengestellten Pat. können auf folgende Weise charakterisirt werden:

Sie haben Auffassung und Bewusstsein, aber ihre psychische Entwicklung steht auf einer Stufe, die sich bei normalen Individuen in den ersten Lebensjahren (1.—5. Jahr) findet.

Ebenso befindet sich der grösste Theil der Hirnrinde in einem Entwicklungsstadium, das sich bei normalen Individuen in einem der ersten Lebensjahre findet.

---

2. Mässig und in geringem Grade Schwachsinnige.

Fall 7.

Oskar Sundberg, 14 Jahre alt, gestorben am 30. Juli 1889 an Pneumonia acuta.

Krankengeschichte.

Von Nerven- oder Geisteskrankheiten in der Verwandtschaft ist nichts bekannt. Die Eltern sind nicht verwandt. Die Geschwister sind gesund und normal entwickelt.

Pat. ist keinem Trauma ausgesetzt gewesen. Von Krankheiten hat er Masern, Scharlachfieber und Keuchhusten überstanden. Im Alter von $^1/_2$ Jahr wurde er wegen »Abscessen» am Halse behandelt.

Zu dieser Zeit konnte nach den Angaben nichts Abnormes in Bezug auf die physische oder psychische Entwicklung des Pat. nachgewiesen werden. Ein bestimmter Zeitpunkt, zu welchem die Idiotie zuerst bei dem Pat. beobachtet worden ist, kann nicht angegeben werden, auch nicht, welches die ersten Zeichen waren.

Im Alter von 4 Jahren konnte er nach den Angaben sprechen, obwohl undeutlich. Ueber die Entstehung der Paralyse der untern Extremitäten findet sich keine Angabe.

Bei der Aufnahme in der Anstalt konnte er einigermassen begreifen, was zu ihm gesagt wurde, ebenso Antworten geben auf Fragen über Sachen, die sein tägliches Leben betrafen. Buchstaben und Ziffern konnte er nicht auffassen, er zeigte auch keine Neigung zu irgend etwas.

Er war still und freundlich und von fröhlicher Stimmung. Die Gedankenthätigkeit war träg, der Wille frei.

Während des Aufenthalts in der Anstalt entwickelte er sich zum Bessern und konnte sich den theoretischen Unterricht, den er bekam, zu Nutze machen. Obwohl er in Folge von Lähmung der Beine nicht an den Spielen der Kameraden Theil nehmen konnte, folgte er ihnen

doch mit grossem Interesse. Er verstand die Freundlichkeit und Sorgfalt, die ihm von seinen Umgebungen zu Theil wurde, und freute sich darüber.

Einige Wochen vor dem Tode des Pat. wurde folgender Zustand gefunden:

Psychische Funktionen. *Stimmung* gleichmässig und sanft.

Auffassung zwar langsam und träg, aber correkt. Für Naturlehre, worin er Anschauungsunterricht bekam, zeigte er grosses Interesse und machte darin gute Fortschritte. Auch den Religionsunterricht benutzte er mit Erfolg.

Das *Urtheil* war unentwickelt, die *Gedankenthätigkeit* träg, obwohl lebhafter als bei der Aufnahme des Pat. in der Anstalt.

Der *Wille* war frei und abnorme Triebe konnten nicht beobachtet werden.

Seelenblindheit oder *Seelentaubheit* fand sich nicht vor. Keine Schwierigkeit, Gegenstände oder Laute aufzufassen und wiederzuerkennen, mit Ausnahme von Melodien; er zeigte kein Interesse für Musik.

Aphasie. Er verstand, was zu ihm gesagt wurde, wenn es sich um einfache Verhältnisse handelte, und konnte darauf antworten. An Namen von Personen und Gegenständen konnte er sich erinnern, rechnen konnte er nicht.

Er konnte nicht lesen; er hatte blos die Selbstlauter gelernt und las diese in Verbindung mit einigen wenigen Mitlautern, die er auch schreiben konnte.

Aus der Schriftprobe geht hervor, dass er recht wohl einige wenige Buchstaben bilden konnte, so lange er die Vorschrift vor Augen hatte, aber am Schlusse der Zeile im Schreibbuch wich er immer mehr von den vorhergehenden Buchstaben ab.

Cranialnerven. I. Im Geruch konnte beim Pat. keine Abnormität bemerkt werden.

II. Sehschärfe normal. Eine Einschränkung des Gesichtsfeldes konnte nicht beobachtet werden.

III, IV, VI. Ungleichheiten oder Abweichungen in Bezug auf die Pupillen oder das Bewegungsvermögen der Augen wurden nicht beobachtet.

V, VII. Keine Abweichungen beobachtet.

VIII. Hörvermögen normal und gleich auf beiden Seiten.

IX. Geschmack normal.

X, XI, XII. Keine Abweichung beobachtet.

Sensibilität normal.

Motilität. Vollständige Paralyse in den unteren Extremitäten, Parese in den obern. Keine Zuckungen oder Anfälle. Keine Contracturen, keine deutliche Atrophie.

Sektion.

In Bezug auf Schädeldach und Dura ist nichts bemerkt. Das ganze Gehirn wiegt, in Spiritus gehärtet, 840 g, die rechte Hemisphäre 368 g, die linke Hemisphäre 366 g, Pons mit Medulla oblongata 106 Gramm. Die Länge der Hemisphären beträgt 15 Centimeter.

Weiche Hirnhäute normal.

Makroskopische Untersuchung der linken Hemisphäre.

Der **Lobus frontalis** ist in seiner Gesammtheit gut entwickelt.

Der *Gyrus centralis anterior* ist schmal und verläuft fast vertikal. Mehrere kleine Sulci schneiden tief in denselben ein. Die *Gyri frontales* sind sämmtlich kräftig entwickelt, stark gewunden und von normalem Verlauf.

Der **Lobus parietalis** ist ebenfalls kräftig entwickelt und seine Windungen sind reichlich durch eine Menge oberflächlicher kleiner Sulci eingeschnitten.

Der *Gyrus centralis posterior*, der einen vertikalen Verlauf hat, ist kräftiger als der Gyrus centralis anterior.

Die *Gyri parietales* haben einen normalen Verlauf und sind gut entwickelt.

Der **Lobus occipitalis** ist ebenfalls gut entwickelt und seine Windungen sind reichlich gewunden. Die Fissura occipitalis interna schneidet durch die Margo falcata und erstreckt sich an der lateralen Seite 2 cm nach innen. Schon 1 cm von der Margo falcata geht dicht unter der Hirnoberfläche ein Uebergangsgyrus vom Gyrus parietalis superior zum Gyrus occipitalis superior.

Der **Lobus temporalis** ist in seinem hintern und mittleren Drittel kräftig entwickelt, mit normalen, stark gewundenen Gyri, aber das vordere Drittel ist bedeutend reducirt, so dass die ganze Orbitalfläche der 3. Frontalwindung entblöst liegt.

Die Reduktion hat hauptsächlich den Gyrus temporalis medius und internus betroffen, während der Gyrus temporalis superior nahezu normale Länge und Grösse hat.

Lobus falciformis. Gyrus hippocampi und Gyrus cinguli sind kräftig entwickelt und von normalem Verlauf.

Der **Lobus centralis** zeigt keine Abweichungen von der Norm.

Die **rechte Hemisphäre** zeigt keine anderen Abweichungen von der eben gegebenen Beschreibung der linken, als dass der Gyrus centralis anterior etwas breiter und weniger gewunden ist, sowie dass der Temporallappen in seiner Gesammtheit gut entwickelt ist.

Auf sämmtlichen 2 cm dicken Querschnitten, in die die Hemisphären getheilt wurden, fanden sich überall im Mark kleine, stecknadelspitzen- bis stecknadelkopfgrosse Pünktchen und Flecke von einer dunkleren Farbe als das Mark, sowie von einem halb durchscheinenden, bisweilen fettglänzenden Aussehen. Sämmtliche Flecke sind von einem schmalen, helleren Ring umgeben. Was die Vertheilung dieser Flecke betrifft, finden sie sich überall im Marke, vielleicht am reichlichsten in den Frontallappen, und in beiden Hemisphären in ungefähr gleich grosser Ausdehnung.

Die **Centralganglien**, der **Pons**, die **Medulla oblongata** und das **kleine Gehirn** boten nichts Bemerkenswerthes.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* Die Rinde im oberen Sechstel von dem zur lateralen und in dem ganzen zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung hat einen von der Rinde in den übrigen motorischen Regionen abweichenden Bau.

In der Rinde, die hier 2,20 mm in der Dicke misst, können nur 3 Schichten unterschieden werden.

Zuoberst findet sich eine 0,20 mm breite *I. Schicht* ohne Nervenzellen.

Darauf kommt eine 1,20 mm dicke *Pyramidenzellenschicht*, bestehend aus nahezu gleich grossen Pyramidenzellen, die $8-9\,\mu \times 10-14\,\mu$ messen und sich in einer Anzahl von 40 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ finden. In dieser Schicht sind die Zellen in jeder Tiefe gleichförmig angeordnet und finden sich in derselben Menge.

An der Grenze von der folgenden Schicht, sowie in der Mitte der Schicht finden sich vereinzelte, etwas grössere Pyramidenzellen, die

jedoch eine Grösse von $12\,\mu \times 18\,\mu$ nicht übersteigen. Diese Zellen sind sehr gering an Zahl und finden sich nur auf einzelnen der Serienschnitte. Gegen die nächste Schicht besteht eine scharfe Grenze.

Diese 0,80 mm dicke *Spindelzellenschicht* ist gebildet aus $8 - 10\,\mu$ breiten, und $15 - 20\,\mu$ langen Spindelzellen, 30 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$.

Zwischen dem Mark und dieser Schicht findet sich keine scharfe Grenze, sondern weit in die Marksubstanz hinein finden sich zahlreiche Spindelzellen.

Zwischen den Zellen in der ganzen Rinde, aber besonders zwischen den Spindelzellen, finden sich eingestreut eine grosse Menge, theils runder, ovoider oder ovaler einige μ grosser Zellelemente, bestehend aus einem feingranulirten Protoplasma ohne Kern, sowie mit einem nach unten verlaufenden feinen Fortsatz versehen, und theils runde Zellen von derselben Grösse, aber ohne Fortsätze und weissen Blutkörperchen gleichend.

Die Pyramidenzellen haben eine abgerundete Form, mit äusserst feinen und meist an Zahl geringen Ausläufern. Das Protoplasma ist feingranulirt, die Kerne sind beträchtlich gross, nehmen meist den grösseren Theil der Zelle ein und haben im Allgemeinen die Form der Zelle.

Auch die Spindelzellen haben eine mehr abgerundete Form, feine Ausläufer und grosse Kerne. So ist das Verhalten in der Kuppe der Windung.

An der Seitenfläche der Windung und im Boden eines Sulcus sind die Zellen in der Pyramidenzellenschicht etwas grösser, $10 - 12\,\mu \times 18 - 20\,\mu$, und mit etwas mehr und kräftigeren Ausläufern versehen. Ihre Form ist nicht so abgerundet. Die Spindelzellenschicht, die hier 0,30 mm misst, ist von horizontal gestellten kleinen Spindelzellen gebildet, die den kurz vorher beschriebenen Spindelzellen gleichen.

Nirgends in dem ganzen Gebiete finden sich irgend welche Riesenzellen.

Weiter nach unten an der Windung beginnen die tieferen Zellen der Pyramidenzellenschicht an Grösse zuzunehmen und gleichzeitig nehmen sie an Menge ab. Eine Andeutung zu einer Zertheilung in eine 3. Schicht und eine Ganglienzellenschicht tritt immer deutlicher hervor, und ungefähr 3 cm unter der Margo falcata hat die Rinde einen nahezu normalen Bau angenommen, was die Anordnung der Zellen und die Grösse der tieferen Pyramidenzellen betrifft. Hier treten nämlich vereinzelte grosse Riesenzellen im tiefsten Theile der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht auf. Die Zellen, die $32\,\mu \times 48\,\mu$ an Grösse messen, bilden keine Gruppen.

Die obere Hälfte der 3. Schicht, sowie, obwohl in geringerem Grade, der tiefere Theil der Rinde enthalten nebst einigen grösseren ($12\,\mu \times 18\,\mu$) Zellen auch kleinere Zellen ($8 - 10\,\mu \times 10 - 12\,\mu$) mit abgerundeten Conturen und feinen, an Zahl wenigen Fortsätzen. Diese Zellen gleichen denen, die im Lobus paracentralis vorkommen.

Denselben Bau hat die Rinde im ganzen übrigen Theile des Gyrus centralis anterior. Die Riesenzellen scheinen in geringerer Anzahl als normal vorzukommen, sind im Allgemeinen vereinzelt und nicht in deutlichen Gruppen angeordnet.

Der feinere Bau der Zellen zeigt keine Abweichung vom Normalen, nur der Kern ist grösser als normal und folgt getreuer als normal der Form der Zelle. Fortsätze finden sich ungefähr in normaler Anzahl.

Der *Gyrus frontalis superior* hat im grösseren Theile des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Abschnitts denselben Bau wie der Lobulus paracentralis und ist folglich zusammengesetzt aus 3 Schichten mit kleinen, gleich grossen unentwickelten Zellen in der 2., 3., und 4. Schicht und in der Ganglienzellenschicht.

Nach der Spitze des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles der Windung zu, sowie im orbitalen Theile derselben ist eine 4. Schicht angedeutet, zugleich nehmen die Zellen an den Seitenflächen der Windung an Grösse zu und an Menge ab. Sie messen $11 - 13\,\mu \times 15 - 20\,\mu$ an Grösse und kommen in einer Anzahl von 30 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor, während sie in der Mitte des Querschnittes vollkommen denen im Lobulus paracentralis gleichen.

Die nach dem Gyrus cinguli hin gelegene Hälfte des zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theiles der Windung hat einen mit der Rinde im Gyrus cinguli übereinstimmenden Bau.

Der *Gyrus frontalis medius* verhält sich in seinem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theil wie der Gyrus centralis anterior, ausgenommen, dass nach der Spitze der Windung zu eine 4. Schicht immer deutlicher hervortritt, zugleich nehmen die Zellen in der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht etwas an Grösse zu und bekommen etwas gröbere Ausläufer. Blos im hinteren Umfang der Windung werden einige Riesenzellen angetroffen.

Der orbitale Theil der Windung verhält sich auf dieselbe Art, hier ist die 4. Schicht noch deutlicher und von kleinen Pyramidenzellen gebildet, die $2 - 3\,\mu \times 8\,\mu$ messen. Die Spindelzellenschicht ist hier etwas mächtiger und es findet sich eine deutliche 2. Schicht von $0{,}05 - 0{,}10$ mm Breite vor und gebildet aus $2 - 3\,\mu$ breiten Pyramidenzellen.

Der *Gyrus frontalis superior* hat eine normale Anordnung der Zellen, aber diese sind etwas kleiner als normal. Sie messen $12\,\mu \times 18\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 20 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Sie haben grosse Kerne und wenige feine Fortsätze, zugleich treten zwischen ihnen die oben beschriebenen runden und ovalen Elemente in grosser Menge auf.

Die Stützsubstanz zeigt in der ganzen Rinde nirgends irgendwelche augenscheinliche Veränderungen. Die Menge der Gefässe ist möglicherweise etwas grösser als normal in der vordern Hälfte des Lappens.

Das Mark ist überall durchsetzt von den weissen Blutkörperchen gleichenden runden Zellelementen von demselben Aussehen wie die oben beschriebenen in der Rinde. Hier und da finden sich in der Marksubstanz runde, $30 - 50\,\mu$ grosse Räume, gefüllt mit einer homogenen, stärker als die Glia brechenden Substanz, die sich oft mit Methylenblau färbt und dann ein feinkörniges Aussehen annimmt. Diese Räume scheinen mit den Lymphbahnen um die Gefässe herum zusammenzuhängen.

Eine Abweichung in dem Verhalten der Nervenfasern kann nicht nachgewiesen werden, nur ist die Associationsfaserschicht der ersten Schicht etwas schwächer als normal, besonders im obern Umfang und in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des Gyrus centralis anterior.

Lobus parietalis. *Gyrus centralis posterior.* Diese Windung weicht von der Norm darin ab, dass blos im tiefsten Theile der Pyramidenzellenschicht, sowie theilweise in der Ganglienzellenschicht grössere ($16\,\mu \times 25\,\mu$ grosse) Zellen sich vorfinden, während die übrigen Zellen den oben beschriebenen unentwickelten Zellen im Frontallappen gleichen, sowohl an Form wie an Bau und Zahl, sie sind $8 - 10\,\mu$ breit und kommen in einer Anzahl von 35 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor.

An den Seitenflächen der Windung sind die Zellen grösser und deutlicher differenzirt als in der Mitte der Windung.

Der *Gyrus parietalis superior* verhält sich normal, ausgenommen dass die Anzahl der Zellen in sämmtlichen Schichten und die Grösse der Zellen etwas geringer als normal sind. Sie kommen in einer Anzahl von 5 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor in der Pyramidenzellenschicht, von 6 in der Ganglienzellenschicht und von 10 in der Spindelzellenschicht.

Der *Gyrus parietalis inferior* weicht in nichts weiter von der Norm ab, als dass die Anzahl der Zellen in sämmtlichen Schichten, sowie deren Grösse geringer als normal ist.

In der Rinde des ganzen Lappens finden sich die oben beschriebenen runden und ovalen Zellelemente mit einem Fortsatze, sowie die den weissen Blutkörperchen gleichenden Zellen, reichlich im Gyrus centralis posterior und spärlich im Gyrus parietalis inferior.

Das Mark ist reichlich durchsetzt von diesen letzteren Zellen, sowie näher an der Rinde von Spindelzellen, die denen in der Spindelzellenschicht gleichen. Die oben beschriebenen Höhlen mit hyalinem Inhalt finden sich spärlich hier und da im Marke. Die Zahl der Gefässe ist nicht merkbar vermehrt. Die Stützsubstanz weicht nicht von der Norm ab.

Lobus occipitalis. Der zur lateralen und untern Hirnoberfläche gehörende Theil der Rinde der Windung hat durchaus einen normalen Bau, mit der Ausnahme, dass die Anzahl der Zellen in den verschiedenen Schichten ungefähr die Hälfte der normalen beträgt, sowie dass die Grösse etwas geringer als normal ist. Die Zellen der Pyramidenzellenschicht kommen in einer Anzahl von 5 i $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ vor.

Die zur medialen Hirnoberfläche und zur Spitze des Orbitallappens gehörende Rinde zeigt eine vollkommen normale Anordnung der zellenreichen und zellenarmen Schichten. Die in den letzteren vorkommenden grossen Pyramidenzellen sind an Anzahl sehr reducirt, so dass man auf langen Strecken keine einzige derselben sieht. Im Allgemeinen sind sämmtliche Zellen im Occipitallappen etwas kleiner als normal und haben grössere und deutlichere Kerne als entsprechende Normalpräparate. Ihre Anzahl ist ungefähr normal.

Die Stützsubstanz und die Gefässe zeigen nichts Abnormes.

Sowohl in der Rinde wie im Marke kommen die oben beschriebenen runden und ovalen Zellelemente vor, obwohl in geringerer Anzahl als im Frontallappen.

Auch hier finden sich die oben beschriebenen Höhlen mit hyalinem Inhalt.

Im Verhalten der Nervenfasern kann keine Veränderung nachgewiesen werden.

Lobus temporalis. Im *Gyrus temporalis superior*, *medius* und *inferior* besteht die oberste Hälfte der Pyramidenzellenschicht aus kleinen unentwickelten Zellen in einer Anzahl von 35 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$, während die tiefere Hälfte sammt der Ganglienzellenschicht sich normal verhält, ausser, dass die oben beschriebenen kleinen Zellelemente zwischen ihnen in ziemlich grosser Menge vorkommen. Je mehr man sich der Spitze des linken Temporallappens nähert, desto kleiner werden die Zellen und in der Mitte

der Windung sind sämmtliche Pyramidenzellen gleich gross und nicht differenzirt in Pyramidenzellen- und Ganglienzellenschicht.

Auch hier kommen, sowohl in der Rinde wie im Marke, die runden Zellelemente vor, ungefähr in gleicher Anzahl wie im Occipitallappen.

Die Höhlen im Marke kommen sehr spärlich vor.

Die Anzahl der Nervenfasern zeigt keine augenscheinliche Verminderung.

Lobus falciformis. Im *Gyrus hippocampi* sind die Zellen an Grösse und Zahl reducirt.

Gyrus cinguli. Die Anordnung der Zellen ist die normale, Grösse und Menge sind etwas reducirt. Sie messen $14 - 16\,\mu \times 20 - 25\,\mu$ und kommen in einer Anzahl von 8 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$ vor. Wenige runde Zellelemente in Rinde und Mark. Gefässe und Stützsubstanz zeigen keine Abweichung.

Der **Lobus centralis** besteht aus 3 Schichten: einer oberflächlichen zellenfreien, einer Pyramidenzellenschicht mit unentwickelten ($8\,\mu \times 10\,\mu$ grossen) Zellen in einer Anzahl von 40 in $[0{,}1\text{ mm}]^3$), sowie einer aus kleinen ($8\,\mu \times 20 - 25\,\mu$) Spindelzellen bestehenden Schicht. Die Dicke der Rinde ist normal. Ganz wenige runde Zellelemente in Rinde und Mark und keine Hohlräume im Mark.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist schwächer als normal.

Im *Septum pellucidum* haben keine Nervenzellen entdeckt werden können.

Die **centralen Ganglien** zeigen nichts Abnormes.

Kleinhirn. Die Purkinje'schen Zellen sind in beiden Hemisphären an Anzahl etwas reducirt. Ihre Form, Grösse und Struktur sind normal. Die Zellen des Vermis zeigen keine Abweichung von der Norm.

Die runden Zellelemente kommen sowohl in der Rinde, wie im Marke vor, obwohl in geringerer Anzahl als im grossen Gehirn.

Die **Kerne** im **Pons** und in der **Medulla oblongata**, sowie die *Bahnen* zeigen nichts Abnormes.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** sind kurz folgende:

Auffassung langsam und träg, aber im Uebrigen correkt.

Urtheil unentwickelt.

Gedankenthätigkeit träg und beschränkt.

Pat. konnte nicht rechnen und nicht lesen.

Pat. *entwickelte sich* während des Aufenthaltes in der Anstalt und konnte zum Theil aus dem theoretischen Unterricht Nutzen ziehen.

Paralyse in den untern, *Parese* in den obern Extremitäten.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** sind in diesem Falle folgende:

Gehirn kleiner als normal.

Das vordere Drittel des Gyrus temporalis medius und internus fehlt.

Die *feineren Veränderungen der Hirnrinde* sind folgende:

Am meisten verändert ist die Rinde im obern Theile des *Gyrus centralis anterior* und in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus frontalis superior*, im vordern Theil des *Gyrus temporalis superior* und im *Lobus centralis*. Die Zellen, die hier eine unentwickelte Form haben, stimmen sowohl an Zahl, als Grösse und Struktur mit den Zellen im entsprechenden Rindengebiete bei einem normalen Individuum im ersten Lebensjahre überein. Riesenzellen fehlen ganz im obern Theile des Gyrus centralis anterior.

Im *Gyrus centralis posterior* und im hintern Theile des *G. temporalis superior* finden sich im tieferen Theile der Pyramidenzellenschicht und in der Ganglienzellenschicht grössere und mehr entwickelte Zellen.

In derselben Weise verhält sich der *Gyrus frontalis inferior*, doch sind hier sämmtliche Zellen etwas grösser und ihre Zahl ist geringer als im *Gyrus centralis anterior*, aber sie sind an Grösse geringer und ihre Zahl ist grösser als normal.

Die Rinde im *Gyrus parietalis superior* und *inferior*, sowie im *Lobus falciformis* und *occipitalis* weicht von dem Normalen in keiner anderen Beziehung ab, als darin, dass die Anzahl der Zellen bedeutend geringer als normal ist und ihre Grösse ebenfalls etwas geringer als normal ist.

Runde Zellelemente in Rinde und Mark.

Im Marke kommen Höhlen vor, die wahrscheinlich ausgedehnte Lymphräume sind.

Die Purkinje'schen Zellen im kleinen Gehirn sind an Anzahl geringer als normal.

Diagnose.

Da die psychischen Funktionen im Verhältniss zum Alter des Pat. unvollständig entwickelt waren und da während des Aufenthalts in der Anstalt eine wirkliche Besserung im psychischen Zustande des Pat. eintrat, muss der Fall zu der Gruppe der mässig und in geringem Grade Schwachsinnigen gerechnet werden.

Was die *feineren Veränderungen in der Hirnrinde* betrifft, können sie auch hier in der Hauptsache auf eine Entwicklungshemmung der Hirnrinde zurückgeführt werden.

Das am wenigsten entwickelte Gebiet steht auf einer Entwicklungsstufe, wie sie sich bei normalen Individuen im 1. Lebensjahre wiederfindet.

Ein anderes Gebiet hat eine etwas höhere Entwicklung erreicht, wie sie sich bei Normalen näher dem 2., als dem 10. Lebensjahre wiederfinden dürfte.

Die am meisten entwickelten Gebiete haben in Bezug auf Anordnung und Form der Zellen eine dem Alter entsprechende Entwickelung erreicht, aber Anzahl und Grösse der Zellen ist geringer als normal.

In diesem Falle dürfte also im ersten Lebensjahre ein Moment eingetroffen sein, das hemmend auf die normale Entwicklung der Rinde wirkte. Ein ziemlich grosser Abschnitt der Frontal-, Central- und Temporallappen ist hierdurch in seinem Wachsthum vollständig zum Stillstand gebracht worden, während andere Abschnitte ihre Entwickelung nur unvollständig fortzusetzen vermochten und auf verschiedenen Entwicklungsstufen zum Stillstand kamen, die blos theilweise mit den Entwicklungsstadien der normalen Rinde verglichen werden können.

So kann die Rinde in dem am meisten entwickelten Gebiete, das den grösseren Theil des Lobus parietalis, den ganzen L. occipitalis und falciformis umfasst, in Bezug auf die Grösse der Zellen mit der Rinde eines normalen 10 Jahre alten Individuum verglichen werden, aber in Bezug auf die Anzahl der Zellen findet sich keine Uebereinstimmung mit normaler Rinde in irgend einem Entwicklungsstadium.

Die hier vorfindliche Verminderung in der Anzahl der Zellen kann entweder auf einer Zerstörung fertig gebildeter Zellen beruhen, auf einer von Anfang an zu knappen Anlage, oder auch darauf, dass unter normalen Verhältnissen während der Entwicklung der Hirnrinde eine Neubildung von Zellen stattfindet, hier aber nicht zu Stande gekommen ist.

Gegen eine Zerstörung fertig gebildeter Zellen spricht die Abwesenheit jedes Zeichens von Atrophie oder Degeneration.

Gegen eine von Anfang an knappe Anlage kann der Umstand sprechen, dass die Anzahl der Zellen im Verhältniss zur Dicke der Rinde im Embryonalstadium und hier ungefähr dieselbe ist.

Diese Umstände im Verein mit dem Faktum, dass die Anzahl der Zellen im Verhältniss zur Dicke der Rinde beim Fötus geringer ist, als bei einem zehnjährigen Individuum, deuten darauf hin, dass eine unter

normalen Verhältnissen vorhandene Neubildung von Zellen hier nicht zu Stande gekommen ist.

Ein ätiologisches Moment für die in diesem Falle vorhandene Entwicklungshemmung hat nicht nachgewiesen werden können.

Was die Bedeutung der runden Zellelemente, die Gefässvermehrung und die Verminderung der Nervenfasern in der ersten Schicht betrifft, sei auf das hingewiesen, was in den vorhergehenden Fällen darüber geäussert worden ist.

In welchem Zusammenhange die hier vorgefundenen Hohlräume im Marke, die mit Wahrscheinlichkeit ausgedehnte Lymphräume sind, zu dem pathologischen Processe stehen, muss unentschieden gelassen werden.

Die Verminderung der Zellen in den Kleinhirnhemisphären dürfte mit der in den Grosshirnhemisphären gleichbedeutend sein.

Stellen wir die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologischen Veränderungen zusammen*, so können die *Störungen der Motilität* dadurch erklärt werden, dass die Rinde im entsprechenden Theile der *motorischen Region* nicht mehr entwickelt ist, als bei einem normalen Individuum im ersten Lebensjahre, sowie dass die Riesenzellen im grösseren Theile dieser Region fehlen.

Als pathologisch-anatomische Unterlage für die *psychischen Defekte*, die hier nur mit Schwierigkeit auf eine Entwicklungshemmung zurückgeführt werden können, die einem gewissen Alter im normalen Zustande entspräche, haben wir gefunden 1) eine *Entwicklungshemmung* eines grossen Theiles der Hirnrinde in einem Stadium, das sich bei Normalen im *1. Lebensjahre* wiederfindet, 2) eine *Entwicklungshemmung* eines andern Gebietes, in einem Stadium, das sich bei Normalen zwischen dem *2. und 10. Lebensjahre* findet, sowie 3) eine bedeutende *Verminderung der Anzahl der Nervenzellen* in den übrigen Theilen der Rinde.

Es ist also in diesem Falle nicht gelungen, sowohl die psychischen Defekte wie auch die Veränderungen im grössten Theile der Hirnrinde auf ein bestimmtes Entwicklungsstadium beim Normalen zurückzuführen.

Fall 8.

Frans Håkansson, 12 Jahre alt, gestorben am 9. Dec. 1889 an Miliartuberkulose.

Krankengeschichte.

Zwei Geschwister des Pat. sind. »schwachsinnig». Ausserdem ist von Nerven- oder Geisteskrankheiten in der Verwandtschaft nichts bekannt.

Ob der Pat. eine Verletzung erlitten oder Krankheiten überstanden hat, ist unbekannt. Wann die ersten Zeichen der Idiotie bemerkt wurden, ist ungewiss. Er lernte gehen und sprechen im Alter von 3 Jahren.

Bei der Aufnahme im Idiotenheim war Pat. reizbar von Stimmung. Die Auffassung war träg und unvollständig. Er verstand zwar, was zu ihm gesagt wurde, konnte aber Aufträge, die ihm gegeben wurden, nicht ausrichten. Er konnte weder lesen, noch schreiben, auch nicht genügend sich selbst behelfen.

Während des Aufenthaltes in der Anstalt blieb allerdings eine gewisse Reizbarkeit der Stimmung, aber er wurde doch freundlicher mit seiner Umgebung. Die Auffassung wurde vollständiger und er gab Acht auf das, was sich um ihn herum zutrug. Er lernte sich selbst behelfen, kleine Aufträge ausrichten und zog Nutzen aus dem Unterrichte, der ihm gegeben wurde. Er nahm nicht an den Spielen der Kameraden Theil, sah ihnen aber gern zu. Einige Wochen vor dem Tode des Pat. fand sich sein Zustand folgendermaassen:

Psychische Funktionen. Stimmung reizbar. *Auffassung* träg, aber correkt. Urtheil unvollständig. *Gedankenthätigkeit* träg. *Gedächtniss* gut.

Seelenblindheit oder *Seelentaubheit* fand sich nicht. Er erkannte Gegenstände und Laute wieder, lenkte aber die Aufmerksamkeit nicht auf Melodien, die gesungen oder gespielt wurden.

Aphasie. Er verstand, was zu ihm gesagt wurde, verstand auf vorgelegte Fragen zu antworten, erinnerte sich an die Namen von Gegenständen oder Personen.

Er stammelte etwas.

Er konnte nicht lesen in Folge davon, dass sein Sehvermögen schwach war. Mündliche Erzählungen verstand er und konnte auf ihm vorgelegte, den Inhalt betreffende Fragen zufriedenstellende Antworten

geben. Im Allgemeinen ersetzte sein gutes Gedächtniss das schlechte Sehvermögen.

Er lernte nicht schreiben.

Cranialnerven. I. Am *Geruch* des Pat. wurde keine Abnormität beobachtet.

II. In Bezug auf das *Sehen* wird angegeben, dass das Sehvermögen schwach war. Er hielt die Augen gewöhnlich geschlossen und schien starkes Licht nicht aushalten zu können.

Eine bedeutendere Herabsetzung der Sehschärfe war jedoch nicht vorhanden, da Pat. durch das Gesicht Personen und Gegenstände erkennen konnte und sich im Zimmer frei bewegen konnte. Eine specielle Untersuchung der Augen wurde nicht vorgenommen.

III, IV, VI. In der *Stellung* oder in den *Bewegungen* der Augen konnte keine Abnormität wahrgenommen werden.

VIII. *Gehör* normal.

V, VII, IX, X. Nichts Abnormes.

XI, XII. Nichts Abnormes.

Sensibilität: nichts Abnormes beobachtet.

Motilität normal.

Trophische Störungen. Die eine Seite des Gesichts soll etwas kleiner gewesen sein, als die andere. (Wahrscheinlich eine Bildungsanomalie.)

Zuckungen traten bisweilen in den Muskeln des Gesichtes auf.

Sektion.

Ueber das Schädeldach und die Dura ist nichts bemerkt.

Makroskopische Untersuchung der Hirnhemisphären.

Grösse und Windungsreichthum des Gehirns sind normal.

Die Gyri sind kräftig und gut entwickelt, haben überall normalen Verlauf.

Die Fissura occipitalis interna schneidet an beiden Seiten in die Margo falcata ein und erstreckt sich ungefähr 1 cm weit auf der lateralen Hemisphären-Oberfläche.

Auf 1 cm dicken Querschnitten durch beide Hemisphären konnte nichts Abnormes entdeckt werden.

Centralganglien, Pons, Medulla oblongata und **Kleinhirn** erscheinen makroskopisch normal.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior* zeigt überall eine normale Anordnung der Zellen, die auch normale Grösse und Struktur haben. Die Form der grossen Pyramidenzellen und der Riesenzellen ist etwas mehr langgestreckt, als man es bei normalen Individuen desselben Alters findet.

Die Menge sämmtlicher Zellen ist geringer als normal, besonders ist die Spindelzellenschicht ganz arm an Zellen. Die Riesenzellen sind relativ am reichlichsten vorhanden und die Zellengruppen kommen an den gewöhnlichen Stellen vor. Die Zellen kommen in der Pyramidenzellenschicht in einer Anzahl von 10 und in der Spindelzellenschicht von 5 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ vor.

Gyrus frontalis superior und *medius* zeigen normales Verhalten in Bezug auf Anordnung und Form der Zellen.

Die Anzahl sämmtlicher Zellen ist bedeutend geringer als normal. Sie messen in der 3. Schicht $12\,\mu \times 18\,\mu$ und ihre Anzahl ist 7 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$.

In der Ganglienzellenschicht ist die Grösse der Zellen $14\,\mu \times 18\,\mu$ und ihre Anzahl ist 5 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$.

Die Kerne sind grösser als gewöhnlich.

Der *Gyrus frontalis inferior* ist im hintern Theile des zur lateralen Oberfläche des Gehirns gehörenden Abschnitts der Windung relativ reicher an Zellen, stimmt aber im Uebrigen mit den andern Frontalwindungen überein.

In seinen sämmtlichen Windungen, weniger reichlich im Gyrus centralis anterior und im hintern Theile des Gyrus frontalis inferior, aber in bedeutender Menge in den übrigen Theilen des Lappens, kommen kleine runde Zellelemente vor, denjenigen gleichend, die in den vorhergehenden Fällen beschrieben worden sind.

Die Gefässe sind an Zahl vermehrt, am wenigsten im Gyrus centralis anterior, am meisten in der vordern Hälfte des Lappens. Die Stützsubstanz zeigt keine Abweichungen vom Normalen.

Die Anzahl der Nervenfasern in der Associationsfaserschicht der ersten Schicht erscheint etwas geringer als normal im vordern Theile des Lappens.

Lobus parietalis. In sämmtlichen Parietalwindungen haben die Zellen normale Anordnung. Was die Struktur der Zellen betrifft, sind die Kerne grösser als normal, und was die Grösse der Zellen betrifft,

so findet sich neben einer geringeren Anzahl normal grosser Zellen auch eine grosse Menge kleinerer Zellen, die $8\,\mu \times 12\,\mu$ messen. Diese Zellen haben eine mehr abgerundete Form und feinere Fortsätze als normal.

Ueberall finden sich die oben beschriebenen kleinen runden Zellelemente. Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist etwas schwächer als normal.

Die Stützsubstanz zeigt nichts Abnormes. Die Anzahl der Gefässe ist etwas vermehrt.

Lobus occipitalis. *Gyrus occipitalis superior.* Die Zellen in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung sind kleiner als normal und nur die tiefsten Zellen in der Pyramidenzellenschicht und einzelne Zellen in der Ganglienzellenschicht haben normale Grösse. Diese normal grossen Zellen finden sich in einer Anzahl von 10 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$.

Die kleinen Zellen haben eine birnenartige Form, grosse Kerne und feine Fortsätze. Ihre Anzahl ist 25 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$.

Denselben Bau hat die Rinde im ganzen *Gyrus occipitalis inferior externus* und im grösseren Theile des *Gyrus occipitalis inferior internus.*

In dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung und in dem nach der Fissura calcarina gerichteten Theile des Gyrus occipitalis inferior internus zeigt die Rinde eine normale Anordnung von zellenreichen und zellenarmen Schichten.

Die grossen Pyramidenzellen in den zellenarmen Schichten sind an Anzahl bedeutend geringer als normal. Die vorhandenen kleinen ($8\,\mu \times 10 - 12\,\mu$) Zellen weichen nicht von dem Normalen ab.

Die oben beschriebenen Zellelemente kommen in ziemlich reichlicher Menge vor, sowohl in der Rinde, als im Mark.

Die Stützsubstanz zeigt nichts von der Norm Abweichendes. Die Zahl der Gefässe ist etwas vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist etwas schwächer als normal.

Der **Lobus temporalis** zeigt in seiner vordern Hälfte keine andere Abweichung von dem Normalen, als dass die oben beschriebenen runden Zellelemente in ziemlich grosser Menge überall vorkommen, sowohl in der Rinde, als auch im Marke.

Die Anzahl der Zellen ist in der hintern Hälfte des Lappens geringer als normal (die Pyramidenzellen kommen in einer Anzahl von 8 in $[0{,}1\ \text{mm}]^3$ vor) und hier ist auch die Anzahl der Gefässe vermehrt.

Die Associationsfaserschicht der ersten Schicht ist etwas schwächer als normal.

Lobus falciformis und **centralis** weichen nicht vom Normalen ab, ausgenommen, dass runde Zellelemente in reichlicher Menge sowohl in der Rinde wie im Marke vorkommen, sowie dass die Anzahl der Zellen etwas geringer als normal ist.

Die Veränderungen sind ungefähr gleich vertheilt in beiden Hirnhälften.

Die **Centralganglien** zeigen keine Abweichung vom Normalen.

Pons und **Medulla oblongata** bieten nichts Abnormes.

Das **kleine Gehirn** zeigt normale Verhältnisse, ausser dass die Purkinje'schen Zellen in beiden Hemisphären an Anzahl etwas geringer als normal sind.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** waren kurz folgende:

Auffassung träg. *Gedächtniss* gut. Uebrige *psychische Funktionen* im Verhältniss zum Alter des Pat. geringer entwickelt.

Pat. hatte weder lesen, noch schreiben gelernt.

Sehen schwach. Pat. entwickelte sich in psychischer Hinsicht während des Aufenthaltes in dem Idiotenheim.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** betreffen ausschliesslich den feineren Bau der Hirnrinde.

Am meisten abweichend von der Norm ist die Rinde im *Lobus parietalis*, sowie im lateralen und untern Theile des *L. occipitalis*, wo die meisten Zellenelemente Form, Grösse und Struktur der unentwickelten Zellen haben. Daneben finden sich einzelne Zellen von normaler Grösse und Form.

Die übrigen Rindengebiete weichen vom Normalen nur darin ab, dass die Anzahl der Zellen geringer als normal ist und dass hier, wie überall, in der Rinde kleine runde Zellelemente vorkommen, sowie dass an einigen Stellen die Zahl der Gefässe vermehrt ist.

Die Purkinje'schen Zellen in den Kleinhirnhemisphären sind an Anzahl etwas geringer als normal.

Diagnose.

Da die *psychischen Fähigkeiten* des Pat. im Verhältniss zu seinem Alter unvollständig entwickelt sind und da er den Unterricht im Idiotenheim mit Nutzen genossen hat, muss er unter die Gruppe der mässig und in geringem Grade Schwachsinnigen gerechnet werden.

Was die Veränderungen in der Hirnrinde betrifft, so können sie auch hier blos theilweise auf eine *Entwicklungshemmung* der Hirnrinde zurückgeführt werden. Das am meisten veränderte Gebiet entspricht einem Entwicklungsstadium, das sich unter normalen Verhältnissen im ersten Lebensjahre findet.

In Bezug auf den übrigen (grössten) Theil der Hirnrinde, der blos hinsichtlich der Anzahl der Zellen von dem Normalen abweicht, dürfte aus denselben Gründen wie im vorhergehenden Falle angenommen werden können, dass eine Neubildung von Zellen während der Entwicklung der Hirnrinde ausblieb.

In Bezug auf die Bedeutung der runden Zellelemente, der Verminderung der Anzahl der Zellen in den Kleinhirnhemisphären, sowie der Verminderung der Nervenfasern sei auf das verwiesen, was in den vorhergehenden Fällen angeführt ist.

Es ist anzunehmen, dass im ersten Lebensjahre ein Moment hinzugekommen ist, das die weitere Entwicklung eines geringeren Rindengebiets vollständig hemmte. In den übrigen Theilen der Rinde haben die bereits vorhandenen Zellen ihre Entwicklung fortsetzen können, aber eine Zellenneubildung, wie wir sie unter normalen Verhältnissen annehmen müssen, ist hier nicht zu Stande gekommen.

Wieweit es dasselbe Moment gewesen ist, das die beiden erwähnten Veränderungen in der Hirnrinde hervorgerufen hat, muss dahingestellt bleiben.

Stellen wir nun die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologischen Veränderungen* zusammen, so finden wir als pathologisch-anatomische Unterlage für die *psychischen Defekte* theils, dass die Rinde in grösseren Theilen der Parietal- und Occipitallappen sich in demselben *Entwicklungsstadium* befindet, wie bei normaler Entwicklung *im ersten Lebensjahre*, sowie, dass die Anzahl der Zellen in den übrigen Theilen bedeutend *geringer* ist als normal.

Eben so wenig wie in dem vorhergehenden Falle ist es also hier gelungen, sowohl die psychischen Defekte, als auch die Veränderungen im grösseren Theile der Hirnrinde auf ein gewisses Stadium in der normalen Entwicklung derselben zurückzuführen.

(Da die Art der in diesem Falle vorhandenen Sehstörung nicht genau bestimmt werden konnte, lässt sich auch nichts in Bezug auf die pathologisch-anatomische Grundlage dieses Symptoms feststellen.)

Fall 9.

Hilda J., 16 Jahre alt, gestorben am 3. October 1890.

Krankengeschichte.

Von Nervenkrankheiten in der Verwandtschaft der Pat. ist nichts bekannt.

Sie ist keinem Trauma ausgesetzt gewesen und hat keine Kinderkrankheiten durchgemacht.

Pat. lernte nie gehen, nur höchst unvollständig reden, lesen und schreiben, entwickelte sich aber in psychischer Hinsicht ziemlich gut.

Gemüthsstimmung gut und gleichmässig.

Auffassung ordentlich, aber etwas träg. *Gedächtniss* gut.

Die *Gedankenthätigkeit* etwas beschränkt, aber im Uebrigen normal.

Sie verstand, was man zu ihr sagte, und konnte sich theilweise verständlich machen, obwohl die Sprache mangelhaft und schwer zu verstehen war.

Sie konnte nicht schreiben, konnte aber einzelne einfachere Handarbeiten ausführen.

Die **Cranialnerven** normal.

Sensibilität normal.

Motilität. Beide unteren Extremitäten paretisch. Pat. konnte die Beine etwas rühren, aber beim Versuche gehen zu lernen, sie nicht vorwärts führen. Sie konnte nicht stehen. Die Beweglichkeit der Arme und des Rumpfes normal.

Choreatische Zuckungen in den Extremitäten.

Sektion.

Das Gehirn wiegt 1377 Gramm, die rechte Hemisphäre 603, die linke 612, Pons, Medulla oblongata und Kleinhirn 162.

Die Hemisphären messen in der Länge 17 cm.

Makroskopische Untersuchung der rechten Hemisphäre.

Lobus frontalis. Der *Gyrus centralis anterior*, der relativ schwach entwickelt ist, hat normalen Verlauf und normale Begrenzung.

Die *Frontalwindungen* sind sämmtlich kräftig entwickelt und haben normalen Verlauf.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* hat ungefähr dieselbe Grösse wie der G. centralis anterior.

Der *Gyrus parietalis superior* ist kräftig und durch die Fissura occipitalis interna, die 3 cm tief in die laterale Hirnoberfläche einschneidet, vom Gyrus occipitalis superior getrennt.

Der *Gyrus parietalis inferior* ist besonders kräftig entwickelt.

Lobus occipitalis. Da die Fissura calcarina fehlt, kann der Lob. cuneus nicht vom Gyrus occipitalis inferior internus abgegrenzt werden.

Gyrus occipitalis inferior externus normal.

Der **Lobus temporalis** ist kräftig, mit starken, normal verlaufenden und normal begrenzten Windungen.

Der **Lobus falciformis** zeigt nichts Abnormes.

Lobus centralis gut entwickelt.

Die **linke Hemisphäre** verhält sich in der Hauptsache wie die rechte, nur ist der *Gyrus frontalis superior* kräftiger und die Fissura calcarina ist in dieser Hemisphäre vorhanden.

Corpus callosum und *Fornix* normal. *Ventrikel* nicht erweitert.

Centralganglien, Pons, Medulla oblongata und **Kleinhirn** zeigen makroskopisch nichts Abnormes.

Mikroskopische Untersuchung der Hirnrinde.

Lobus frontalis. *Gyrus centralis anterior.* In dem zur medialen Oberfläche gehörenden Theile und im obern Sechstel des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles der Windung ist die Anordnung der Zellen normal, aber die meisten sind klein, $8\,\mu \times 12\,\mu$ gross, von abgerundeter Form, mit grossen Kernen und wenigen feinen Fortsätzen. Riesenzellen fehlen ganz.

Nach den angrenzenden Rindengebieten hin nehmen die Zellen an Grösse zu, bekommen deutlichere Pyramidenform und gröbere Ausläufer

Im übrigen Theile der Windung haben die Zellen normale Form und Grösse, aber ihre Anzahl ist entschieden geringer als normal.

Der *Gyrus frontalis superior* und *medius* verhalten sich durchaus normal, ausgenommen, dass die Zahl der Zellen geringer ist als bei normalen Individuen von gleichem Alter.

Der *Gyrus frontalis inferior* verhält sich in dem zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theile wie der Gyrus centralis anterior, aber mehrere Zellen in der Tiefe der 3. Schicht und in der Ganglienzellenschicht

sind grösser und haben eine deutlichere Pyramidenform, wenn sie auch nicht die dem Alter der Pat. entsprechende Grösse erreichen.

Der orbitale Theil der Windung verhält sich wie der Gyrus frontalis superior.

Hauptsächlich im Marke, aber auch in der Rinde, finden sich runde Zellelemente von demselben Charakter, wie in den vorhergehenden Fällen.

Die Stützsubstanz ist in den am meisten veränderten Gebieten etwas dichter, die Gefässe sind zahlreicher als normal. Hier ist auch die Associationsfaserschicht der ersten Schicht schwächer als normal.

Lobus parietalis. Der *Gyrus centralis posterior* hat in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile der Windung denselben Bau, wie der Gyrus centralis anterior.

Die übrigen Theile des Parietallappens verhalten sich normal, nur ist die Anzahl der Zellen etwas geringer als normal und hier und da kommen runde Zellelemente vor in der Rinde und noch reichlicher im Marke.

In derselben Weise verhalten sich die übrigen Theile der Hirnrinde.

Die Veränderungen sind ungefähr gleich ausgebreitet in beiden Hemisphären.

Die **Centralganglien,** die Kerne in **Pons** und **Medulla oblongata** verhalten sich normal.

In den **Kleinhirnhemisphären** sind die Purkinje'schen Zellen an Zahl geringer als normal.

Epikrise.

Die **klinischen Symptome** sind in Kürze folgende:

Psychische Funktionen etwas weniger entwickelt als bei normalen Individuen gleichen Alters.

Sprache unvollständig.

Pat. konnte nicht lesen und schreiben.

Parese in den untern Extremitäten.

Zuckungen in allen Extremitäten.

Die **pathologisch-anatomischen Veränderungen** beziehen sich, abgesehen von einigen, das Verhältniss der Windungen unter einander betreffenden Abweichungen, in der Hauptsache auf den feineren Bau der Hirnrinde.

Am meisten verändert ist die Rinde in dem zur medialen und im obern Sechstel des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles des

Gyrus centralis anterior, G. centralis posterior und im G. frontalis inferior, wo die meisten Zellen den Charakter unentwickelter Zellen haben.

Im übrigen Theile der Hirnrinde sind die Zellen normal, aber deren Anzahl ist geringer als normal.

Runde Zellelemente überall in Mark und Rinde. Die Purkinje'schen Zellen sind in beiden Hemisphären an Zahl geringer als normal.

Diagnose.

Da die psychischen Fähigkeiten der Pat. etwas weniger entwickelt sind, als bei normalen Individuen von gleichem Alter, und da der psychische Zustand während des Aufenthaltes in der Anstalt sich bedeutend besserte, so dass sie aus dem Unterricht Nutzen ziehen konnte, muss der Fall zur Gruppe der mässig und in geringem Grade Schwachsinnigen gerechnet werden.

Die in der Hirnrinde gefundenen Veränderungen sind blos theilweise auf eine Entwicklungshemmung zurückzuführen.

Die am meisten veränderten Gebiete (die meisten Zellen haben den Charakter unentwickelter Zellen, aber die Eintheilung in Schichten ist normal) stehen in einem Entwicklungsstadium, das bei normalen Individuen sich im ersten Lebensjahre wiederfindet.

Was die übrigen Gebiete betrifft, in denen nur die Anzahl der Zellen abnorm ist, so muss man aus denselben Gründen wie in dem vorhergehenden Falle, eine gehemmte Neubildung von Zellen während des Wachsthums der Rinde annehmen.

Stellen wir die *klinischen Symptome* mit den gefundenen *pathologisch-anatomischen* Veränderungen zusammen, so können die *Störungen der Motilität* und *Sprache* durch den unentwickelten Zustand der Rinde in den entsprechenden Regionen erklärt werden.

Als *pathologisch-anatomische Unterlage* zu den *psychischen Defekten* haben wir gefunden, theils dass die Rinde in einigen kleineren Gebieten sich in einem *Entwicklungsstadium* befindet, das unter normalen Verhältnissen sich im *ersten Lebensjahre* wiederfindet, theils dass in den übrigen Theilen der Hirnrinde die *Anzahl der Zellen bedeutend geringer ist als normal.*

Zusammenfassung.

Alle drei in dieser Gruppe vereinigten Fälle zeigen eine grosse Uebereinstimmung sowohl in Bezug auf die klinischen Symptome als auch in Bezug auf die pathologischen Veränderungen.

Sie können in folgender Weise charakterisirt werden. *Auffassung und Bewusstsein sind vorhanden, aber die psychischen Funktionen sind träger und etwas weniger entwickelt als bei normalen Individuen von gleichem Alter, jedoch ohne dass der Entwicklungsgrad in psychischer Hinsicht mit irgend einem bestimmten Entwicklungsstadium bei normalen Individuen gleichgestellt werden kann. Die Patienten sind bildungsfähig.*

Die Anzahl der Nervenzellen ist in dem grösseren Theile der Hirnrinde bedeutend geringer als normal, während die Rinde sich in einem geringeren Gebiete in einem Entwicklungsstadium befindet, das sich bei Normalen im ersten Lebensjahre wiederfindet.

Schlussbemerkungen.

Im Vorhergehenden ist ein Bericht über die Untersuchungen geliefert worden, die ich zu dem Zwecke unternommen habe, den Grund zu einem Material für die Aufstellung einer klinisch-pathologischen Eintheilung der Formen der Idiotie zu legen.

Das Resultat dieser Untersuchungen kann in Kürze in folgender Weise zusammengefasst werden:

In sämmtlichen dieser Bearbeitung zu Grunde gelegten Fällen, die alle Hauptgruppen der Idiotie repräsentiren, haben die psychischen Defekte mit einem Mangel an funktionstüchtigen Nervenzellen in der Hirnrinde in Zusammenhang gebracht und dadurch erklärt werden können, mag dieser Mangel dadurch zu Stande gekommen sein, dass der grössere Theil der Hirnrinde in einem Entwicklungsstadium stehen blieb, das dem Embryonalstadium oder dem früheren Kindesalter in ihrer normalen Entwicklung entspricht, in Folge davon, dass nur eine geringe Zahl Zellen eine höhere Entwicklung erreichte, oder auch dadurch, dass Zellen während des Wachsthums der Rinde zerstört wurden.

In sämmtlichen Fällen hat nachgewiesen werden können, dass die Rinde in einem gewissen Stadium in ihrer normalen Entwicklung gehemmt worden ist. In der Regel ist es allerdings nur ein kleineres

Gebiet, dessen Entwicklung vollständig zum Stillstand gelangte, aber die Rinde ist doch in ihrer Gesammtheit in der Weise beeinflusst worden, dass sie ihre Entwicklung nicht zu vollenden vermochte, sondern in einem abnorm zeitigen Stadium stehen blieb, oder auch so, dass eine Neubildung von Zellen (die wir aus den oben angeführten Gründen bei normaler Entwicklung annehmen müssen) während des Wachsthums der Rinde nicht zu Stande kam.

Je nach der Intensität des hemmenden Momentes, nach der Grösse und den Eigenschaften des Rindengebietes oder des Rindentheils, der in seiner Entwicklung zum Stillstand gebracht oder gehemmt wurde, und nach dem Zeitpunkt, zu welchem diese Hemmung eintrat, können die verschiedensten Veränderungen in der Hirnrinde entstehen und eben so verschieden können auch die auf diesen Veränderungen beruhenden psychischen Defekte sein.

1) *Wenn die Entwicklungshemmung im späteren Stadium des Fötallebens eintritt und der grössere Theil der Hirnrinde eine höhere Entwicklung nicht erreicht hat, als die Rinde in diesem Stadium unter normalen Verhältnissen, so fehlt bei den Patienten jede Spur von Bewusstsein. Psychische Entwicklung ist unmöglich. Hierher gehören die unter der Gruppe A. Blödsinnige, zusammengefassten Idioten.*

Je nachdem das hemmende Moment stärker auf das eine oder auf das anderie Rindengebiet gewirkt hat, können Störungen von Seiten der Cranialnerven, der Motilität oder Sensibilität gleichzeitig vorkommen.

2) *Wenn das hemmende Moment die Hirnrinde während des Fötallebens oder im ersten Lebensjahre getroffen hat und der grössere Theil der Hirnrinde eine höhere Entwicklung nicht erreicht hat, als bei Normalen in einem der ersten Lebensjahre, so fehlen bei den Pat. zwar Auffassung und Bewusstsein nicht, aber ihre psychische Entwicklung steht in einem Stadium, das sich bei Normalen in einem der ersten Lebensjahre wiederfindet. Hierher gehören die unter Gruppe B. 1 zusammengefassten in hohem Grade Schwachsinnigen.*

Auch hier können, je nachdem das hemmende Moment das eine oder andere Gebiet der Hirnrinde stärker getroffen hat, Störungen von Seiten der Cranialnerven, Motilität oder Sensibilität auftreten.

3) *Wenn das hemmende Moment die Hirnrinde während des ersten Lebensjahres getroffen hat und nur ein kleines Gebiet in der Entwicklung vollständig zum Stillstand gebracht worden ist, während der grössere Theil der Hirnrinde sich nach allen Hinsichten entwickelt hat, ausser in Bezug auf die Anzahl der Zellen, die geringer bleibt als normal, dann werden die*

psychischen Funktionen des Pat. träge und weniger entwickelt als bei Normalen von gleichem Alter, ohne dass sein Entwicklungsstadium in psychischer Hinsicht mit Bestimmtheit mit einem der Stadien des normalen Kindesalters verglichen werden kann. Zu dieser Gruppe gehören: B. 2. *die mässig Schwachsinnigen.*

Auch hier können, wie in den vorhergehenden Gruppen, Störungen von Seiten der Cranialnerven, der Motilität und Sensibilität entstehen.

Da solche in das Einzelne gehende Untersuchungen der Hirnrinde bei Idioten nebst einem Zusammenhalten derselben mit im Detail bekannten klinischen Symptomen vorher nicht ausgeführt worden sind, kann eine Literaturzusammenstellung in den Plan dieser Arbeit nicht aufgenommen werden, zumal da vollständige und übersichtliche Zusammenstellungen aller in der Literatur veröffentlichten Fälle von Idiotie bereits vorhanden sind.

Ich glaube jedoch vor Abschluss der vorliegenden Arbeit eine kritische Untersuchung derjenigen in der Literatur sich findenden Angaben über die feineren Veränderungen in der Hirnrinde vornehmen zu müssen, die gegen meine Erfahrungen in Wiederspruch stehen.

Eine Angabe, die bei Beschreibungen der Hirnrinde bei Idioten oft vorkommt, ist die, dass die pericellularen und perivascularen Räume erweitert sind, entweder in Folge einer Stase in den Lymphwegen oder einer Atrophie von Zellen.

Ohne näher auf diese viel umstrittene Frage einzugehen, will ich doch anführen, dass ich in keinem der hier publicirten neun Fälle derartige Veränderungen gesehen habe, die ich nicht auf Schrumpfungsprocesse in dem gehärteten Gehirn zurückführen könnte.

Vor Allem in solchen Präparaten, die in Müller'scher Flüssigkeit gehärtet und die in starken Spiritus eingelegt worden sind, treten solche Schrumpfungsprocesse auf, und zwar in Gehirnen von Normalen sowohl wie von Idioten.

Ebenso treten oft in mit Spiritus gehärteten Präparaten, die nicht vollständig mit Xylol durchtränkt worden sind, bei der Paraffineinbettung derartige Veränderungen auf.

Eine andere Angabe, die von einigen Autoren gemacht wird, ist die, dass die Pyramidenzellen in der Hirnrinde bei Idioten oft in fehlerhafter Weise angeordnet sein sollen, entweder so, dass die Spitzenfortsätze in der normalen diametral entgegengesetzter Richtung verlaufen oder auch in einer gegen diese mehr oder weniger rechtwinkligen Richtung.

Diese Angabe dürfte wenigstens in manchen Fällen auf einer fehlerhaften Beobachtung beruhen. Jeder, der Schnitte von der normalen Hirnrinde genauer studirt hat, hat die wechselndsten Bilder gesehen, jenachdem der Schnitt die Zellen getroffen hat, vor Allem in der Ganglienzellenschicht.

Es ist übrigens nichts Ungewöhnliches, in vollständig normaler Rinde Pyramidenzellen zu finden, deren längste Durchmesser horizontal verlaufen, während der Spitzenfortsatz sich gegen die Oberfläche umbiegt.

In einem Gebiete in der Hirnrinde, dem Gyrus frontalis inferior, sind übrigens die Zellen normal in Gruppen angeordnet, in denen sie so gegen einander geneigt stehen, dass ihre Spitzenfortsätze einander in verschiedenen Richtungen kreuzen.

Auch in einem andern Gebiete, dem Gyrus hippocampi, kommt normal eine derartige Anordnung der Zellen vor.

In keinem der von mir untersuchten Idiotengehirne ist eine solche Anordnung der Zellen mehr ausgeprägt gewesen, als man es bei Normalen findet.

Auffallend ist auch, dass nur in einem der neun von mir untersuchten Fälle eine Degeneration der Zellen vorgekommen ist, während in den meisten Fällen, die veröffentlicht worden sind, Angaben über Veränderungen der Zellen (Atrophie, Vacuolenbildung, Pigmentdegeneration) angeführt sind.

Sicher ist, dass unentwickelte Zellen in manchem Falle für atrophische gehalten worden sind, am meisten, wenn gleichzeitig durch eine unvorsichtige Härtung pericelluläre Räume entstanden sind.

Diese und ähnliche Veränderungen, die als charakteristisch für die Hirnrinde der Idioten angesehen worden sind, sind jedoch nur von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger und für die psychischen Defekte bestimmend ist der Mangel an funktionstüchtigen Nervenzellen in der Hirnrinde.

Verzeichniss

der Autoren, die im Vorstehenden angeführt werden:

Arndt. Arch. f. mikroskop. Anatomie 1867. III. 4. p. 441.; 1868. IV. 4. p. 407; 1869. V. 2. p. 317.

Baillarger. Annales méd.-psychol. 1855. I. 1—3.

» De l'idiotie. Gaz. des hôp. 1855.

» N:o 84. Canst. Jahresber. 1855. III. p. 8.

» Mém. de l'Acad. de Méd. 1880. VIII.

» Bull. de l'Acad. de Méd. 1856. Juillet.

» Gaz. hebdom. 1859 (Cit. Griesinger p. 366).

» Acad. de Méd. (Cit. Griesinger p. 360).

» Ann. méd.-psychol. 1882. VII. 1. p. 19.

» et Gratiolet. Acad. de Méd. Mai 26. 1857 (Cit. Griesinger).

Berlin, R. Beiträge zur Strukturlehre d. Grosshirnwindungen. Erlangen 1858.

Betz. Centr.-Bl. f. d. med. Wissensch. 1881. N:r 11—13.

» » » » » 1874. » 37. 38.

Boll. Arch. f. Psych. 1873. IV. p. 1—38.

Clarke, L. Philos. Transact. 1858. p. 231—259.

» » Proceedings of the Royal Society. London 1863.

» » Philos. Transact. 1868. p. 263—331.

Clason. Om menniskohjernans vindlar och fåror. Upsala 1868.

Deiters. Untersuchungen über Gehirn u. Rückenmark d. Menschen u. d. Säugethiere. Braunschweig 1865.

Gerlach. Centr.-Bl. f. d. med. Wissensch. 1872. X. 18.

Golgi. Arch. ital. de Biol. 1883. Ref. Testut. 1891.

Gowers. Diseases of the nervous system.

Home. Philosoph. Transactions 1874.

Jacubowitsch. Mittheilungen über d. feineren Bau d. Gehirns und Rückenmarks. Breslau 1857.

» Recherches comparatives sur le système nerveux.

» Comptes rendus Août 1858.

Kölliker. Mikroskopische Anatomie. Band II. 1850.

» Handbuch der Gewebelehre. Leipzig 1867.

Kupffer, Gust. De cornu Ammonis textura. Dorpat 1859.

Köster. Upsala läkareförenings förhandlingar. XXV. s. 418.
Lewis, Bevan. Med. Times and Gaz. 1876. March 4.
» » Brain. 1868. vol. I.
» » and Clarke. Proceed. of the Royal Soc. 1878.
» » Philosoph. Transact. 1880.
Major, H. C. West Riding Asylum Reports 1876. VI.
Meynert. Allg. Wiener med. Ztg. 1868. XIII.
» Stricker's Handbuch. 1871.
Mierzejewski. Arch. de Psychol. 1875.
Mondino. Cit. b. Testut 1891.
Obersteiner. Anleitung beim Studium des Baues der nervösen Centralorgane. Leipzig 1892.
Purkinje. Bericht über d. Versamml. deutscher Naturforscher und Aerzte. Prag 1837.
Sala. Verhandlungen d. internat. med. Congresses. Berlin 1890.
» Zeitschr. f. wissenschaftl. Zool. 1891. Band. LII.
Schwalbe. Lehrbuch der Neurologie. Erlangen 1881.
Schäfer, E. A. Quain's Elements of Anatomy. London 1893.
Schüle. Klinische Psychiatrie. Leipzig 1886.
Schultze, M. Abhandl. d. naturwissensch. Gesellschaft in Halle 1862. Bd. VII.
Stark. Allgem. Zeitschr. f. Psychiatrie 1871. XXVIII. 2. p. 149.
Testut, L. Traité d'Anatomie humaine. Paris 1891.
Vignal. Mém. Acad.

Erklärung der Tafeln.

Die auf den Tafeln I—III angeführten Zahlen sind Mittelzahlen aus sämmtlichen Messungen von einem gewissen Gebiete in demjenigen Gehirne, aus dem der abgezeichnete Schnitt entnommen ist, während die im Texte angegebenen Maasse Mittelzahlen aus sämmtlichen Bestimmungen sind, die an demselben Gebiete in verschiedenen Gehirnen (bei Erwachsenen) ausgeführt worden sind.

Die Zeichnungen selbst sind genaue Abbildungen eines charakteristischen Schnittes aus demselben Gebiete und die Grösse der Zellen, sowie die Dicke der Schichten können auf der Zeichnung direkt abgelesen werden (die Scala ist $^{200}/_{1}$).

Diese Anordnung ist getroffen worden, um die Variationen zu zeigen, die innerhalb der Grenzen des Normalen gefunden werden können.

Die auf den Tafeln IV und V angeführten Zahlen gehören in der Regel zu dem abgezeichneten Schnitte. Die im Text vorkommenden entsprechenden Maasse sind Mittelwerthe sämmtlicher Messungen aus dem ganzen Gebiete, von dem der abgezeichnete Schnitt genommen ist.

Sämmtliche im Schnitt befindlichen Durchschnitte von Zellen sind abgezeichnet worden, aber bei der Bestimmung der Anzahl der Zellen sind blos diejenigen gerechnet worden, die einen Nucleolus haben oder wenigstens einen 20 μ langen Spitzenfortsatz (auf einem 20 μ dicken Querschnitt).

Zu Fall 1. (*Blödsinn*) gehören Tafel IV., Fig. 3, 4, 5; Tafel V. Fig. 6; Tafel VI. Fig. 1, 2, 4; Tafel VII. Fig. 6.

Zu Fall 2. (*Blödsinn*) gehören Tafel V. Fig. 8; Tafel VI. Fig. 3, 5; Tafel VII. Fig. 1, 3.

Zu Fall 3. (*Blödsinn*) gehört Tafel VII. Fig. 2.

Zu Fall 4. (*Blödsinn*) gehört Tafel V. Fig. 4.

Zu Fall 5. (*Schwachsinn in hohem Grade*) gehören Tafel V. Fig. 3, 7; Tafel VII. Fig. 4.

Zu Fall 6. (*Schwachsinn in hohem Grade*) gehört Tafel V. Fig. 2.

Zu Fall 7. (*Mässiger Schwachsinn*) gehören Tafel IV. Fig. 1, 2; Tafel V. Fig. 5; Tafel VII. Fig. 5.

Zu Fall 8. (*Mässiger Schwachsinn*) gehört Tafel V. Fig. 10.

TAF. I.

TAFEL I.

Querschnitte durch normale Hirnrinde von einem 28 Jahre alten Manne (Fall 4. S. 10). Die Schnitte sind mit Methylenblau gefärbt. Ihre Dicke = 20 μ. Scala $^{200}/_{1}$.

Fig. 1. Querschnitt durch die Rinde von den hintern 2 Dritteln des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles des *Gyrus frontalis superior.*

Die untere Grenze der 3. Schicht ist hier fast unmöglich zu bestimmen. Auf Serienschnitten von dieser Stelle aus nach vorn tritt jedoch deutlich eine 4. Schicht auf, entsprechend dem 0,30 mm breiten Gebiete, das hier oben als Stelle der 4. Schicht angegeben ist.

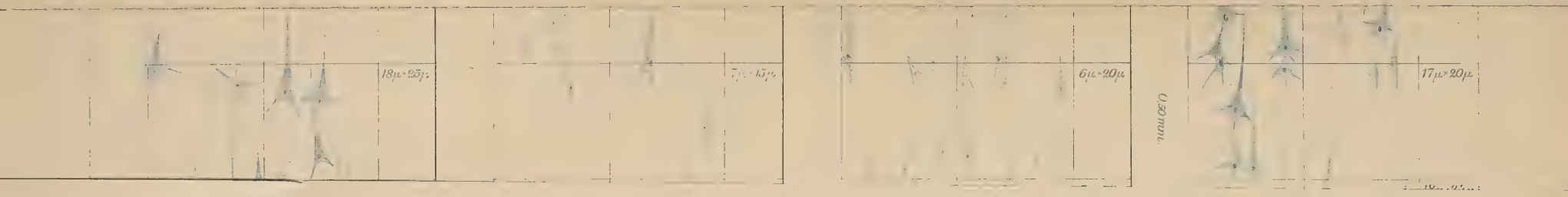
Fig. 2. Querschnitt durch die Rinde von dem obern Sechstel des *Gyrus centralis anterior.*

Die Grenze zwischen der 4. und der Ganglienzellenschicht ist auf dem Schnitt, von dem die Zeichnung entnommen ist, nicht markirt.

Fig. 3. Querschnitt durch die Rinde von dem hinter dem aufsteigenden Schenkel der Fissura Sylvii liegenden Theile des *Gyrus frontalis inferior.*

Fig. 4. Querschnitt durch die Rinde von dem vor dem aufsteigenden Schenkel der Fissura Sylvii liegenden Theile des *Gyrus frontalis inferior.*

Die 2. Schicht ist in dem Schnitte, von dem die Zeichnung entnommen ist, nicht von der 3. geschieden.


18μ×25μ
6μ×20μ
17μ×20μ

TAF. II.

TAFEL II.

Querschnitte durch normale Hirnrinde von einem 28-jährigen Manne. Die Schnitte sind mit Methylenblau gefärbt. Dicke 20 μ. Scala $^{200}/_{1}$.

Fig. 1. Querschnitt durch die Rinde vom vordern Drittel des zur lateralen Hirnfläche gehörenden Theiles des *Gyrus frontalis superior*.

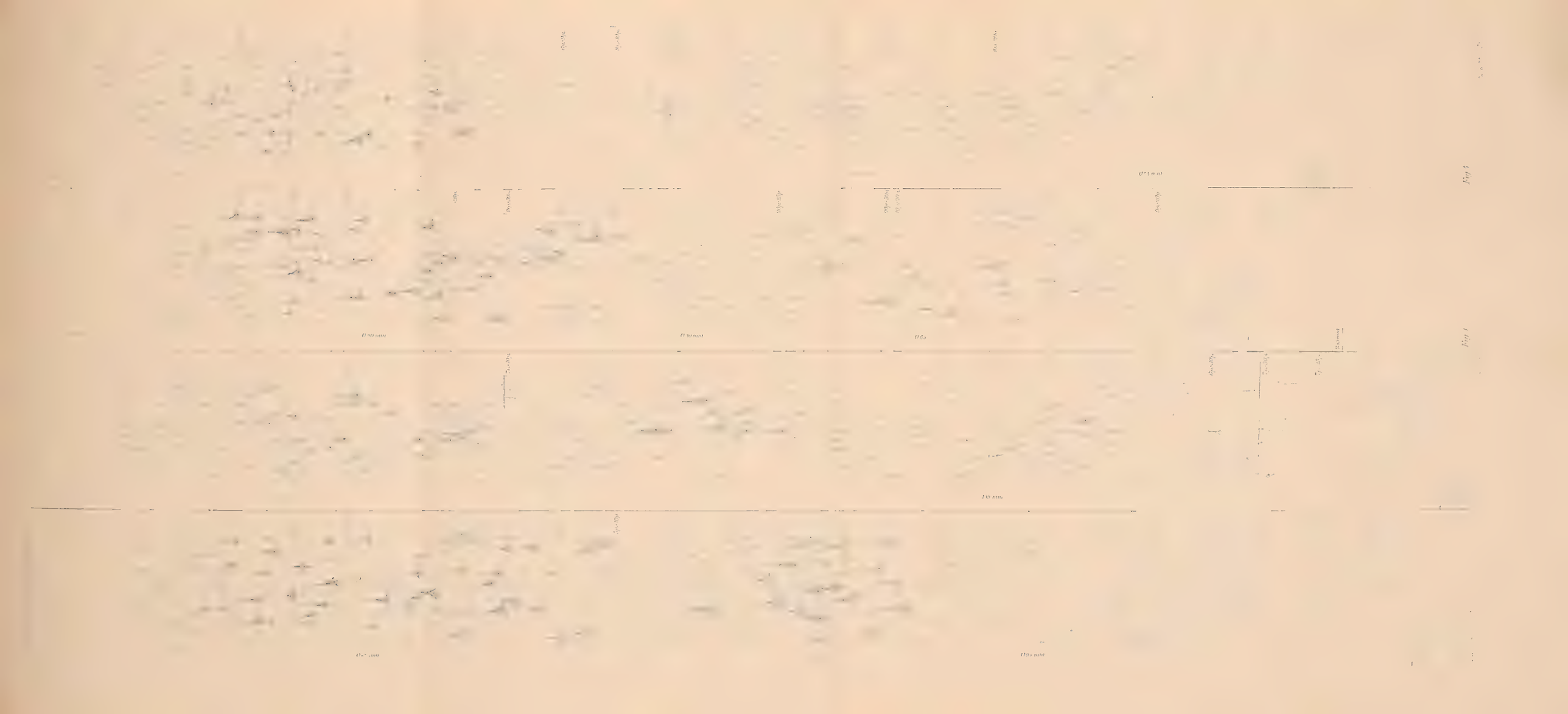
Fig. 2. Querschnitt durch die Rinde vom mittelsten Theile des *Gyrus temporalis superior*.

Fig. 3. Querschnitt durch die Rinde vom *Gyrus parietalis superior*.

Fig. 4. Querschnitt durch die Rinde von dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus occipitalis superior*.

Die einzeln stehenden grössern Pyramidenzellen in der zellenarmen Zwischenschicht sind in dem Schnitte, nach dem die Zeichnung gemacht ist, nicht so zahlreich, als in den übrigen Theilen dieses Gebietes.

10μ×15μ
10μ×18μ
10μ×20μ
0,55 mm.
10μ×30μ
10μ×20μ
10μ×20μ
10μ×20μ
0,65 mm.
9μ×25μ
9μ×30μ
9μ×25μ
1,19 mm.
20μ×30μ
8μ×30μ
9μ×25μ
0,94



TAF. III.

TAFEL III.

Querschnitte durch normale Hirnrinde von einem 28-jährigen Manne. Die Schnitte sind mit Methylenblau gefärbt. Ihre Dicke beträgt 20 μ. Scala $^{200}/_{1}$.

Fig. 1. Querschnitt durch die Rinde vom *Lobus centralis.*

Fig. 2. Querschnitt durch die Rinde vom vorderen Theile des *Gyrus hippocampi.*

Fig. 3. Querschnitt durch die Rinde von der *Fascia dentata Tarini.* Von der ersten Schicht ist nur ein Theil auf der Zeichnung aufgenommen.

Fig. 4. Querschnitt durch die Rinde von der Mitte des *Gyrus hippocampi* am Uebergang zum *Cornu Ammonis.*

Fig. 5. Querschnitt durch die Rinde von der *Fascia cinerea.* Die erste Schicht ist nicht auf der Zeichnung aufgenommen.

Fig. 6. Riesenzelle aus dem *Gyrus centralis anterior.*

Fig. 7. Pyramidenzelle aus dem tieferen Theile der 3. Schicht im *Gyrus parietalis inferior.*

Fig. 8. Spindelzelle aus der 5. Schicht im *Gyrus parietalis superior.*

Fig. 9. Ganglienzelle aus dem unteren Theil der Ganglienzellenschicht im *Gyrus centralis superior.*

Fig. 10. Ganglienzelle aus dem lateralen Theile des *Gyrus occipitalis superior.*

Fig. 11. Pyramidenzelle aus dem mittelsten Theile der 3. Schicht im *Gyrus frontalis superior.*

Fig. 12. Pyramidenzelle aus dem oberflächlichen Theile der 3. Schicht im *Gyrus cinguli.*

Fig. 13. 15. 16. Pyramidenzellen aus der 2. Schicht in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus frontalis superior.*

Fig. 14. Zelle aus der 3. Schicht in dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus occipitalis superior.*

Vergrösserung bei der Fig. 6—16: Zeiss' Obj. 4 mm apochrom. + Ocul. 8.

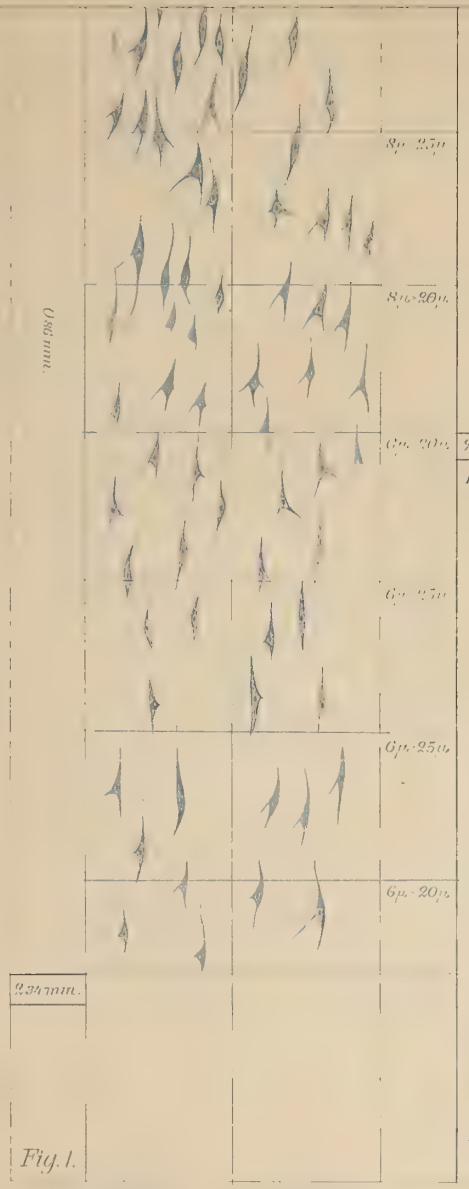


Fig. 1.

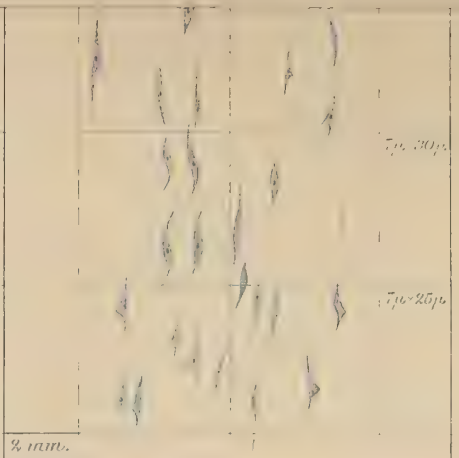


Fig. 2

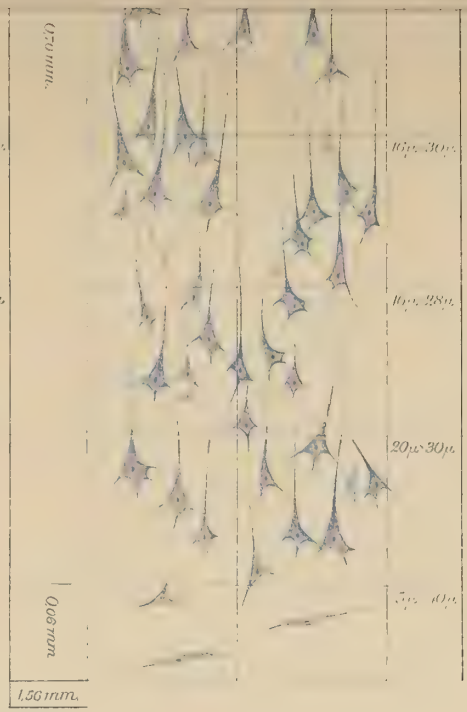


Fig. 4

Fig. 7

Fig. 8

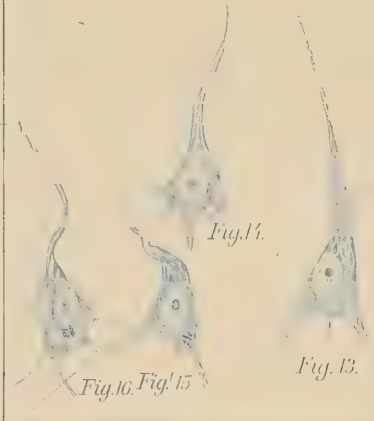


Fig. 12.

Fig. 11

Fig. 10.

Fig. 9.

C. Hamm

TAF. IV.

TAFEL IV.

Fig. 1. Fall 7. *Mässiger Schwachsinn.* Querschnitt durch die Rinde von dem zur medialen Oberfläche des *Gyrus centralis anterior* gehörenden Theile.

Fig. 2. Fall 7. *Mässiger Schwachsinn.* Querschnitt durch die Rinde vom *Gyrus parietalis inferior anterior.*

Fig. 3. Fall 1. *Blödsinn.* Querschnitt durch die Rinde von dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theil des *Gyrus centralis anterior.*

Fig. 4. Fall 1. *Blödsinn.* Querschnitt durch die Rinde vom vorderen Theil des *Gyrus hippocampi.*

Fig. 5. Fall 1. *Blödsinn.* Querschnitt durch die Rinde vom vorderen Theile des *Gyrus temporalis superior.*

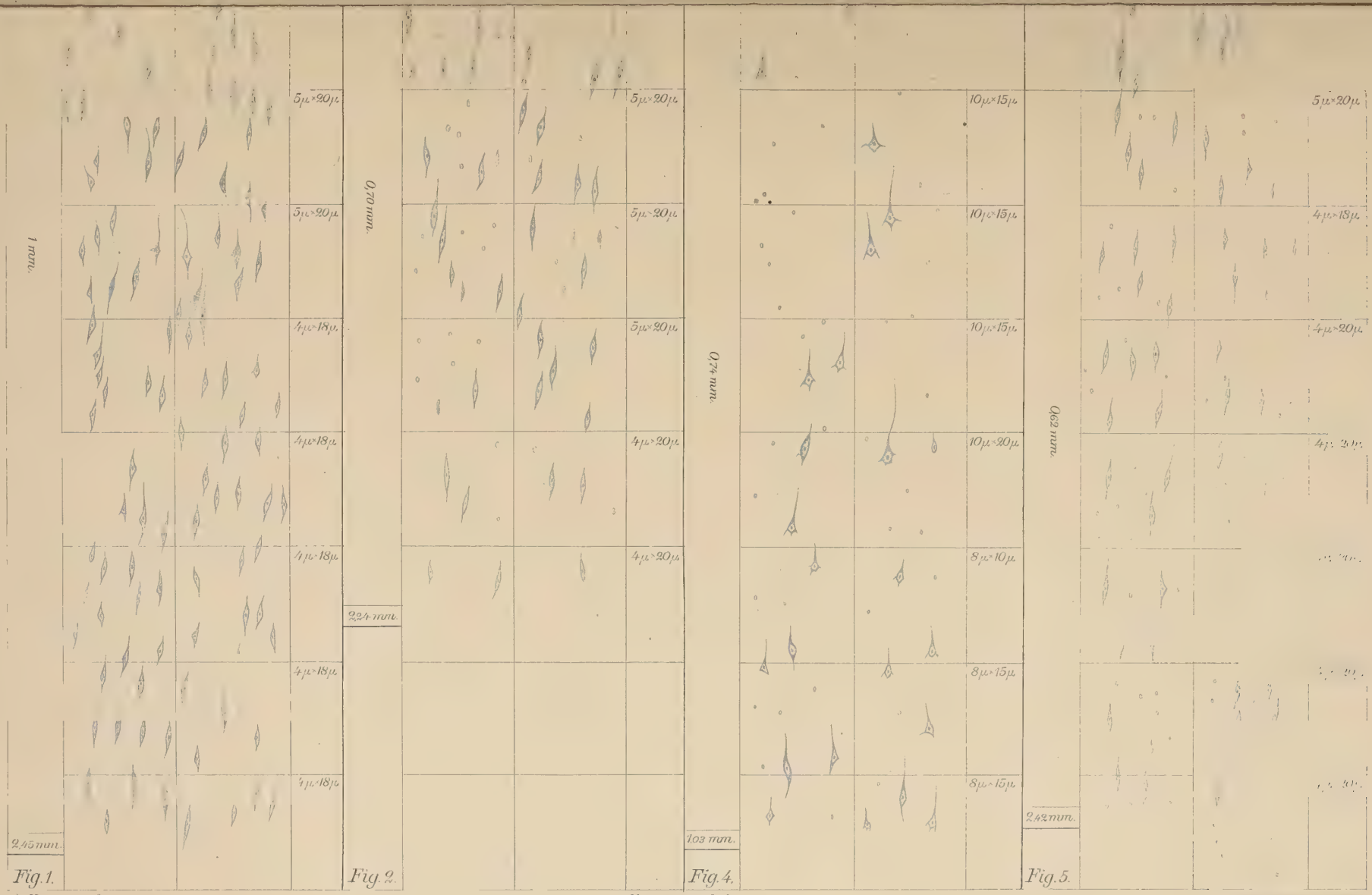
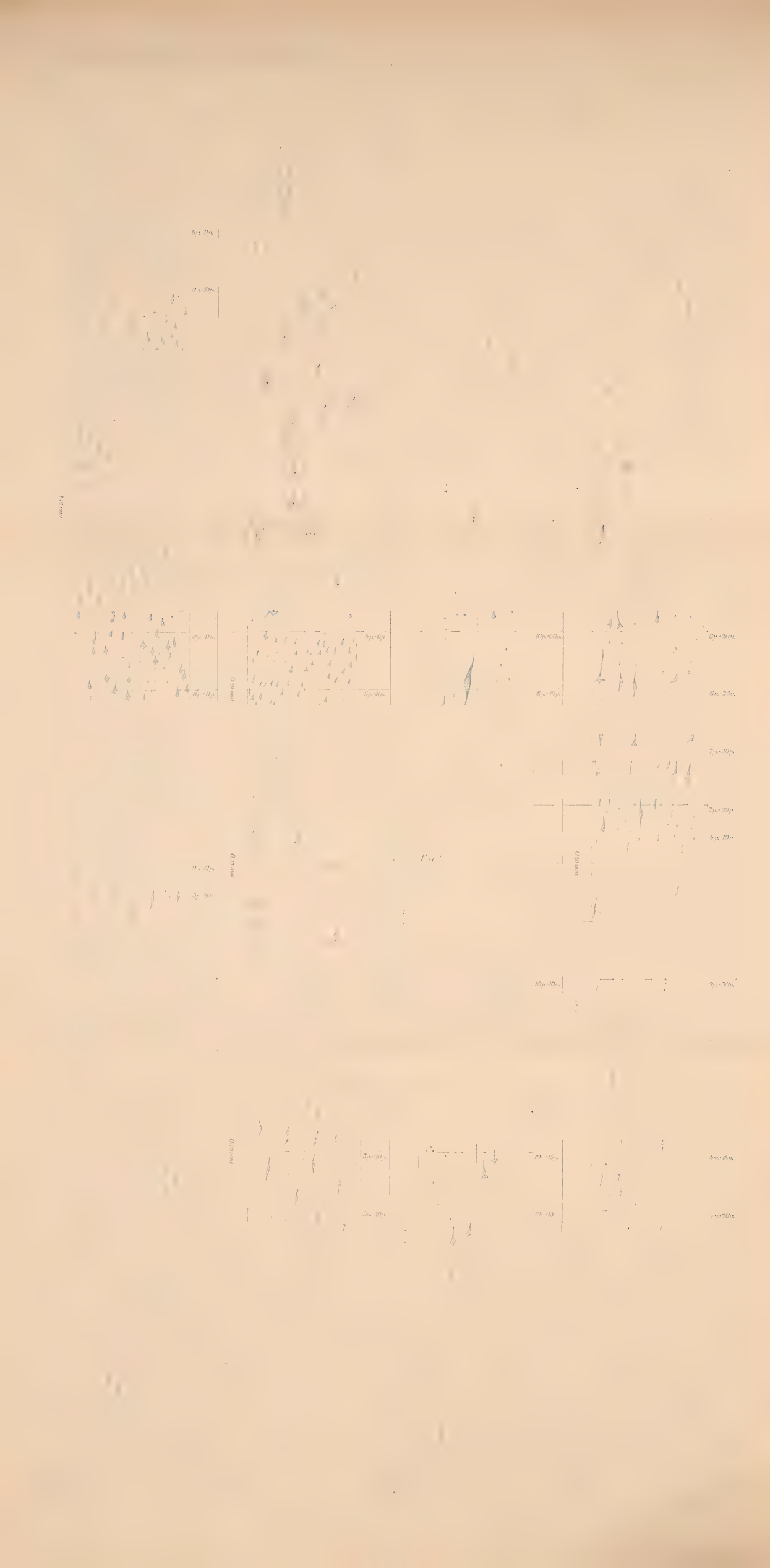


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 4. Fig. 5.

Hammarbe



TAF. V.

TAFEL V.

Fig. 1. Fall 2. *Blödsinn.* Querschnitt durch die Rinde von dem zur orbitalen Oberfläche gehörenden Theile des *Gyrus frontalis inferior.*

Fig. 2. Fall 6. *Schwachsinn in hohem Grade.* Querschnitt durch die Rinde vom mittelsten Theile des zur lateralen Hirnoberfläche gehörenden Theiles des *Gyrus centralis anterior.*

Fig. 3. Fall 5. *Schwachsinn in hohem Grade.* Querschnitt von dem zur medialen Hirnoberfläche gehörenden Theile des *Gyrus frontalis superior.*

Fig. 4. Fall 4. *Blödsinn.* Querschnitt durch die Rinde vom *Gyrus centralis posterior* (an der Grenze vom Gyrus centralis anterior).

Fig. 5. Fall 7. *Mässiger Schwachsinn.* Riesenzelle aus dem untern Theile des *Gyrus centralis anterior.*

Fig. 6. Fall 1. *Blödsinn.* Zelle aus der Ganglienzellenschicht im *Gyrus temporalis superior.*

Fig. 7. Fall 5. *Schwachsinn in hohem Grade.* Pyramidenzelle aus der 3. Schicht im *Gyrus frontalis anterior.*

Fig. 8. Fall 2. *Blödsinn.* Zelle aus der Pyramidenzellenschicht im *Gyrus frontalis inferior.*

Fig. 9. Fall 8. *Mässiger Schwachsinn.* Zelle aus der Spindelzellenschicht im *Gyrus parietalis superior.*

Fig. 10. Fall 8. *Mässiger Schwachsinn.* Zelle aus der 3. Schicht im medialen Theile des *Gyrus occipitalis superior.*

Vergrösserung bei Fig. 5—10: Zeiss' Obj. 4 mm apochrom. + Ocul. 8.

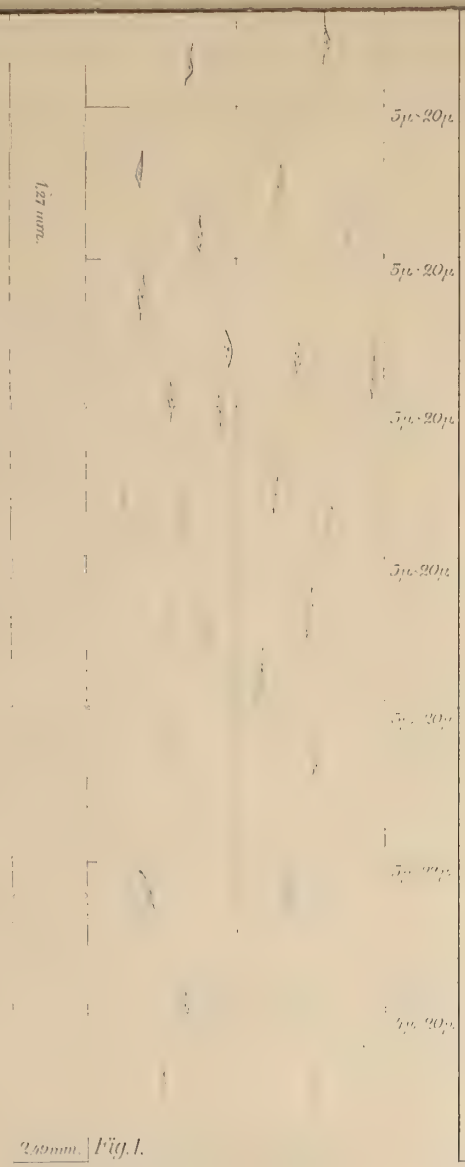


Fig. 1.

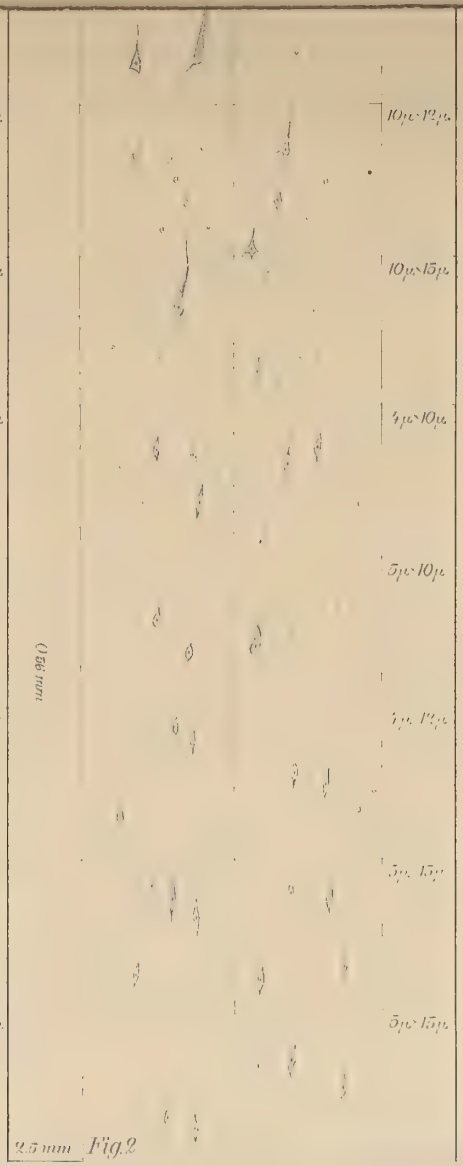


Fig. 2

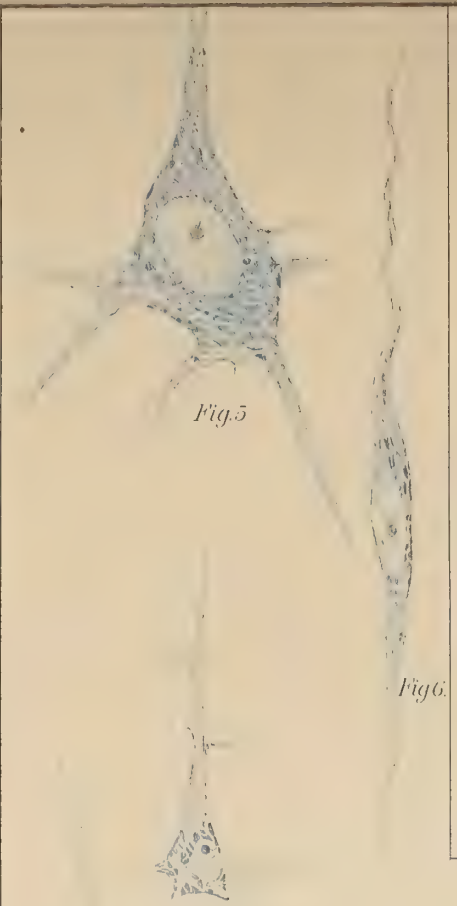


Fig. 5

Fig. 6.

Fig. 7

Fig. 10.

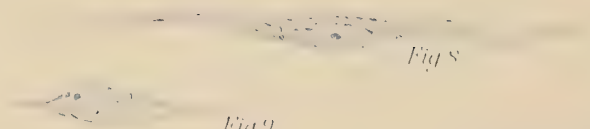


Fig. 8

Fig. 9

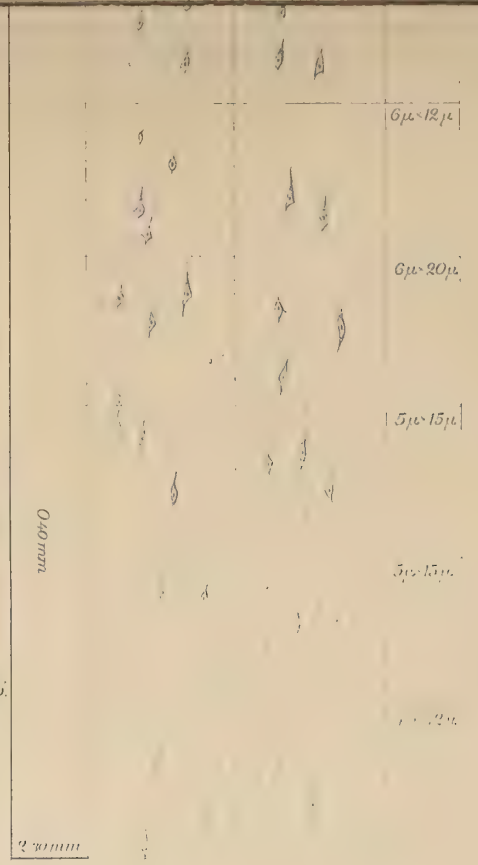


Fig. 4.

TAF. VI.

TAFEL VI.

Fig. 1. Fall 1. *Blödsinn.* Laterale Oberfläche der linken Hemisphäre.

Fig. 2. Fall 1. *Blödsinn.* Mediale Oberfläche der linken Hemisphäre.

Vom Corpus callosum sieht man einen ovalen Durchschnitt an der Stelle für das Genu corporis callosi. Der mit Rinde bekleidete Wulst unter dem Gyrus cinguli stellt den freien Rand des Faserzugs vor, der vom Durchschnitt des Corpus callosum nach hinten zum Occipital- und Temporallappen läuft.

Unter diesem Wulst kommt ein membranartiges Gebilde, das mit seinem lateralen Rande im Sulcus chorioidei angeheftet ist. Dieses Gebilde geht nach vorn in die deutlich ausgebildeten Columnae fornicis über.

Fig. 3. Fall 2. *Blödsinn.* Mediale Oberfläche der rechten Hemisphäre.

Das Corpus callosum ist membranartig und das Splenium corporis callosi fehlt.

Die Fläche zwischen dem Corpus callosum und dem Fornix ist das Septum pellucidum. Der 5. Ventrikel ist auf der Zeichnung auch angedeutet.

Die Fascia dentata Tarini sieht man vor der Spitze des Lobulus cuneus.

Fig. 4. Fall 1. *Blödsinn.* Encephalon von hinten und unten. Kleinhirn in hohem Grade verkleinert.

Fig. 5. Fall 2. *Blödsinn.* Hinterer Theil der linken Hemisphäre.

Die Rinde im Lobulus cuneus ist ungefaltet, die Fissura parietalis interna fehlt. Der hintere freie Rand des Corpus callosum ist sichtbar.

Fig. 1

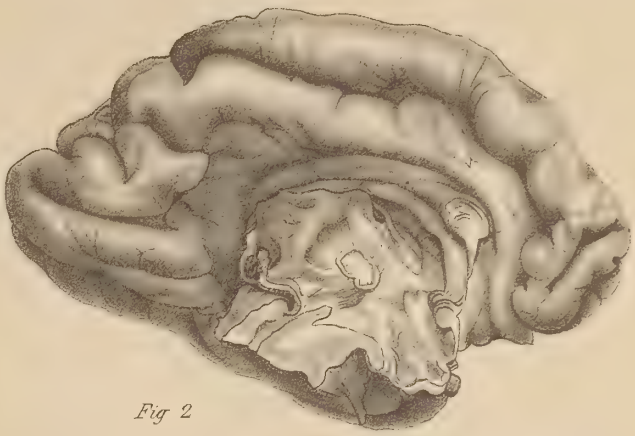


Fig. 2

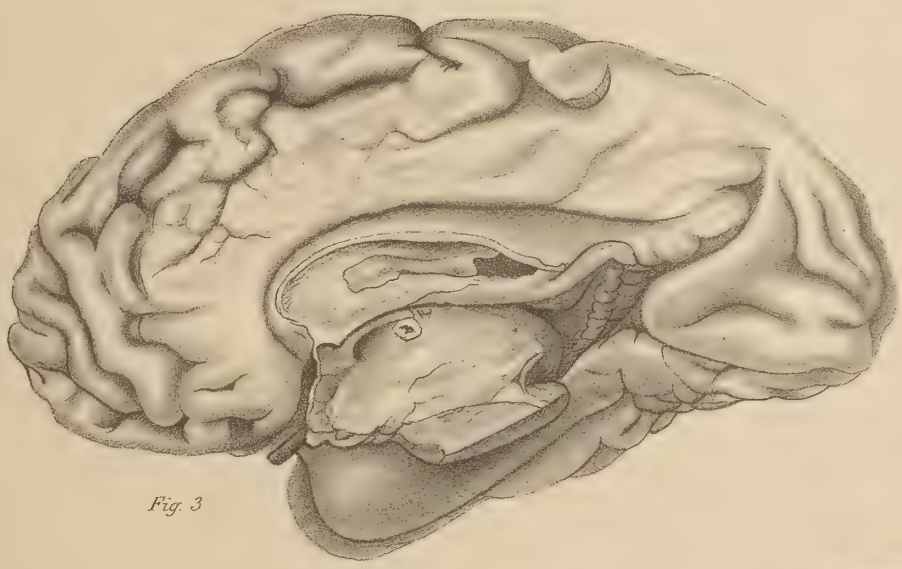


Fig. 3

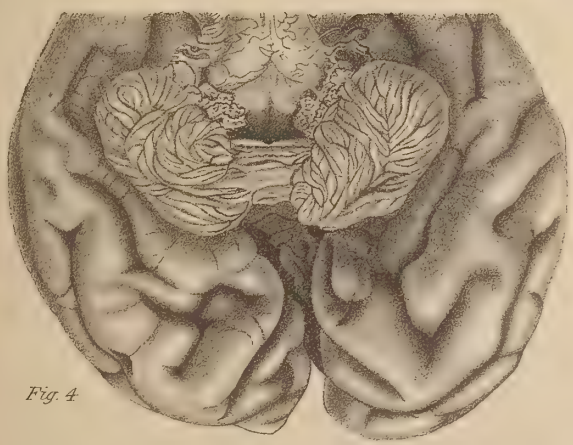


Fig. 4

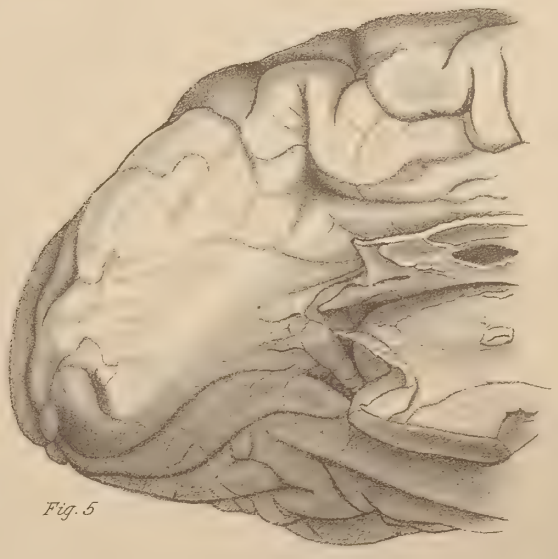


Fig. 5

Anna Gyllenspetz del. G. Tholander, lith. W. Schlachter, Stockholm.

TAF. VII.

TAFEL VII.

Fig. 1. Fall 2. *Blödsinn.* Vorderer Theil der lateralen Oberfläche der rechten Hemisphäre.

Die zwei accessorischen Gyri, die die Rinde in der Insula vertreten, sieht man zwischen dem Gyrus frontalis inferior und dem Gyrus temporalis superior.

Fig. 2. Fall 3. *Blödsinn.* Hinterer Theil der lateralen Oberfläche der linken Hemisphäre. Der Occipitallappen ist schwach entwickelt.

Fig. 3. Fall 2. *Blödsinn.* Untere Fläche der rechten Hemisphäre, die Orbitalwindungen und die accessorischen Windungen, die die Rinde in der Insula vertreten, entspringen aus der Gegend der Substantia perforata antica und verlaufen von da aus radiär.

Fig. 4. Fall 5. *Schwachsinn in hohem Grade.* Orbitaloberfläche der rechten Hemisphäre. Der Gyrus olfactorius ist sehr kräftig entwickelt.

Fig. 5. Fall 7. *Mässiger Schwachsinn.* Vorderer Theil der untern Hirnoberfläche. Der vordere Theil der Temporalwindungen (ausser dem Gyrus temporalis superior) fehlt, weshalb der Amygdalus an seiner untern Fläche blosliegt.

Fig. 6. Fall 1. *Blödsinn.* Querschnitt durch den obern Theil der linken Hemisphäre. Der freie Rand der Fornixlamelle klebt an der ganzen oberen Fläche des Thalamus opticus, befestigt sich aber im Sulcus chorioideus.

Fig 1

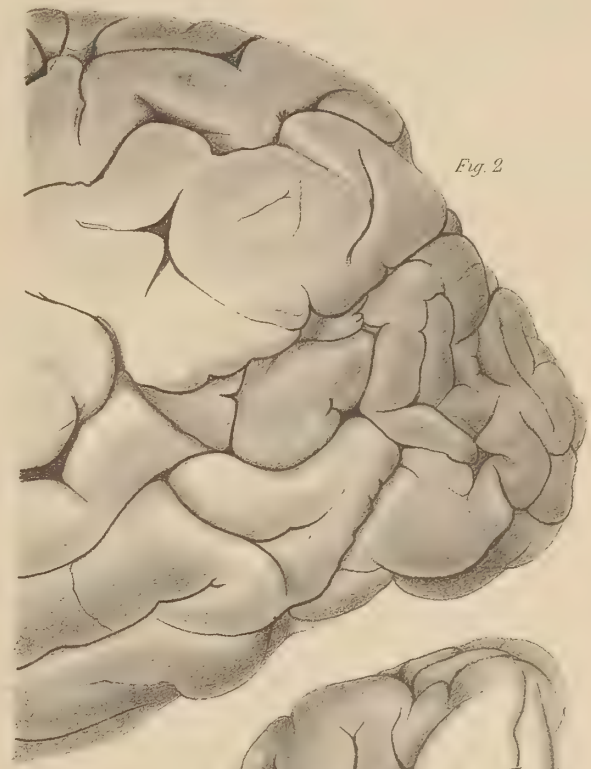
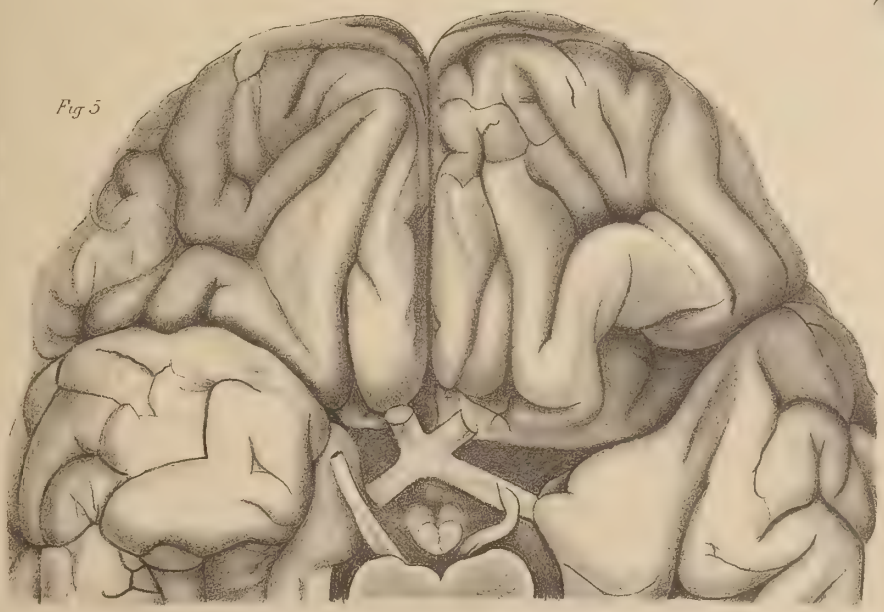


Fig 2

Fig 3

Fig 4

Fig 5



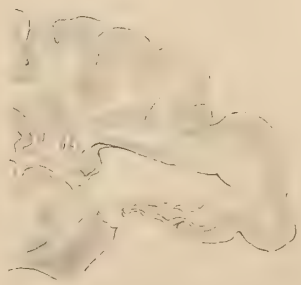


Fig 6

Anna Gyllenspetz del. G. Tholander, lith. W. Schlachter, Stockholm.

SECTIO MEDICA ET HISTORIÆ NATURALIS.

ZUR

ORGANOGRAPHIE UND SYSTEMATIK

DER AEGAGROPILEN

VON

F. R. KJELLMAN.

MIT 3 FIGUREN IM TEXT UND 4 TAFELN.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 11 Sept. 1897).

UPSALA 1898,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

In einem Aufsatze: Studier öfver Chlorophycéslägtet Acrosiphonia J. G. Ag. och dess Skandinaviska arter (Studien über die Chlorophyceen-Gattung Acrosiphonia J. G. Ag. und ihre Skandinavischen Arten) habe ich darzulegen gesucht, dass diejenigen Cladophoraceen, welche von Wille in seiner Bearbeitung dieser Chlorophyceen-Familie in »Die natürlichen Pflanzenfamilien von Engler und Prantl» als eine Section, *Spongomorpha* Kütz., angeführt werden, hinsichtlich ihrer Entwickelungsgeschichte, ihres schliesslichen Baues und ihrer Individuenbildung etc. von den typischen Cladophoren, Sectio *Eucladophora* (Kütz.) Farl., sich so wesentlich unterscheiden und andererseits eine so durchgreifende Uebereinstimmung unter einander zeigen, dass sie, wie schon längst von J. G. Agardh hervorgehoben worden war, mit voller Berechtigung als eine gut charakterisierte eigene Gattung angesehen werden können. Ich habe daselbst ausdrücklich angegeben, dass ich mich nicht über den Umfang dieser Gattung bestimmt äussern konnte, weil keine so eingehende Untersuchung vorlag über diejenigen Gewächse, welche Kützing der Gruppe *Aegagropila* untergebracht hat und welche Wille eine mit Eucladophora und Spongomorpha gleichgestellte Section der Gattung Cladophora bilden lässt, dass eine Vergleichung derselben mit den der Gattung *Acrosiphonia* angehörigen Arten möglich war. Eine solche Vergleichung war um so mehr vonnöthen, als einige Arten der Gattung Acrosiphonia J. G. Ag., Spongomorpha Kütz., in der Form von Bällen auftreten, folglich eben denjenigen Charakter zu besitzen scheinen könnten, welcher wohl als für die Aegagropila Kütz. benannte Gruppe am meisten kennzeichnend gehalten worden ist. Die Diagnose Wille's von diesen Gruppen lautet nämlich folgendermassen: *Spongomorpha* Kütz.: Der Thallus bildet keine runden Klumpen, hat aber extracuticulare Verstärkungsrhizine; *Aegagropila* Kütz.: Der Thallus bildet runde Klumpen und kann extracuticulare Verstärkungsrhizine besitzen oder nicht. Es war auch ohne Zweifel die Meinung Kützing's, dass diese Gruppen näher unter einander

als mit der Gruppe *Eucladophora* (Kütz.) Farl. verwandt sind, und die gegenseitige Stellung, die Wille seinen drei Sectionen der Gattung Cladophora giebt, scheint anzudeuten, dass er die Auffassung von Kützing theilt; vergl. Kjellm. Acrosiphonia S. 8, 11 und Wille, Cloroph. Syst. S. 118. Die Möglichkeit lag folglich vor, dass die der Gruppe Aegagropila angereihten Cladophora-Arten nicht nur durch ihre äussere Gestalt und den Besitz von s. g. extracuticularen Rhizinen mit den Arten der Gattung Acrosiphonia übereinstimmten, sondern dass in der Organisation im Uebrigen die Uebereinstimmung so gross war, dass die Gattung Acrosiphonia auch die der Section Aegagropila zugetheilten Cladophora-Arten zu umfassen angenommen werden konnte. Dass ich keine eigene Untersuchung über die Aegagropilen vornahm, ehe ich meine Studien über die Gattung Acrosiphonia veröffentlichte, kam theils daher, dass die Systematisierung der Gattung Cladophora ausserhalb des Planes meiner Arbeit, die skandinavischen Arten dieser Gattung zu entwirren, diesmal lag, theils daher, dass kein geeignetes Material für eine so schwierige und voraussichtlich so zeitraubende Untersuchung mir damals zu Gebote stand. Seit dieser Zeit (1893) sind meines Wissens die Aegagropilen nicht der Gegenstand einer derartigen Untersuchung gewesen wie die von mir oben hervorgehobene. Als ich deshalb im vorigen Sommer die Gelegenheit hatte, ein reiches frisches Material von einer der grösseren Aegagropilen anzutreffen, sah ich mich veranlasst, diesem ein näheres Studium zu widmen, um einen sichereren Einblick in die Systematik der Cladophoreen zu gewinnen. Es sind die Resultate dieses Studiums, die ich hier mitzutheilen beabsichtige, weil sie, wie es mir scheint, sehr wichtige Beiträge zur Organographie und Systematik dieser in hohem Grade merkwürdigen Pflanzen liefern.

Die von mir zunächst untersuchte Pflanze fand ich im vorigen Sommer nahe bei meiner ungefähr halbwegs zwischen den Orten Flottsund und Wårsätra gelegenen Sommerfrische mehrmals am Ufer des Ekoln, eines Abschnittes des Mälarsees, und zwar jedesmal bei heftigem Winde von dem See aus und bei hoher See. In der grössten Menge traf ich sie am 8. Juli, wo es ungewöhnlich stark wehte und die See sehr hoch ging. Während der neun nach einander folgenden Sommer, als ich mich daselbst aufhielt, war sie niemals zu sehen, und gewiss würde sie meiner Aufmerksamkeit nicht entgangen sein, wenn sie dann zu finden gewesen wäre. In der Nähe des Strandes und zwar in einer Tiefe von 1—10 Fuss war sie nicht zu entdecken, und die von mir in grösserer Tiefe gemachten Dreggen, um ihren Wohnsitz zu ermitteln, waren ver-

gebens. Doch muss ich zugestehen, dass diese weder sehr umfassend noch mit gut geeigneten Apparaten vorgenommen worden waren. Jedoch scheint mir alles darauf hinzudeuten, dass sie nicht in seichtem, sondern nur in tieferem Wasser vorkommt und erst bei stürmischem Wetter und stark erregter See dem Strande angeschwemmt wird. Keines der von mir gesammelten Exemplare kam angewachsen vor. An dem einen oder dem anderen Exemplare hafteten freilich einige Grieskörner, aber in zu geringer Menge, um die Annahme zu berechtigen, dass sie auf Sand- oder Griesboden befestigt gewesen wären.

Die Tracht der Pflanze geht vom Textbilde 1 mit genügender Klarheit hervor. Am häufigsten kamen Exemplare vor, welche scheiben- oder kuchenförmig waren, etwa 5 mm. dick, fast von gleicher Dicke, ebenso lang wie breit, circa 7 cm. im Diameter, von unregelmässig abgerundetem oder unregelmässig viereckigem Umrisse und mit ganzem oder in einige wenige dicke Vorsprünge ausgehendem Rande; vergl. Textb. 1, *a*, *e*, *f*. Bisweilen waren die Vorsprünge länger und gleichwie von dem Hauptkörper abgeschnürt; Textb. 1, *d*. Einige Exemplare traten nicht in der Form von gleichdicken Scheiben auf, sondern waren scheibenförmig mit einer polsterförmigen Verdickung. Bei einer geringen Anzahl war der Körper ganz polsterförmig, plankonvex, an Dicke höchstens etwa 8 mm. erreichend, die Erhöhung bisweilen die Mitte einnehmend, bisweilen näher an der einen Kante gelegen, Textb. 1, *b*.

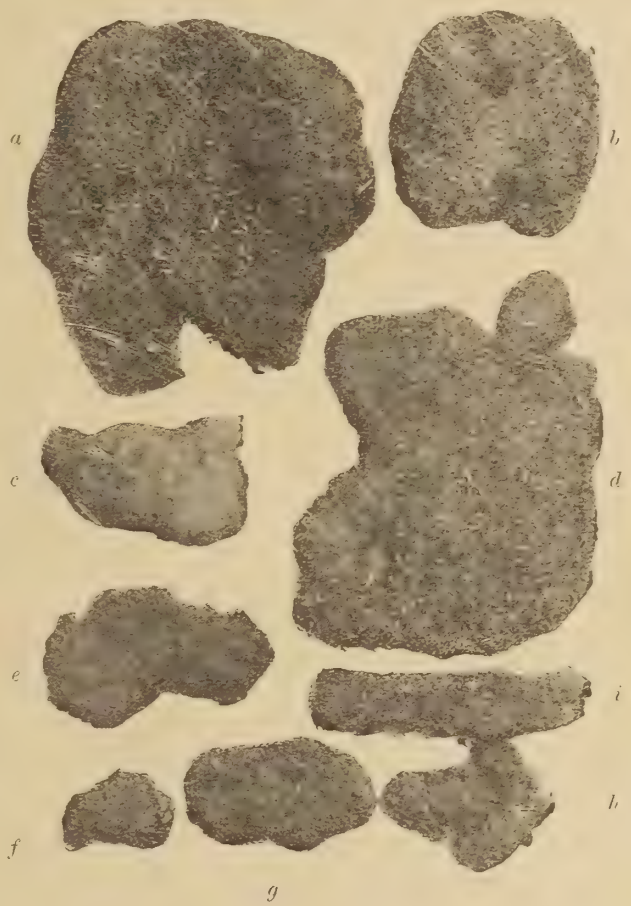


Fig. 1.

Aegagropila canescens Kjellm. *a* — *f* von der oberen, *g* — *h* von der unteren Seite; *i* Querschnitt eines scheibenförmigen Körpers; ²/₃.

Die mitgetheilten Habitusbilder meines Untersuchungsmateriales zeigen unverkennlich, dass jene scheiben- oder polsterförmigen Körper keine abgesonderten Theile eines grösseren Ganzen, sondern je völlig begrenzte und einheitliche Körper ausmachen.

Ihre grob plüsch- oder filzartige Textur ist gewöhnlich dicht und fest, selten stellenweise so locker, dass fast ein Loch entstanden ist; vergl. Textb. 1, *d*. Die Aussenfläche ist zumeist rauh, nur bei einem der gefundenen Exemplare ganz schlicht, wie gebürstet, mit sämmtlichen Fadenspitzen nach derselben Seite gerichtet, was von der Conservierung nicht abhängt, sondern sich vorfand, als die Pflanze noch ganz frisch im Wasser lag; Textb. 1, *c*. Dieses Exemplar hatte eine blassere Farbe als die übrigen, welche gesättigt dunkelgrün oder fast schwarzgrün waren. Bei einigen derselben war die Fläche wegen des Vorkommens von entfärbten, weisslichen oder graulichen Fadenspitzen mehr oder weniger graugesprenkelt. Sämmtliche Exemplare waren ohne Glanz, nicht merkbar schleimig und ziemlich brüchig.

Auch diejenigen, welche gleichdicke Scheiben bildeten, zeigten eine makroskopisch wahrnehmbare dorsiventrale Ausbildung. Die eine Seite, die sicher als die Oberseite zu betrachten ist, war durch weiter hervorragende Fadenspitzen rauher und immer mehr deutlich graugesprenkelt als die andere; vergl. Textb. 1, *b* und *h*, die erstere von der Oberseite, die letztere von der Unterseite gesehen.

Da die Pflanze sehr dicht gefilzt und zugleich nicht unbeträchtlich brüchig ist, fällt es ziemlich schwer, ihren Bau zu entwirren. So viel scheint mir jedoch leicht und sicher festzustellen zu sein, dass sie hinsichtlich ihrer inneren Structur keine Einheit in der Meinung ausmacht, dass ihre Theile ein streng organisches Ganze bilden. Sie besteht vielmehr aus einer grossen Menge zu einem habituellen Ganzen verfilzter individueller Einheiten, deren jede von einer mehr oder weniger reich und verschieden verzweigten heterokladischen Zellreihe gebildet ist. Es ist zu bemerken, dass diese Zellreihen gar keine Bruchstücke ausmachen, sondern von ganz individueller Natur, vollständig und, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, von selbständiger Entwickelung sind.

Die Individuen, welche die Hauptmasse der fraglichen, scheiben- oder polsterförmigen Pflanzenkörper bilden, sind langgestreckt, entweder ihrer ganzen Länge nach oder wenigstens unterhalb in der Dickenrichtung des Körpers orientiert, im letzten Falle oberhalb mehr oder wenig der Oberfläche parallel verlaufend. Ihre Länge ist folglich der Dicke des Körpers gleichkommend oder sie mehr oder weniger übertreffend. Zumeist

sind sie reich verzweigt, wenigstens ebenso reich wie die Fig. 1, Taf. 1 angiebt, und einige ihrer Endzweige sind gewöhnlich stark verlängert. Es ist hauptsächlich derartige reich verzweigte Individuen, die über die Oberfläche hervorragen und den Pflanzenkörper rauh machen. Diese Individuen sind jedoch hinsichtlich der Verzweigung sehr verschieden entwickelt; vergl. Taf. 1, Fig. 2—4. Einige sind ganz einfach, wie z. B. dasjenige, welches Fig. 5, Taf. 1 abbildet, aus einem längeren Haupttriebe und einem einzigen aus dessen Basaltheile entwickelten, kurzen, einfachen Zweige bestehend. Fig. 1, Taf. 2 stellt ein mittelstarkes Individuum dieser Art vergrössert dar. Die Triebe, aus denen diese Individuen bestehen, sind durchgängig von Sprossnatur, d. h. wenigstens während ihres ganzen oder des grössten Theiles ihres Lebens Assimilationsorgane. Derartige Triebe nenne ich im Folgenden schlechthin Sprosse. Es ist jedoch die Regel, dass aus der Basis dieser Sprosse der eine oder der andere Trieb ausgeht, der wurzelähnlich ist. Diese wurzelähnlichen Triebe, Wurzeln, verbinden die verschiedenen Individuen unter einander und mit den der Unterseite des Körpers angehörigen Individuen; vergl. Taf. 1, Fig. 3—7 (*w*). Nur sehr selten habe ich bei den betreffenden Individuen Abschnitte des oberen Theiles des Sprosses zu wurzelähnlichen, anhaftenden oder umgreifenden Organen umgebildet gefunden. Ein derartiges Individuum bildet Fig. 3, Taf. 1 ab, dessen Trieb *gr* mit seiner stark umgeformten Spitze ein Kieskorn fest umschloss, während der Trieb *w* fast rankenförmig ein angrenzendes Individuum umfasste.

Von den jetzt besprochenen Individuen in mehreren Hinsichten verschieden sind diejenigen, welche nebst den Basaltheilen der soeben geschilderten den unteren Abschnitt der scheiben- oder polsterförmigen Pflanzenkörper bilden. Sie verlaufen grösstentheils parallel der Unterfläche, sind kurz, spärlich verzweigt, ohne verlängerte Endzweige, mehrere zum Anhaften umgebildete Triebe besitzend und daneben von den vorigen in ihrem cellulären Bau abweichend. Selten sind sie so kräftig entwickelt wie das in der Fig. 8, Taf. 1 abgebildete, meist sind sie viel kleiner, sehr gut für Anhaften, aber nur in geringerem Grade für Assimilation ausgebildet; vergl. Taf. 1, Fig. 9—10. Ein sehr charakteristisches Individuum dieser Art habe ich auf der Tafel 3, Fig. 1 abgebildet. Es besteht aus einem als Spross fungierenden zweizelligen Körper und zwei diesem entspringenden, kräftigen, zu Haftorganen ausgebildeten Trieben.

Einige Individuen des Pflanzenkörpers bilden gleichwie eine Vereinigung der zwei jetzt erwähnten Arten von Individuen. Ein solches zeigt die Fig. 2, Taf. 2. Sein Haupttheil war längs der Unterseite eines scheibenförmigen Körpers verbreitet, trug aber einen starken, senkrecht durch den Körper verlaufenden Zweig. Auch das auf der Taf. 2, Fig. 3 dargestellte Individuum scheint derselben Art zu sein. Dies ist anfangs in senkrechter Richtung gewachsen, hat aber später einen Zweig *b* entwickelt, der den Charakter eines Individuums der Unterseite angenommen hat. Es ist bemerkenswerth, wie hierbei die Polarität sich ändert; der Abschnitt *b'—c* ist von anderer Polarität als sowohl der Abschnitt *c—c'* wie der unterhalb *b* gelegene Sprossabschnitt, obwohl diese verschiedenen Theile ein zusammenhängendes Ganze bilden.

Wenn es gelingt, ganz vollständige Individuen aus den scheiben- oder polsterförmigen Körpern hervorzupräparieren, findet man fast ohne Ausnahme, dass ihr Basaltheil von anderer Beschaffenheit als der übrige Theil ist. Er besteht aus einem ein- oder zweizelligen Körper, der durch grössere Stärke, dickere, mehr deutlich geschichtete Aussenwand und oft auch durch eine andere Form von dem übrigen Theile verschieden ist. Er ist nicht selten von Epiphyten oder einem dicken Schlammlager bedeckt, dadurch sein höheres Alter deutlich zeigend. Bisweilen ist er ganz leer (vergl. Taf. 1, Fig. 9), zumeist reich an Inhalt, der grösstentheils aus gefärbten Körnern und unregelmässigen Klumpen besteht. Es ist, wie mir scheint, mit voller Berechtigung anzunehmen, dass diese Basalkörper der Individuen eine Art von Brutkörpern sind, aus welchen die Individuen sich entwickelt haben. Mehrmals hat ein Basalkörper nur einen Spross und zwar etwas schräg aus dem einen Ende getrieben; vergl. Taf. 1, Fig. 13, welche die Basis eines Individuums, dem in der Fig. 1, Taf. 2 abgebildeten gleichend, darstellt. Mehr selten ist der entwickelte Spross völlig seitenständig, aus der Mitte des Basalkörpers entspringend. Bisweilen sind aus dem einen Ende (dem oberen) des Basalkörpers zwei Sprosse hervorgewachsen, der eine von beträchtlicherer Länge, der andere sehr kurz, letzterer mit einer wurzelähnlich ausgebildeten Verzweigung; vergl. Taf. 1, Fig. 14, die den Basaltheil des Individuums auf der Taf. 1, Fig. 5 zeigt. Zumeist entwickelt sich wie im erstbeschriebenen Falle etwas schief aus dem einen Ende des Basalkörpers ein Spross, aber zugleich aus dessen anderem Ende und ebenfalls etwas schief eine Wurzel; Taf. 1, Fig. 7. Eine gleichartige Neubildung ist aus dem einzelligen Basalkörper des in der Fig. 3, Taf. 1 gezeichneten Individuums hervorgegangen, aber

wie das stärker vergrösserte Bild, Taf. 1, Fig. 15 zeigt, ist nur die Wurzel seitenständig, der Spross dagegen von axiler Stellung. Bei dem in der Fig. 2, Taf. 2 abgebildeten Individuum ist *bk* der Basalkörper. Das Bild zeigt, dass aus ihm keine Wurzel sich entwickelt hat, dass aber eine reichlichere Sprossbildung stattgefunden hat, indem dem oberen Ende zwei Sprosse von verschiedener Stärke, der eine etwas seitenständig, der andere von axiler Lage, und aus dem unteren Ende etwas seitlich ein dritter Spross hervorgewachsen sind. Das kleine Individuum, das die Fig. 10, Taf. 1 zeigt, besitzt einen zweizelligen Basalkörper, von dessen Zellen nur die eine ausgetrieben hat; dem Ende ist ein axiler Spross entsprungen, der Seite, etwa an der Mitte der Zelle, eine reich verzweigte Wurzel oder vielleicht eher ein Wurzelträger. Die Fig. 1, Taf. 3 zeigt ein Individuum, das aus einem zweizelligen Basalkörper und zwei je einer Zelle fast endständig entspringenden starken Wurzeln besteht.

Das oben Angeführte giebt sicherlich nur einige Arten der aus diesen Basalkörpern stattfindenden Neubildung an. Aus dem Mitgetheilten geht jedoch genügend hervor, dass diese Basalkörper sehr wichtige Theile dieser Gewächse sind und dass sie aus verschiedenen Regionen sowohl spross- wie wurzelähnliche Triebe zu entwickeln vermögen. Es ist doch zu bemerken, dass ich, wie oben angegeben ist, zwar Sprosse, aber keine Wurzeln von axiler Lage gesehen habe. Die Wurzeln entspringen, wie es scheint, den Basalkörpern immer seitenständig.

Dass die Basalkörper umgeformte Sprosszellen oder Sprossabschnitte sind, ist schon aus ihrer Form und ihrem Bau ersichtlich. Ihre Entwickelung zeigt auch, dass dies der Fall ist. In erwachsenen Sprossen kommen oft einzelne Zellen oder ganze Reihen von Zellen vor, welche durch grössere Ausbauchung besonders oberhalb, grössere Wanddicke und reicheren und dichteren Inhalt von den angrenzenden Zellen abweichen. Der Inhalt ist zuweilen so kompakt, dass die Zellen undurchsichtig werden und fast schwarz erscheinen. Die Fig. 2, Taf. 3 stellt eine solche Zellenreihe, mit dem Inhalt der Zellen weggelassen, und die Fig. 3 eine der Zellen stärker vergrössert dar. Wenn diese Zellen sich ihrer Reife nähern, sterben die angrenzenden, nicht umgebildeten Zellen ab, jedoch am meisten einen unbedeutenden Rest ihrer Wand in Verbindung mit dem künftigen Basalkörper zurücklassend; vergl. Taf. 3, Fig. 4. Wenn mehrere derartige Zellen zu einer Kette verbunden sind, machen sie sich durch Spaltung oder Auflösung der Mittellamelle unter stärkerer Abrundung der Zellenenden aus dem Vereine frei; vergl. Taf. 3,

Fig. 4—5 Eine derartige im Austreiben begriffene Zelle zeigen die Fig. 6—8 auf der Tafel 3. Eine seitenständige Wurzel hat sich entwickelt und an dem einen Ende sind zwei Vegetationpunkte angelegt.

Aus den vorgeführten Thatsachen glaube ich schliessen zu können, dass diese Zellen Fortpflanzungskörper von gonidialer Natur und ihrer Anlage und Entwickelung nach den von Wille Akineten benannten Fortpflanzungskörpern anzureihen sind. Ihr allgemeines Vorkommen und die verschiedenen Entwickelungsstufen, worauf sie innerhalb eines scheiben- oder polsterförmigen Pflanzenkörpers sich finden, macht die Annahme berechtigt, dass sie die Erhaltung oder Verjüngung und das Wachsthum der Pflanze zu bewirken haben. Es ist wohl mit voller Sicherheit anzunehmen, dass diese mächtigen Pflanzenkörper mehrjährig sind, sowie auch dass die sie zusammensetzenden Individuen ein kürzeres Dasein haben. Die stattfindende Erhaltung und das Wachsthum der Pflanze würde dann in der Weise verlaufen, dass eine grössere oder kleinere Menge der Individuen nach der Bildung von Gonidien absterben und aus den gebildeten Gonidien neue Individuen sich entwickeln, welche die abgestorbenen ersetzen und zugleich die Individuenzahl vergrössern, folglich den Zuwachs des ganzen Körpers bewirken. Wenn die Neubildung von Individuen ziemlich gleichmässig in dem ganzen Körper verläuft, kommt dieser eine gleichförmige, dicht spongiöse Masse auszumachen; wenn sie dagegen an einer oder einigen Stellen ausbleibt oder nach einem zu geringen Maasstab eintritt, entstehen Vertiefungen, Hohlräume oder sogar solche besonders bei den scheibenförmigen Körpern vorkommende Löcher, wie sie oben beschrieben wurden. Es ist ersichtlich, dass hierdurch eine Zerlegung der Pflanze in selbständige Individuen stattfinden kann. Die grobe Auszweigung, die das im Textbilde 1, *d* (Seite 3) dargestellte Exemplar besitzt, ist wahrscheinlich so zu erklären, dass in dieser Region eine reichlichere Bildung von neuen Individuen als im angrenzenden Abschnitte, möglicherweise in Verbindung mit einem kräftigeren Wachsthum der verschiedenen Individuen eingetreten ist. Die Form dieser Auszweigung scheint mir zu zeigen, dass sie ein gewissermassen selbständiges Leben geführt hat. Da ihre Verbindung mit dem Hauptkörper sehr löslich ist, könnte sie sich leicht lostrennen und völlig individualisiert werden.

Es ist wohl möglich, dass eine derartige ungleichmässige Individuenbildung, wie die oben erwähnte, und ein damit zusammenhängender ungleichförmiger Zuwachs, dem Lebensplane der Pflanze angehört, um eine in strengerer Meinung vegetative Vermehrung zu bewirken und

dass folglich nicht nur die Verjüngung und das Wachsthum, sondern auch die Vermehrung dieser sonderbaren Pflanzenkörper von der Bildung und der Entwickelung der fraglichen Gonidien abhängt.

Ich habe keine Schwärmkörper irgend einer Art bei der Pflanze beobachtet, habe aber keine Veranlassung zu bezweifeln, dass solche wenigstens unter gewissen Umständen entwickelt werden. Ich bin jedoch genöthigt, aus meinen Beobachtungen den Schluss zu ziehen, dass ihre Bildung von keiner oder wenigstens sehr untergeordneter Bedeutung für die Erhaltung und den Zuwachs dieser Pflanzen ist, sondern dass ihnen die Erzeugung neuer scheiben-oder polsterförmiger Pflanzenkörper ausschliesslich oder so gut wie ausschliesslich obliegt. Bei meiner ganz eingehenden Untersuchung der Pflanze habe ich unter den unzähligen den Körper zusammensetzenden Individuen nur ein einziges gefunden, von dem es angenommen werden könnte, es sei von einem Fortpflanzungskörper anderer Art als die durch die Umbildung von Sprossabschnitten erzeugten Gonidien erwachsen. Dies ist in den Fig. 11—12, Taf. 1 abgebildet worden. Es besteht, wie die Fig. 11 angiebt, aus einem sprossähnlichen und einem wurzelähnlichen Abschnitte, deren Längenaxen zusammenfallen. Ein als Gonidie zu deutender Körper ist nicht vorhanden. Es ist zwar einer unentwickelten Gonidie angewachsen, steht aber mit dieser in keiner organischen Verbindung; vergl. Fig. 12. Das Individuum hat folglich einen derartigen Bau, wie zu erwarten war, falls es sich aus einem Schwärmkörper, einer Zoogonidie oder einer Zoospore entwickelt hätte. Es ist zwar möglich, dass dies der Fall ist, aber eine andere Annahme ist nicht nur möglich, sondern vielleicht wahrscheinlicher, diejenige nämlich, dass das fragliche Individuum entweder aus einem Gonidialkörper hervorgegangen ist und seine ungewöhnliche Ausbildung auf der bei diesen Gewächsen oft eintretenden Zelldurchwachsung oder Zellumbildung beruht oder dass es durch die Absonderung und Individualisierung eines Zweiges eines anderen Individuums entstanden ist. Die Fig. 9, Taf. 3 stellt eine Durchwachsform dar, der die Herstellung der schliesslichen Ausbildung dieses Individuums zugeschrieben werden könnte. Die Zelle *a* hat durch die Zelle *b* durchzuwachsen begonnen. Die Querwand ist durchgebrochen und ein neues Wandstück, das sich der Aussenwand ansetzt, ist gebildet. Der von der Zelle *a* erzeugte Theil kommt in der Längenaxe der erzeugenden Zelle zu liegen. Wie die Fig. 10, Taf. 3 es zeigt, kann eine solche Anlage sich zu einer Wurzel entwickeln. Möglicherweise hat die Wurzel des fraglichen Individuums (Taf. 1, Fig. 11) sich in dieser Weise entwickelt. Man könnte

sich dann den Verlauf der Entwickelung so denken, dass eine der untersten Zellen des Hauptsprosses eines aus einem gonidialen Körper entsprungenen Individuums oder die der Hauptaxe eines sich losmachenden Zweiges eines Individuums unter Durchwachsen der unten angrenzenden Zelle oder Zellen eine axile, später sich an einen Gegenstand beliebiger Art, im vorliegenden Falle einen unentwickelten Gonidialkörper, befestigende Wurzel erzeugt hatte. Es lässt sich vielleicht auch annehmen, dass der Basaltheil des fraglichen Individuums seinen Bau einem Zellbildungsverlauf zu danken hat, demjenigen ähnlich, welcher bei dem in der Fig. 3, Taf. 2 dargestellten Individuum stattgefunden hat. Der Zellinhalt hat sich mit einer neuen Wand umgeben, die vorige Wand ist gesprengt und die entstandene Zelle hat sich durch eine Querwand getheilt. Der Basis entspringt ein wurzelartiger Trieb. Die neu entstandene Zellreihe liegt zwar nicht in der Längenaxe des Sprosses, aber es lässt sich denken, dass eine derartige Neubildung mit anderer Lage der durch die Verjüngung gebildeten Zelle oder Zellreihe stattfinden kann; vergl. Taf. 3, Fig. 11.

Die Sprosse der Individuen sind, wie aus den gelieferten Figuren erhellt, in sehr verschiedenem Grade verzweigt. Es ist auch oben angegeben, dass die Individuen, welche überwiegend dem unteren Abschnitte des Pflanzenkörpers angehören und im Ganzen wagrecht orientiert sind, eine weit spärlichere Verzweigung zeigen als die mehr senkrecht gerichteten und an die Oberfläche des Körpers sich erhebenden, obschon es unter diesen auch solche giebt, die sehr schwach oder bisweilen sogar nicht verzweigt sind. Die Verzweigung ist traubenförmig, obschon durch das oft eintretende Absterben von Sprosspitzen eine cymöse, zumeist eine sympodiale, bisweilen eine gabelige Verzweigungsart zum Vorschein kommt. Bei den reicher verzweigten Individuen lässt sich manchmal ein Haupttrieb nur sehr schwerlich verfolgen. Die Zweige entgehen allseitig, jedoch oft und zwar besonders die der längeren, die Oberfläche erreichenden Individuen durch eintretende Biegung mehr oder weniger einseitig gerichtet. Sie sind bald und zumeist zerstreut, bald und besonders bei reichlicherer Verzweigung paarweise und dann entweder ganz gegenständig oder zumeist einander genähert oder ganz dicht angedrängt; vergl. Taf. 3, Fig. 12. Die Anzahl Zweiggenerationen ist eine geringe, sehr selten mehr als vier. Die Richtung der Zweige unterliegt grossem Wechsel. Bei reicherer Verzweigung gehen sie unter einem ziemlich spitzen Winkel aus. Einige Zweige bleiben kurz, andere und zwar besonders die Endzweige der längeren, senkrechten Individuen

wachsen nicht selten zu bedeutenderer Länge aus. Zumeist sind die Zweige cylindrisch, jedoch unregelmässig, bisweilen und zwar bei den kräftigeren Individuen der Unterseite keulenförmig, mehr oder weniger perlenschnurförmig; vergl. Taf. 1, Fig. 8.

Die Triebe, welche hauptsächlich die Befestigung und die Zusammenfügung der verschiedenen Individuen eines Körpers herstellen, weichen hinsichtlich ihrer Anlage, Ausbildung und Form sehr beträchtlich von einander ab. Wie oben näher besprochen ist, haben sie sehr selten durch ihre Richtung den Charakter einer Hauptwurzel, sondern sind zumeist entweder deutliche Seitenbildungen und dann im ganzen von Wurzelnatur oder zu Haftorganen umgebildete Sprossenden. Im vorigen Falle entspringen sie nicht selten direkt dem Basal-(Gonidial-)körper und dann meist nahe dessen unterem Ende (Taf. 1, Fig. 6—7) oder, wenn jener zweizellig ist, dem unteren Ende einer jeden Zelle; Taf. 3, Fig. 1. Bisweilen gehen sie fast aus der Mitte eines Basalkörpers aus; vergl. Taf. 3, Fig. 6. Aber auch Auszweigungen der sprossähnlichen Triebe nehmen bisweilen ganz die Natur von Wurzeln an (Taf. 2, Fig. 2) oder sie sind an ihrer Basis mehr sprossähnlich, in ihrem oberen Theil wurzelähnlich entwikkelt; vergl. Taf. 2, Fig. 3, die mit *w* und *w'* bezeichneten Triebe. Sehr gemein sind Triebe, deren Spitzen sich zum Anhaften umbilden, besonders, wie oben erwähnt, bei den dem unteren Abschnitte des Pflanzenkörpers angehörigen Individuen; vergl. Taf. 1, Fig. 9. Bald ist es die Spitze eines Hauptsprosses, bald die eines Zweiges, welche eine Umbildung in dieser Richtung zeigt; vergl. Taf. 1, Fig. 9, Taf. 2, Fig. 2 und Taf. 3, Fig. 15. Die hierbei stattfindende Umbildung ist selten eine sehr geringe, zumeist sehr bedeutend; vergl. Taf. 3, Fig. 13—14 und 15—16, die Fig. 15 die Spitze des nicht umgebildeten Hauptsprosses, die Fig. 16 einen diesem entspringenden Zweig mit der Spitze schwach umgebildet zeigend. Das Ende der Wurzel oder des wurzelähnlichen Triebes ist selten ganz einfach (Taf. 1, Fig. 9), oft mehr oder weniger verzweigt; vergl. Taf. 1, Fig. 9, Taf. 3, Fig. 13—14. Bisweilen ist die Verzweigung eine sehr reichliche, wie die Fig. 1 und 17, Taf. 3 angeben, erstere eine an einem anderen Individuum befestigte, letztere eine ein Kieskorn fest umschliessende Wurzel zeigend. Die Verzweigung ist immer sehr wechselnd und zumeist ganz unregelmässig; vergl. z. B. Taf. 1, Fig. 12 und Taf. 3, Fig. 17. Die Wurzelspitzen haften Gegenständen beliebiger Art sehr dicht und fest an, woraus zu schliessen ist, dass sie gegen Druck sehr empfindlich sind und davon beeinflusst wachsen.

Eine ungewöhnliche Wurzelform zeigt die Fig. 10, Taf. 1. Ihr Basaltheil ist verkehrt kegelförmig, mehrere feine, cylindrische, nicht durch Querwände abgetrennte Zweige fast handförmig entsendend. Wie die Fig. 10, Taf. 3 angiebt, tritt eine Verjüngung der Wurzel bisweilen ein.

Die Sprosse der die Hauptmasse des Pflanzenkörpers bildenden Individuen bestehen aus Zellen, die meist 3—4-mal länger als dick sind. Die Zellen, welche keine Zweige entsenden, sind völlig cylindrisch, schwach tonnenförmig, cylindrisch keulenförmig oder cylindrisch, an den beiden Enden schwach aufgetrieben, diejenigen, welche Zweige tragen, gewöhnlich mehr oder weniger keulenförmig oder in der zweigtragenden Region stark aufgetrieben. Die Endzellen sind nach beendigtem Wachsthum viel länger als die übrigen, oft cylindrisch spulförmig, nicht selten mehr oder weniger schief oder gebogen; vergl. z. B. Taf. 2, Fig. 3; Taf. 3, Fig. 15. Die Sprosse der Individuen der Unterseite sind aus kürzeren, zumeist nur $1^1/_2$—2 mal längeren als dicken und mehr in der Form und Grösse wechselnden Zellen aufgebaut; vergl. Taf. 1, Fig. 8. Die Wurzeln bestehen aus viel feineren Zellen, welche oft eine sehr bedeutende Länge im Verhältniss zu ihrer Dicke erreichen, obwohl auch sehr kurze Zellen vorkommen; vergl. Taf. 1, Fig. 7, 9; Taf. 3, Fig. 14, 17.

Das Wachsthum sämmtlicher Triebe wird durch die Wirksamkeit der Scheitelzellen vollbracht. Interkaläre Zellbildung kommt vielleicht bisweilen vor, obwohl es mir nicht gelungen ist, dies zu beobachten. Es scheint mir jedoch als ganz sicher festzustellen zu sein, dass interkaläre Zellbildung lange nicht so häufig wie bei den *Eucladophoren* eintritt und keineswegs dem typischen Aufbau wie bei der Gattung *Acrosiphonia* angehört.

Die Wände der Sprosszellen verdicken sich durch allmählich gebildete Cellulosaschichten. Ihre Dicke erreicht zuletzt etwa 5 μ. Die Schichtung tritt gewöhnlich sehr deutlich hervor. Am stärksten ist die Verdickung und die Schichtung am deutlichsten bei den zu Fortpflanzungskörpern umgebildeten Zellen, besonders an ihren Enden; vergl. Taf. 3, Fig. 6—8. Die Aussenwand zeigt lange, gedrängte Streifen oder sehr feine Rippen. Bei einigen, aber nicht sehr zahlreichen Zellen habe ich eine ziemlich ausgeprägte Querstreifung beobachtet. Bei den noch im Wachsthum und in Theilung begriffenen Endzellen ist die Aussenwand von gleichem Bau wie die inneren Zellen (Taf. 3, Fig. 18), aber nach beendigtem Wachsthum werden ihre Spitzen durch die allmähliche

Bildung von mächtigen, gegen einander ziemlich deutlich begrenzten und die Spitze zuletzt ausfüllenden Cellulosamassen in eigenthümlicher Weise verdickt; Taf. 3, Fig. 19.

Das Chromatophor der Assimilationszellen besteht aus einer hohlcylindrischen, netzförmig durchbrochenen, wandständigen Scheibe und einem dieser entspringenden, in das Zellinnere hineinragenden, aus sehr dünnen, fast ungefärbten, zellig verbundenen Lamellen gebildeten Netzwerke. Die Maschen des äusseren Theiles sind von verschiedener Grösse, doch meist klein, die sie begrenzenden Bänder zum Theil breit, zum Theil ungemein fein. Ihnen und besonders denjenigen von grösserer Breite finden sich zahlreiche, sehr kleine Pyrenoiden eingelagert; Taf. 3, Fig. 20, 22—23. Auch die in die Zelle hineinragenden Lamellen scheinen eben solche einzuschliessen, zuletzt oder bisweilen von mächtigen Stärkehüllen umgeben. Bei der Behandlung kräftig assimilierender Zellen mit einer Jodlösung habe ich solche Bilder bekommen, wie sie Fig. 21, Taf. 3 zeigt. Die Maschen des äusseren Abschnittes des Chromatophors sind von Pyrenoiden mit sehr mächtigen, sicherlich stark aufgequollenen, intensiv blau gefärbten Hüllen von Stärkesubstanz ausgefüllt. Ich kann dies nicht anders deuten, als dass diese Pyrenoiden in den dünnen Lamellen ihren Sitz haben.

Oft kamen die Endzelle oder die obersten Zellen des Sprosses inhaltsleer vor. Solche Zellen sind denjenigen bei anderen Cladophoreen, welche Schwärmkörper erzeugt und sie entleert haben, sehr ähnlich. Da es jedoch trotz eifrigem Nachsuchen mir niemals gelungen ist, die bei den diesbezüglichen Zellen vorkommenden Austrittsöffnungen zu finden, bin ich genöthigt anzunehmen, dass ihr Mangel an Inhalt auf irgend einer anderen Ursache beruht. Es sind für gewöhnlich die Zellen derjenigen Sprossabschnitte, die sich über die Oberfläche erheben, folglich Abschnitte äusseren Kräften ganz exponierter Zellreihen, welche einen solchen Bau zeigen; vergl. Taf. 2, Fig. 2. Es ist daher wohl möglich, dass ihr Absterben von äusseren Einwirkungen bedingt wurde. Vielleicht ist hierbei die Beobachtung von Belang, dass in solchen Zellen ein bisweilen in reichlicher Gonidienbildung begriffener Pilz nicht selten sich findet, manchmal die Zelle ganz ausfüllend.

Ich ging im Vorigen von der Annahme aus, dass die soeben beschriebene Pflanze unter diejenigen Cladophoren zu zählen wäre, die Kützing (Spec. Alg. S. 413), De Toni (Syll. Alg. S. 341) und Wille (Chloroph. Syst. S. 118 die Section *Aegagropila* bilden lassen. Hiergegen könnte zwar die Einwendung gemacht werden, dass die gewöhn-

lichste Form der Pflanze, die von einer Scheibe, nicht als die typische Aegagropilenform gelten kann, denn als eine solche ist nach den angeführten Auctoren die Kugel- oder Polsterform zu betrachten. Da sie aber, wie oben angegeben wurde, bisweilen auch in der Form eines Polsters auftritt und andere Aegagropilen z. B. *Ae. holsatica* Kütz. bald kugel-, bald polsterförmig sind und sogar ganz lockere Watten bildende Cladophoreen ohne Einwendung den Aegagropilen angereiht werden, schien mir ihre Form nicht zu verhindern, sie als eine Aegagropila zu betrachten, obgleich eine so scharf ausgeprägte Scheibenform wie die ihrige bei keiner der dieser Gruppe bisher zugezählten Arten zur Zeit bekannt war; vergl. Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 113 und 212.

Einen wichtigen Grund gegen ihre Anreihung an die Aegagropilen wäre vielleicht darin zu sehen, dass die Pflanze, wie oben nachgewiesen wurde, als eine aus zahlreichen selbständigen Individuen gebildete Kolonie oder, um die herkömmliche botanische Terminologie zu gebrauchen, als ein Coenobium zu betrachten ist. Da die Aegagropilen in dem Chlorophyceen-System Wille's eine Section der Gattung Cladophora ausmachen und diese Gattung von ihm dadurch charakterisiert wird, dass »der Thallus, welcher im Allgemeinen aufrecht ist oder kugelförmige Massen bildet, aus einer stark verzweigten Reihe von Zellen besteht» (Wille a. a. O.), ist wohl dies so zu fassen, dass seiner Meinung nach die runden Klumpen, welche der Thallus der Aegagropilen bildet, aus je einer stark verzweigten Zellreihe bestehen. Von derselben Ansicht scheint auch Lagerheim bei der Veröffentlichung seines Aufsatzes: »Ueber Aegagropilen» — in La Nuova Notarisia 1892 — gewesen zu sein. Der Verfasser nimmt hier die Aegagropilen in so weiter Umfassung, dass er damit versteht »mehr oder weniger kugelförmige Algen» von verschiedener systematischer Stellung, Florideen, Fucoideen, Chlorophyceen und Cyanophyceen, unterscheidet aber zwei Gruppen, wovon »die erste Formen enthält, welche durch *die allseitige Entwickelung eines Individuums* entstehen», z. B. ein kugelförmiges Lithothamnion, »die» zweite dagegen »aus Formen besteht, die durch Verfilzung von mehreren Individuen zustandegekommen sind». »Die bis jetzt bekannt gewordenen Aegagropilen gehören alle zur ersten Gruppe». In der folgenden Auseinandersetzung sagt er: »Die meisten, längst bekannten Aegagropilen finden wir unter den Chlorophyceen. Allgemein bekannt unter diesen ist die Untergattung Aegagropila Kütz. von Cladophora Kütz.». Hieraus ist wohl der Schluss zu ziehen, dass nach der Meinung Lagerheim's die

Pflanzen, welche die rein systematische Gruppe *Aegagropila* Kütz. bilden, durch allseitige Entwickelung je eines Individuums entstanden wären.

Meine Untersuchungen von einer Anzahl mir zu Gebote stehender Aegagropilen berechtigen mich jedoch, wie ich glaube, mit aller Bestimmtheit zu behaupten, dass es für die wahren Aegagropilen bezeichnend ist, dass sie als Coenobien, von einer grossen Anzahl selbständiger, obwohl unter einander mehr oder weniger fest verfilzter Individuen gebildet, vorkommen, woraus folgt, dass dieser Charakter der von mir eingehender untersuchten Pflanze gar nicht verhindert, sondern im Gegentheil einen direkten Anlass giebt, sie dieser Chlorophyceen-Gruppe beizuzählen. Unter den von mir etwas näher untersuchten Aegagropilen finden sich einige von den am meisten typischen und am längsten bekannten Aegagropila-Arten, wie *Cl.* (*Ae.*) *holsatica* Kütz., *Cl.* (*Ae.*) *Linnæi* Kütz., *Cl.* (*Ae.*) *Sauteri* (Nees ab. Es.) Kütz. und *Cl.* (*Ae.*) *Martensii* Menegh. Es stand mir freilich von diesen Arten, Cl. (Ae.) Sauteri ausgenommen, nur getrocknetes Material zur Verfügung, aber das fragliche Verhältniss liegt bei Allen so klar, dass es bei etwas näherer Aufmerksamkeit und einiger Vorsicht bei dem Entwirren der aufgeweichten kugelförmigen Körper leicht zu konstatieren ist. Eine kräftige Stütze für die Richtigkeit meiner Auffassung finde ich darin, dass Wittrock, dessen Genauigkeit und Geschicktheit bei seinen Untersuchungen allgemein anerkannt ist, wenigstens eine Aegagropila betreffend zu demselben Schluss wie ich gekommen ist. In der Diagnose der von ihm entdeckten und zuerst beschriebenen Varietät *armeniaca* von der Art *Ae. muscoides* gebraucht er den Ausdruck Coenobium. Es heisst nämlich: var. »Coenobio globoso vel ellipsoideo», was ohne Zweifel darlegt, dass seiner Beobachtung und Ansicht gemäss der kugelförmige oder ellipsoidische Körper dieser Varietät eine Kolonie ausmacht; vergl. Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 111.

Wenn ich die Aegagropilen-Körper als Coenobien bezeichne, will ich natürlich darin die Bedeutung einlegen, dass sie als solche ein individuelles Leben führen und dass hierbei die sie zusammensetzenden Individuen als Organe dienen. Derartige Pflanzen sind freilich nicht gemein, aber kommen jedoch, wie bekannt, und zwar besonders unter den Chlorophyceen, obwohl nicht immer von ganz gleicher Art, vor.

Es schien mir nöthig, diese Bemerkung zu machen, um den Unterschied hervorzuheben, welcher zwischen den Aegagropilen und anderen bisweilen anzutreffenden Pflanzenkörpern herrscht, die zwar kugelförmig sind und sogar aus Cladophoraceen-Materiale bestehen, aber weil sie den

angegebenen, die Aegagropilen bezeichnenden Charakter nicht besitzen, keineswegs der Aegagropilen-Gruppe, im systematischen Sinne genommen, zuzuzählen sind. Eine derartige scheinbare Aegagropila habe ich die Gelegenheit gehabt kennen zu lernen. Sie war im Jahre 1895 von Herrn G. Hellsing bei Harnäs in Gestrikland in sehr beträchtlicher Menge gesammelt. Sie bildet sehr regelmässige, grössere und kleinere Bälle und ist oberflächlich angesehen einer Aegagropila so ähnlich, dass man sie sehr leicht für eine solche halten könnte. Schon der Querschnitt eines derartigen Balles (vergl. Textb. 2) zeigt jedoch einen bedeutenden Unterschied zwichen ihm und einer kugelförmigen wahren Aegagropila, z. B. *Ae. Sauteri*, indem die den kugelförmigen Körper bildenden Elemente nicht strahlig verlaufen, sondern ein unregelmässiges Gewirr, z. B. wie die Fadenstückchen eines durchgeschnittenen Zwirnknäuels bilden. Eine nähere Untersuchung zeigt, theils dass die Kugeln zwar hauptsächlich aus Cladophora-Material (Cladophora glomerata) bestehen, aber dass diesem beigemengt sich findet noch verschiedenes Andere, z. B. Fragmente von Moossprossen und besonders in beträchtlicher Menge Stückchen von Sphacelaria cirrhosa etc., theils, und was wichtiger ist, dass die darin eingehende Cladophora nicht in vollständigen Individuen, sondern in sehr ungleichgrossen Bruchstücken, sowohl Endtheilen wie Innertheilen, auftritt. Es ist folglich eine ganz ungleichartige Masse, deren einheitliche äussere Form ganz und gar durch Wasserbewegungen zustandegekommen ist. Da diese kugelförmigen Körper keine lebendigen Einheiten darstellen, sondern nur eine Art von Kunstprodukten ausmachen, sind sie trotz der Art des hauptsächlichen Materiales nicht zu den Aegagropilen zu zählen, wenn diese als eine wahre systematische Gruppe betrachtet werden. Dagegen gehören sie unter die Aegagropilen in dem wohl als biologisch zu fassenden Sinne des Aufsatzes Lagerheim's über Aegagropilen und sind zwar der darin besprochenen zweiten Gruppe zuzurechnen, »welche», wie oben angeführt wurde, »aus Formen besteht, die durch Verfilzung von mehreren Individuen zustandegekommen sind», und folglich der von ihm erläuterten *Chætomorpha crassa* (Ag.) Kütz.

a *b*

Fig. 2.

Querschnitte eines kugelförmigen zum grössten Theil aus Cladophora-Material gebildeten Körpers »*pila marina*;» *a* von der Aussenseite, *b* von der Schnittfläche.

f. *Aegagropila* (Welw.) am nächsten zu stellen, der einzigen bis dahin bekannt gewordenen von dieser zweiten Gruppe, welche aus Algenmaterial, nicht aus abgestorbenen Pflanzenfragmenten wie Blattresten von Possidonia und Lerchennadeln gebildet ist; vergl. Lagerh. a. O. S. 92—94.

Da ich oben die Ansicht ausgesprochen, dass die wahren Aegagropilen Coenobien bilden, und zugleich angegeben habe, dass die von mir in eingehender Weise untersuchte Aegagropila aus unter einander im Bau und in der Funktion nicht unerheblich ungleichen Individuen besteht, so kann die Frage gestellt werden, ob sämmtliche Aegagropilen in der letzten Hinsicht mit einander übereinstimmen. Ich glaube, dass diese Frage zu verneinen ist und dass es unter den wahren Aegagropilen auch Arten giebt, deren individuelle Theile, obwohl nicht ganz und gar gleichartig, doch von viel geringerer Verschiedenheit sind als diejenigen der von mir beschriebenen Art. Meine Untersuchungen über *Ae. Martensii* Menegh. zeigen, dass die ihren Körper zusammensetzenden Individuen zwar von verschiedener Grösse sind, aber betreffend ihre Orientierung in den Coenobien, ihre Organisation und Funktion mit einander übereinstimmen. Dagegen scheinen mir *Ae. holsatica* f. *adnata* und eine mit dieser nahe verwandte, von Dr. Borge im Mälarsee am Ufer der Insel Killinge 1887 gesammelte Aegagropila in der betreffenden Hinsicht der von mir gefundenen Art zu ähneln.

Ich glaube wenigstens bis auf nähere Prüfung die Ansicht aussprechen zu können, dass die soeben besprochene Verschiedenheit in innigstem Zusammenhang mit dem Wachsthum und besonders mit der Art ihrer Erhaltung und ihres Zuwachses steht oder sogar davon bedingt wird. In dieser Hinsicht vertreten die von mir untersuchten Aegagropilen zwei Typen, die unter einander so grosse Verschiedenheit zeigen, dass davon wichtige Merkmale bei der systematischen Gruppierung dieser merkwürdigen Pflanzen zu gewinnen sein dürften.

Der oben citierte Aufsatz von Lagerheim zielt, wie es scheint, dahin, kräftige Beweise für die Anpassungen der Algen an das umgebende Medium zu liefern, und will die Aufmerksamkeit auf die Aegagropilen-Algen besonders deshalb lenken, weil diese »deutlicher als die meisten die formenbildende Einwirkung der Wasserbewegung und die Anpassungsfähigkeit der Algen zeigen». Der Verfasser giebt zwar nicht an, wie er sich diese formenbildende Einwirkung der Wasserbewegung und die Anpassungsfähigkeit der Aegagropilen denkt, aber es scheint, als wäre seine Meinung in der Weise zu deuten, dass die Aegagropilenform und besonders die Kugelform dieser Gewächse durch eine ganz mechanische Ein-

wirkung der Wasserbewegung bewirkt würde. Ich schliesse darauf theils davon, dass er unter die Aegagropilen, sei es auch nur die »künstlichen», etliche Bildungen rechnet wie »Ballen von Grösse und Form einer mässigen Kegelkugel, gebildet aus dicht- und festverfilzten Lerchen-Nadeln, zu jenen Kugeln durch . . . . Wellenspiel geformt», theils davon, dass er als »einigermassen zweifelhaft» bezeichnet, ob die kugelförmigen, nur in grösseren Tiefen — wo die Bewegung des Wassers nur gering sein dürfte — wachsenden Lithothamnien den wirklichen Aegagropilen zuzuzählen seien; vergl. a. O. S. 90 und 93—94. Eine solche Auffassung ist ohne Zweifel zutreffend, was die von dem Verfasser der zweiten Gruppe von Aegagropilen zugezählten Bildungen verschiedener Art angeht, aber ich kann meinerseits nicht annehmen, dass die Aegagropilen seiner ersten Gruppe, darunter folglich auch die wahren Aegagropilen, ihre kugelige Form in höherem und wesentlicherem Grade der Einwirkung der Wasserbewegung verdanken. Sie wird, so viel ich es verstehe, wenigstens zum allergrössten Theile von inneren Kräften der Pflanze bedingt, weshalb in dieser Kugelform keine Anpassungs-, sondern wenigstens hauptsächlichst eine reine Wachsthumserscheinung zu sehen ist. Die regelmässig kugelförmigen Lithothamnien, welche Lagerheim als einigermassen zweifelhafte Aegagropilen angiebt, wachsen in so tiefem Wasser, dass sie nicht von den Wellenbewegungen erreicht und gerollt werden können, und sie treten manchmal in so enormen Individuen-Massen auf, dass die bodenläufigen Meeresströmungen es nicht vermögen, die einzelnen Individuen in eine rollende Bewegung zu versetzen. Es ist ja bekannt, dass eine ausgeprägte Kugelform auch bei festsitzenden Algen, wie z. B. Rivularien, Leathesien u. A. vorkommen, ebenso wie bei Landgewächsen, z. B. mehreren arktischen, alpinen und Steppenpflanzen, deren Form von irgend einer äusseren, rein mechanisch wirkenden Kraft sicherlich nicht abhängig ist. Ich muss daher die Meinung umfassen, dass die wahren Aegagropilen sich infolge innerer Kräfte kugelförmig entwickeln und dass der dabei stattfindende Verlauf verschieden und wahrscheinlich für eine jede Art eine gewissermassen eigenartige ist.

Ae. Martensii Kütz. (Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 112) bildet bei grösserem Alter einen deutlichen Ball, aber es hält nicht schwer festzustellen, dass die diesen Ball bildenden Elemente von einem äusserlich gelegenen, gedrängten Organisationscentrum ausstrahlen. Wenigstens die grösseren Bälle bestehen aus deutlich gesonderten, strahlig verlaufenden Individuen, deren Basaltheil der Fig. 1 *a*, Taf. 4 gleicht. Aus dem Sprossende läuft, wie es sich zeigt, abwärts und gegen das orga-

nische Centrum gerichtet ein wurzelähnlicher Trieb aus. Die Wurzeln der verschiedenen Individuen, die um einander und um die unteren Theile der Sprosse gewunden sind, verbinden die verschiedenen Individuen unter einander. Die Figur zeigt zugleich, dass ein Basalkörper von gonidialer Natur bei dieser Aegagropila fehlt. Es ist auch leicht festzustellen, dass die ein Coenobium dieser Art bildenden Individuen anderen Ursprunges als wenigstens zumeist bei der oben besprochenen Art sind. Sie entstehen durch die Absonderung und Individualisierung von Zweigen oder Zweigsystemen anderer Individuen, wobei die Basalzelle des Zweiges oder Zweigsystemes abstirbt und eine Wurzel von der nächstuntersten Zelle, der künftigen Basalzelle des neuen Individuums, sich entwickelt. Es ist anzunehmen, dass diese Pflanze anfänglich aus einer befestigten, reich pinselförmig verzweigten Zellreihe besteht. Aus dieser werden durch Absonderung und Individualisierung von Zweigen neue, ebenfalls pinselförmig heranwachsende und ihrerseits in derselben Weise sich vermehrende Individuen gebildet, wobei die entwickelten Wurzeln sich verfilzen und im Vereine mit den gedrängten Basaltheilen der Sprosse das äusserliche, zusammengezogene Organisationscentrum des Coenobiums bilden. Wenn die Entwickelung neuer Individuen und ihr Heranwachsen zur Pinselform gleichmässig stattfindet, muss natürlich ganz unabhängig von der Einwirkung irgend einer äusseren Kraft ein kugelförmiger Körper entstehen. Früher oder später löst sich das Coenobium ab oder wird durch äussere Kräfte losgerissen.

Mit dieser Art stimmt hinsichtlich der Form der Coenobien, der Orientierung und des allgemeinen Baues der Individuen die Aegagropila überein, welche in dem Exsiccatenwerke von Wittrock und Nordstedt unter dem Namen *Ae. Linnæi* Kütz. vertheilt ist (N:o 36) und nicht mit der *Cladophora Aegagropila* (L.) f. *Linnæi* in Aresch. Alg. scand. exsicc. N:o 336 zu verwechseln ist. Es ist augenfällig, dass die letztere, welche vielleicht mit der von Weber und Mohr in ihrem Reiseberichte »als die wahre Conferva Aegagropila L., die in neuern Zeiten zu manchen Streitigkeiten Anlass gab», erwähnten und abgebildeten Pflanze identisch ist, derselben Art angehört wie Ae. holsatica Kütz. in Wittr. et Norst. Algæ exsicc. N:o 35. Die Fig. 2, Taf. 4 zeigt, dass die Basaltheile der Individuen von *Ae. Linnæi* Kütz. denjenigen von *Ae. Martensii* gleichen, was mit aller Wahrscheinlichkeit darauf schliessen lässt, dass die Vermehrung der Individuen eines Coenobiums bei beiden Arten in gleichartiger Weise stattfindet.

Zu derselben Artengruppe wie diese Arten sind wohl auch die stattliche *Ae. Sauteri* (Nees ab Es.) Kütz. zu führen, obwohl ihre Ausbildung weiter getrieben ist. Ein möglichst radialer Durchschnitt eines grösseren Balles von dieser Pflanze (vergl. Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 34) legt dar, dass das Coenobium einen deutlich strahligen Bau besitzt, dass aber das organische Centrum nicht oberflächlich, sondern innerlich liegt. Wenn eine in dem botanischen Musäum der Universität zu Upsala sich findende Aegagropila, wie ich glaube, diese Art in jungen Stadien ist, liegt auch bei ihr anfänglich das zusammengezogene organische Centrum äusserlich, wie aus dem im Textbilde 3 dargestellten radialen Durchschnitte dieser vermeintlichen jungen *Ae. Sauteri* ersichtlich ist. Das Coenobium besteht aus einer sehr grossen Anzahl von Individuen, die in derselben Weise wie bei den soeben besprochenen entstanden sind; vergl. Taf. 4, Fig. 3. Dass bei dieser Art der organische Mittelpunkt im Alter innerlich zu liegen kommt, lässt sich, wie leicht verständlich, durch eine reiche, lange fortwährende und streng gleichmässige, in dem Coenobium stattfindende Individuenbildung ohne erheblichere Schwierigkeit erklären.

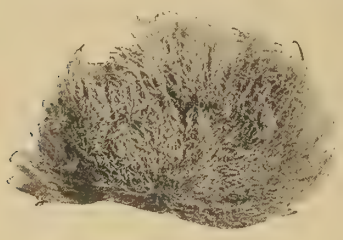


Fig. 3.
Radialer Querschnitt durch das Coenobium einer jungen *Aegagropila Sauteri* (Nees ab Es.) Kütz.

Es mag erwähnt werden, dass ich bei keiner dieser Arten weder von den oberen Sprossabschnitten ausgehende Wurzeln noch zum Anhaften umgeformte Sprossenden gefunden habe. Infolge ihrer Entstehung werden die verschiedenen Individuen eines Coenobiums wie in einander eingekeilt, wozu noch kommt ihre durch die Verflechtung der aus den Basaltheilen der Sprosse entwickelten Wurzeln hervorgebrachte Zusammenbindung.

Bei einigen über breitere Gegenstände, wie Steine, Sand- oder Kieslager, ausgebreiteten und diesen mehr oder weniger fest anhaftenden Aegagropilen habe ich einen Bau der Coenobien gefunden, der grosse Aehnlichkeit oder sogar völlige Uebereinstimmung mit der von mir gesammelten, oben in eingehender Weise beschriebenen Pflanze zeigt. Eine derartige Aegagropila scheint *Ae. holsatica* Kütz. f. *adnata* in Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 212 *a* und *b* zu sein. Die Fig. 5, Taf. 4 bildet ein vollständiges Individuum dieser Pflanze ab. Ich habe es in der Weise gedeutet, dass der mit *bk* bezeichnete Körpertheil ein Basalkörper von gonidialer Natur ist, dem eine um ein grösseres Individuum des Coenobiums gewundene Wurzel und ein in Entwickelung begriffener

Spross entsprungen sind. Dieser Auffassung gemäss wäre dieses Individuum mit dem auf der Tafel 3 durch die Figur 6 abgebildeten Individuum der von mir gefundenen Aegagropila zu vergleichen und würde folglich einen gonidialen, in Keimung begriffenen oder auf seiner ersten Entwickelungsstufe stehenden Körper ausmachen. Gleichfalls dürfte es mit Sicherheit angenommen werden können, dass der Abschnitt *bk* der Fig. 6, Taf. 4 ein Basalkörper ist, aus dem eine lange Wurzel (*w.*) und der Spross (*sp.*) entstanden sind, letzterer oberhalb zum Anhaften umgebildet. Dieses, wie ich vermuthe, völlig entwickelte Individuum ist folglich mit den Individuen, welche den unteren Abschnitt meiner Pflanze zum grössten Theil bilden, zunächst zu vergleichen. Bei *Ae. holsatica* f. *adnata* wird aber die Vermehrung der Individuen eines Coenobiums nicht nur durch die Bildung und die Entwickelung von gonidialen Körpern, sondern zugleich, obwohl mehr selten, durch die Absonderung und die Individualisierung von Zweigen und Zweigsystemen bewirkt. Dass das Individuum, dessen Basaltheil die Fig. 4, Taf. 4 zeigt, von einem solchen Ursprunge ist, scheint mir ganz sicher zu sein.

Die im Vorigen erwähnte, von Herrn Dr. Borge gefundene Aegagropila umkleidet mehr oder weniger vollständig kleinere Steine und haftet diesen sehr fest an. Es ist leicht festzustellen, dass auch diese Pflanze aus einer grossen Menge Individuen verschiedener Grösse und Ausbildung besteht und dass mehrere von denselben kräftige, den Steinen sehr fest anhaftende Organe besitzen. Ein kleineres dieser Individuen zeigt die Fig. 7, Taf. 4 und dessen Basaltheil stärker vergrössert die Fig. 8 derselben Tafel. Ein deutlicher Basalkörper ist vorhanden, aus verschiedenen Regionen mehrere Triebe verschiedener Natur und Stärke entsendend. Die gonidiale Natur des Basalkörpers geht, wie es mir scheint, aus seiner Form, seinem Bau und der Art der Sprossung mit aller Klarheit hervor. Es ist zugleich zu bemerken, dass bei dieser Aegagropila wie bei der soeben besprochenen Ae. holsatica f. adnata die Sprosse aus ihren oberen Abschnitten Wurzeln entsenden oder ihre Gipfeltheile zu Haftorganen umgebildet haben.

Aus den angeführten Thatsachen würde es folglich hervorgehen, dass Aegagropilen, welche mehr oder weniger ausgebreitete, auf Steinen befestigte Coenobien bilden, hinsichtlich der Entstehung und der Ausbildung der die Coenobien zusammensetzenden Individuen unter einander übereinstimmen, aber von den anfänglich pinselförmigen, später freie, kugelförmige Coenobien bildenden Aegagropilen erheblich abweichen.

Das nächste Ziel meiner Untersuchung einer Aegagropila in frischem Zustande war, wie oben angegeben wurde, die verwandtschaftliche Beziehung zu finden zwischen der Section *Aegagropila* der Gattung Cladophora und den Arten dieser Gattung, welche die Section *Spongomorpha* bilden, aber von J. G. Agardh und mir in eine besondere Gattung, *Acrosiphonia*, gebracht worden sind. Diese beiden Cladophora-Gruppen werden von Wille in seiner Bearbeitung der Cladophoraceen als unter einander und mit der Gruppe *Eucladophora* gleichwerthig betrachtet, während Kützing und ihm folgend De Toni sie eine gemeinsame, mit Eucladophora gleichwerthige Abtheilung der fraglichen Gattung bilden lassen. Aus den Ergebnissen meiner Untersuchung geht, wie es mir scheint, mit voller Bestimmtheit hervor, dass sich keine nähere Verwandtschaft zwischen *Aegagropila* Kütz. und *Acrosiphonia* J. G. Ag. findet. Der bei den von mir untersuchten Acrosiphonien so genau übereinstimmende allgemeine Bauplan weicht von demjenigen der Aegagropilen sehr erheblich ab. Der Aufbau des als Spross zu bezeichnenden Körpertheiles vollzieht sich bei den beiden Pflanzengruppen in ganz verschiedener Weise. Auch hinsichtlich der Zellstruktur und besonders des Baues des Chromatophors herrscht eine Verschiedenheit, der sicherlich ein grosser systematischer Werth beigelegt werden muss. Bei keiner der ziemlich zahlreichen Acrosiphonia-Arten, wovon geeignetes Untersuchungsmaterial zu Gebote stand, habe ich ein Chromatophor mit zellig verbundenen, in das Cellinnere hineinragenden Lamellen gefunden. Wenn ein derartiger Bau sich vorgefunden hätte, würde er meiner Aufmerksamkeit nicht entgangen sein, denn dieser sonderbare Chromatophoren-Bau war mir bei meinen organographischen Untersuchungen über Acrosiphonia nicht nur durch die Beschreibung von Schmitz, sondern auch durch eigene Beobachtungen bei mehreren Eucladophora-Arten gut bekannt.

Hieraus glaube ich, den berechtigten Schluss ziehen zu können, dass die Gattung *Acrosiphonia* J. G. Ag. als eine gut begrenzte Gattung zu betrachten ist und zwar nicht nur gegen die Eucladophoren, wie ich schon vorher darzulegen gesucht, sondern wenigstens ebenso gut gegen die Aegagropilen. Die Acrosiphonien zeigen durch mehrere Organisationszüge eine nähere Uebereinstimmung mit der von Wille der Fam. Valoniaceæ beigezählten Gattung *Siphonocladus* als mit der Gattung *Cladophora* s. s.

In dem Aufbau der Sprosse, dem allgemeinen Zellbau und der Struktur des Chromatophors kommen die *Aegagropilen* den *Eucladophoren* viel näher. Von diesen weichen sie jedoch darin ab, dass sie Coeno-

bien nach bestimmten Gesetzen bilden, ein Charakter, dem man nach meiner Ansicht einen so hohen systematischen Werth zuerkennen muss, dass die ihn besitzenden Pflanzen eine eigene Gattung bilden müssen. Meiner Untersuchung zufolge halte ich mich für berechtigt, der von Wittrock und Nordstedt in ihrem Exsiccaten-Werke vertretenen Ansicht betreffend den systematischen Rang der Aegagropilen beizustimmen; vergl. a. O. Index s. 64.

Was zuletzt den Namen der von mir gefundenen Aegagropila betrifft, muss ich zugestehen, dass ich etwas unschlüssig bin. Unter den mir etwas näher bekannten Arten kommt sie, wie ich auch oben angedeutet habe, der *Ae. holsatica* Kütz. f. *adnata* am nächsten. Die Uebereinstimmung tritt in der kuchen-oder polsterförmigen Gestalt der Coenobien, ihrer Zusammensetzung aus sehr ungleichen Individuen und in der reichlichen Entwickelung von besonderen, für die Erhaltung und Vergrösserung der Coenobien bestimmten Fortpflanzungskörpern auf. Aus dem mir zu Gebote stehenden, getrockneten, besonders dem in Wittr. et Nordst. Algæ exsicc. N:o 212 vertheilten Materiale scheint es mir jedoch hervorzugehen, dass die beiden Pflanzen zu erheblich von einander abweichen, um als einer und derselben Art angehörig betrachtet zu werden. Ae. holsatica f. adnata ist offenbar einem härteren oder weicheren Substrate fest angewachsen, meine Pflanze völlig losliegend, als ich sie antraf, und ihre Unterseite, obgleich von der Oberseite verschieden, doch in dem Bau kein Anzeichen davon tragend, dass die Pflanze eine längere Zeit wenigstens etwas fester einer Unterlage angewachsen gewesen wäre. Die Coenobien meiner Aegagropila sind schärfer begrenzt, dichter und von grösserer Dicke und beträchtlich dunklerer Farbe. Die dunkle, fast schwarzgrüne Farbe lässt die abgefärbten Sprossgipfel sehr stark hervortreten, wodurch besonders die Oberseite der Coenobien sehr deutlich graugesprenkelt sich zeigt. Die grösseren Individuen der Coenobien sind zugleich bei meiner Pflanze kräftiger (kräftige Sprosse 120—160 μ dick) als bei der anderen (kräftige Sprosse 80—90 μ dick). Hieraus dürfte zu schliessen sein, dass auch andere Verschiedenheiten z. B. betreffend den feineren Bau des Chromatophors etc. vorkommen. Infolge dessen und da, so viel mir bekannt ist, noch keine Beobachtung über die Variationsverhältnisse dieser Pflanzen vorliegen, halte ich es für zweckmässigst, die von mir gefundene und näher untersuchte Aegagropila vorläufig für eine besondere Art zu betrachten. Sie mag *Ae. canescens* benannt werden.

Litteraturverzeichniss.

De Toni, J. B., Sylloge Algarum omnium hucusque cognitarum. Vol. I. Chlorophyceæ. Patavii 1889. (De Toni, Syll. Alg.).

Kjellman, F. R., Studier öfver Chlorophycéslägtet Acrosiphonia J. G. Ag. och dess Skandinaviska arter. — Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar B. 18. Afd. 3. N:o 5. Stockholm 1893. (Kjellm. Acrosiphonia).

Kützing, F. T., Species Algarum. Lipsiæ 1849. (Kütz. Spec. Alg.).

Lagerheim, G., Ueber Ægagropilen. — La Nuova Notarisia 1892.

Schmitz, Fr., Die Chromatophoren der Algen. Bonn 1882. (Schmitz, Chromatoph.).

Weber, Fr. und Mohr, D. M. H. Reise durch einen Theil Schwedens. Göttingen 1804. (Weber und Mohr, Reise).

Wille, N., Chlorophyceæ in »Die Natürlichen Pflanzenfamilien» von A. Engler und K. Prantl. B. 1, 2. 1890. (Wille, Chloroph. Syst.).

Wittrock, V. et Nordstedt, O., Algæ aquæ dulcis exsiccatæ præcipue Scandinavicæ, quas adjectis algis marinis chlorophyllaceis et phycochromaceis distribuerunt (Wittr. et Nordst. Algæ exsicc.).

Erklärung der Abbildungen.

Tafel 1. **Aegagropila canescens** Kjellm.

Fig. 1—5. Grosse Individuen, senkrecht in einem scheibenförmigen Coenobium orientiert, verschiedentlich verzweigt; $^{1}/_{1}^{0}$.

» 6. Basaltheil eines derartigen Individuums mit einer schräg aus der Basis entspringenden Wurzel; $^{6}/_{1}^{5}$.

» 7. Basaltheil eines dergleichen Individuums, aus einem zweizelligen Basalkörper und zwei diesem entspringenden Trieben, wovon der eine (*sp.*) sprossartig, der andere (*w.*) wurzelartig entwickelt ist, bestehend; $^{6}/_{1}^{5}$.

» 8. Ein ziemlich grosses, aus dem unteren Abschnitte eines scheibenförmigen Coenobiums stammendes, wagrecht orientiertes Individuum, bedeutende Verschiedenheit in der Form der Zellen zeigend; $^{6}/_{1}^{5}$.

» 9. Ein kleineres Individuum von derselben Lage und Richtung; der gonidiale Basalkörper entleert; die zwei längeren Triebe oberhalb wurzelähnlich entwickelt; $^{6}/_{1}^{5}$.

» 10. Ein derartiges Individuum, aus einem zweizelligen Basalkörper (*bk*), einer handförmig verzweigten Wurzel (*w*) und einem sprossähnlichen, der Spitze des Basalkörpers entspringenden Triebe bestehend; $^{6}/_{1}^{5}$.

Fig. 11. Ein derartiges Individuum, aus einem verzweigten Sprosse (*sp.*) und einer axilen, an einem freien, unentwickelten Basalkörper befestigten Wurzel (*w.*) bestehend; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 12. Die anhaftende Wurzelspitze desselben Individuums; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 13. Basalkörper (*bk*), oberhalb, aber seitlich einen Spross (*sp.*) entsendend; keine Wurzel vorhanden; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 14. Basalkörper (*bk*), oberhalb, aber seitlich zwei Sprosse (*sp.*) entsendend; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 15. Basalkörper (*bk*), oberhalb einen axilen Spross, unterhalb etwas seitlich eine Wurzel entsendend; $\frac{6}{1}^{5}$.

Tafel 2. **Aegagropila canescens** Kjellm.

Fig. 1. Ein fast vollständiges, grosses, ziemlich reich verzweigtes Individuum, in einem scheibenförmigen Coenobium senkrecht orientiert; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 2. Ein vollständiges, aus einem scheibenförmigen Coenobium stammendes Individuum, von einem Basalkörper (*bk*) und drei diesem entspringenden sprossähnlichen Trieben gebildet, wovon der endständige (*b*) aus einem wagrecht orientierten, mit einer Wurzel (*w*) und einem wurzelartig entwickelten Zweigende (*w'*) versehenen Abschnitte und aus einem senkrechten, die Wurzeln w^2 und w^3 entsendenden Abschnitte besteht; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 3. Ein unterhalb senkrecht, oberhalb wagrecht oder schräg orientiertes Individuum eines scheibenförmigen Coenobiums. Die Polarität bei *c* und *b* verändert; *w* und *w'* wurzelähnliche Sprosszweige; $\frac{6}{1}^{5}$.

Tafel 3. **Aegagropila canescens** Kjellm.

Fig. 1. Ein kleines Individuum aus dem unteren Abschnitte eines scheibenförmigen Coenobiums, aus einem zweizelligen Basalkörper und zwei diesem seitlich entspringenden wurzelähnlichen Trieben bestehend; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 2. Zweig, von einer Reihe zu Fortpflanzungskörpern gonidialer Natur umgeformter Zellen gebildet. Der Inhalt der Zellen nicht gezeichnet; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 3. Eine von diesen Zellen, stärker vergrössert; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 4. Zweig derselben Art. Die an die Fortpflanzungskörper grenzenden Zellen abgestorben; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 5. Die an einander stossenden Enden dieser Fortpflanzungskörper. Der Zusammenhang fast aufgehoben; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 6. Ein Fortpflanzungskörper dieser Art in Keimung begriffen; zwei seitliche Wurzeln und an dem einen Ende des Körpers zwei Vegetationspunkte entstanden; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 7. Oberer sprossender Abschnitt desselben Körpers; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 8. Die Basis desselben; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 9. Das Durchwachsen einer Zelle; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 10. Die Verjüngung einer Wurzel durch Durchwachsung; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 11. Die Verjüngung eines Sprossabschnittes. Vergl. Taf. 2, Fig 3 bei*.

» 12. Oberer Theil eines reich verzweigten Sprosses; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 13. Ein kleines Individuum aus dem unteren Abschnitte eines Coenobiums, dessen Sprossende zu einem Haft- oder Greiforgane entwickelt ist; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 14. Ein zu einem Haftorgane umgeformtes Zweigende; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 15--16. Zwei verschiedentlich entwickelte Abschnitte eines Sprosses, der eine schwach für Anhaften umgeformt; $\frac{6}{1}^{5}$.

» 17. Ein zu einem Haftorgane umgeformtes Zweigende, stärker vergrössert; $\frac{1}{1}^{5}$.

» 18. Spitze einer wachsenden Endzelle; $\frac{2}{1}^{0}$.

» 19. Spitze einer Endzelle nach beendigtem Wachsthum; $\frac{2}{1}^{0}$.

» 20. Theil des Chromatophors, von aussen gesehen; $\frac{2}{1}^{0}$.

Fig. 21. Theil eines mit Jodlösung behandelten Chromatophors; die Maschen sind mit Pyrenoiden, von dicken Stärkehüllen umgeben, ausgefüllt; $^{2}\frac{5}{1}{}^{0}$.

» 22. Theil eines Chromatophors etwas schräg von der Seite gesehen; links das innere Lamellennetz sichtbar; $^{2}\frac{5}{1}{}^{0}$.

» 23. Das innere Lamellennetz eines Chromatophors, von aussen gesehen; $^{2}\frac{5}{1}{}^{0}$.

Tafel 4.

Aegagropila Martensii Menegh. Fig. 1.

Fig. 1. Unterer Theil eines Individuums. Der Zweig *a* durch die Auflösung der Basalzelle sich losmachend; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

Aegagropila Linnæi Kütz. Fig. 2.

» 2. Basaltheil eines Individuums; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

Aegagropila Sauteri (Nees ob. Es) Kütz. Fig. 3.

» 3. Basaltheil eines Individuums aus dem äusseren Abschnitte eines sehr grossen Coenobiums: $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

Aegagropila holsatica Kütz., f. **adnata** Wittr. et Nordst. Fig. 4—6.

» 4. Basaltheil eines grösseren, senkrecht orientierten Individuums, durch die Individualisierung eines Zweiges entstanden; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

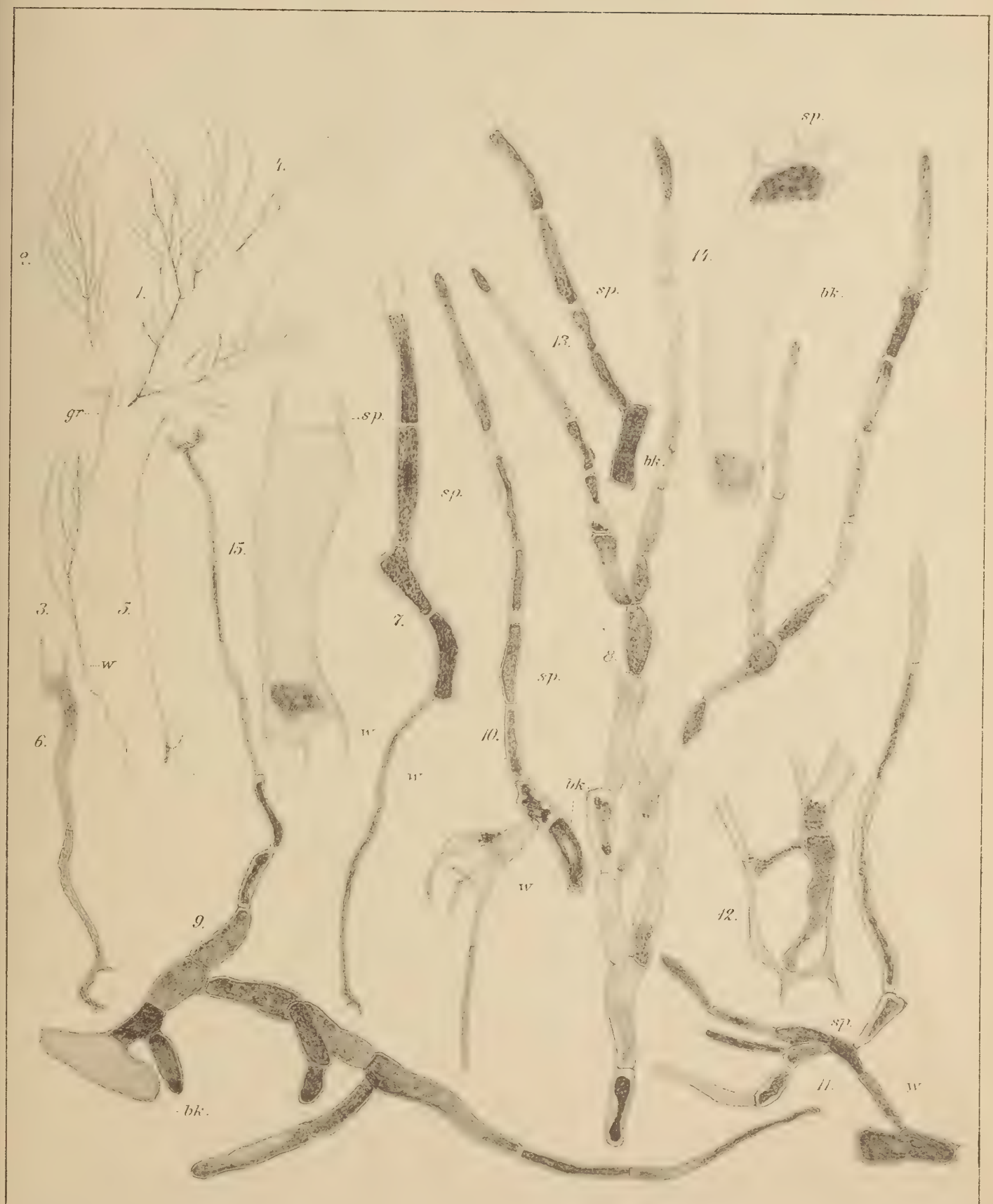
» 5. Ein kleines (in Entwickelung begriffenes) Individuum aus dem unteren Abschnitte eines Coenobiums, von dem Basalkörper *bk*, der Wurzel *w* und dem jungen Sprosse *sp.* gebildet; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

» 6. Ein derartiges Individuum; *bk* Basalkörper; *w* ein langer, unverzweigter, wurzelartiger Trieb; *sp.* ein ebenfalls langer und unverzweigter Trieb, unterhalb sprossähnlich, oberhalb wurzelartig entwickelt; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

Aegagropila spec. (supra lapides stratiformiter effusa, a cel. D:re O. F. Borge lecta). Fig. 7—8.

» 7. Ein schwach entwickeltes Individuum aus dem unteren Abschnitte des Coenobiums; *bk* Basalkörper; *w*, *w'* Wurzeln; *sp*, *sp'* Sprosse: $^{6}\frac{}{1}{}^{5}$.

» 8. Der Basalkörper desselben Individuums, stärker vergrössert; $^{1}\frac{2}{1}{}^{5}$.

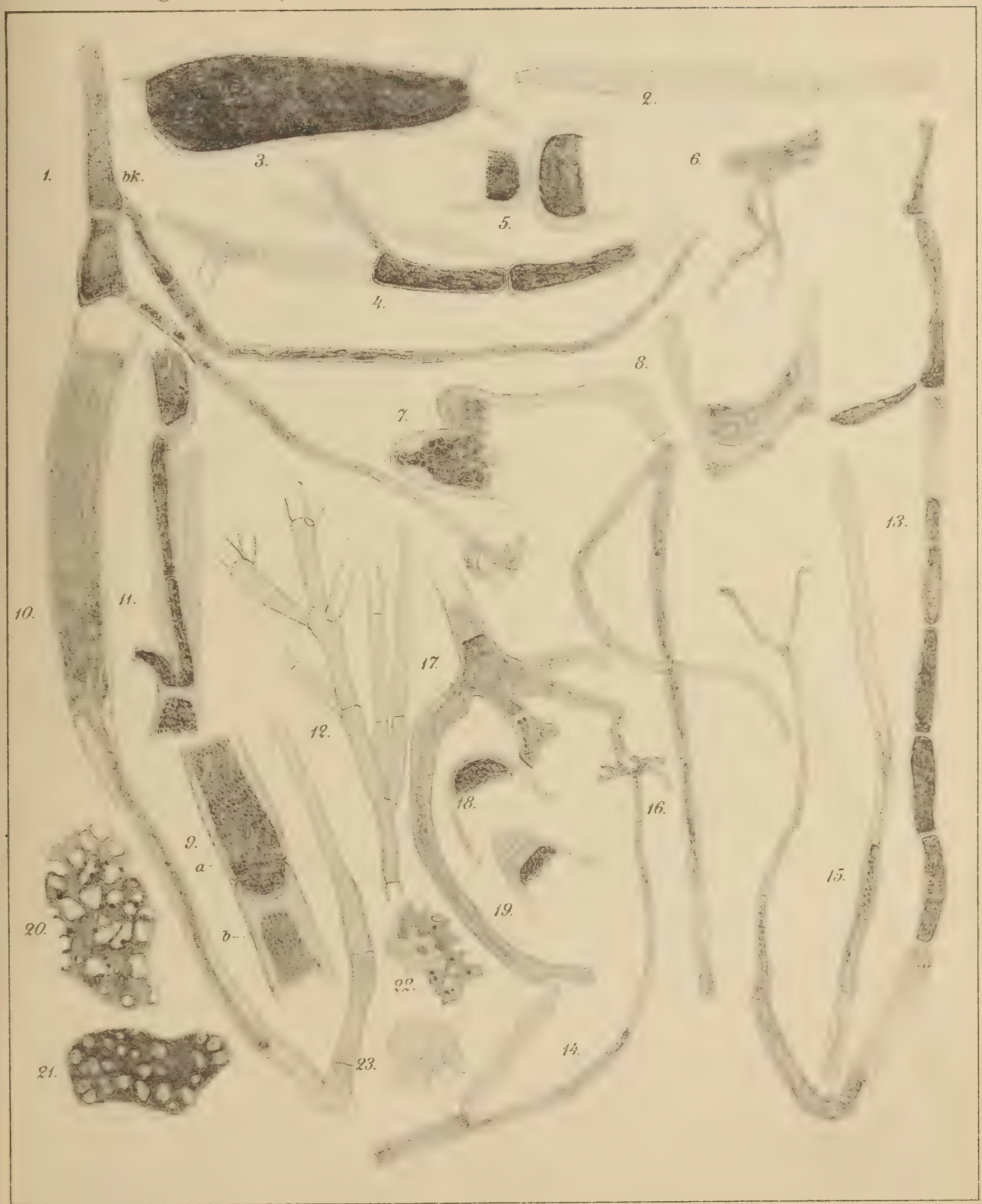


Kjellm. del.

Aegagropila canescens Kjellm.

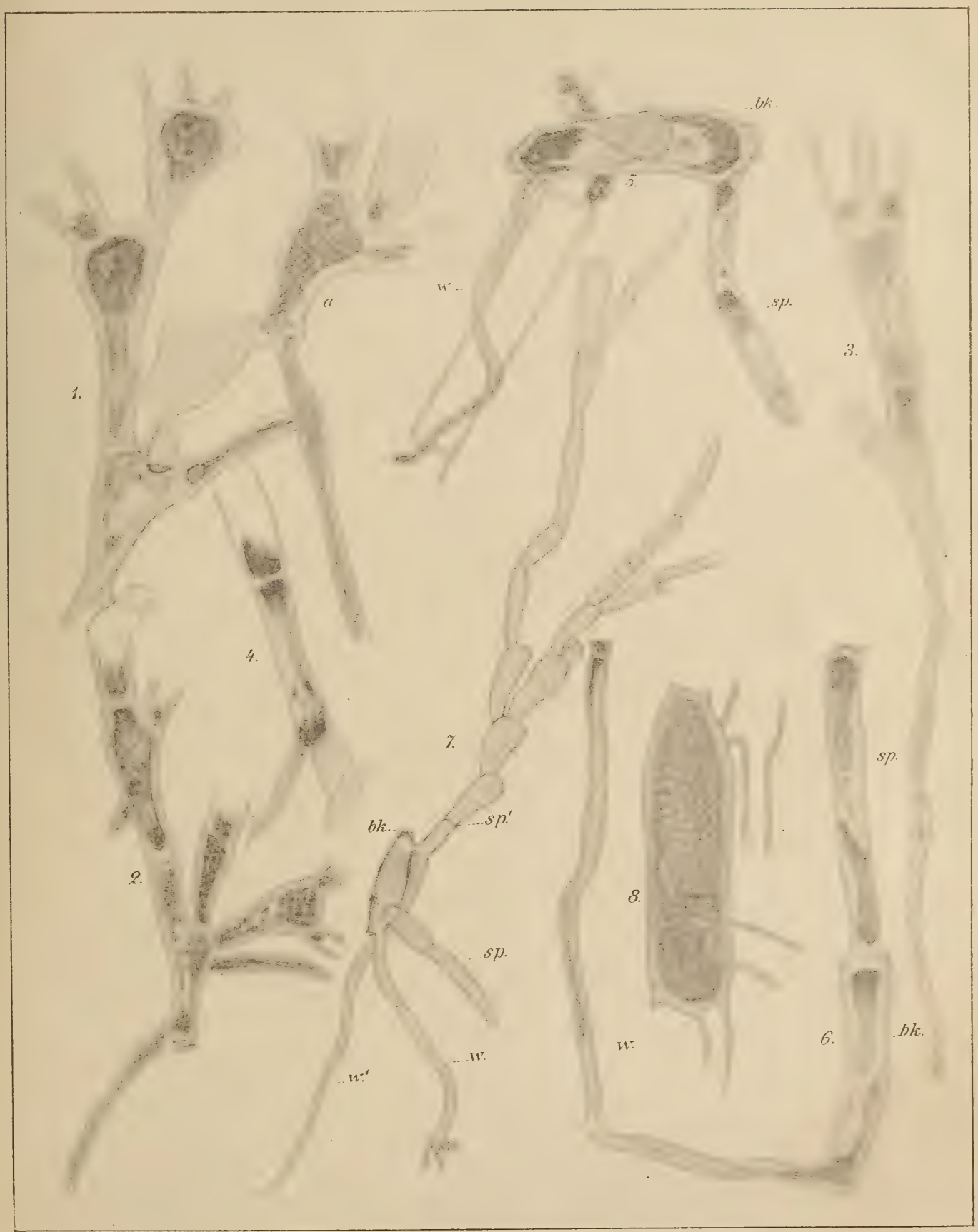
Kjellm. del.

Aegagropila canescens Kjellm.



Kjellm. del.

Aegagropila canescens Kjellm.



Kjellm. del.

1. **Aegagropila Martensii** Menegh. 2. Ae. **Linnæi** Kütz. 3. Ae. **Sauteri** (N. ab E s.) Kütz. 4–6. Ae. **holsatica** Kütz. f. adnata Wittr. et Nordst. 7–8. **Aegagropila spec.**

1898.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01305 6254